



A MAGYAR
TUDOMÁNY
ÜNNEPE

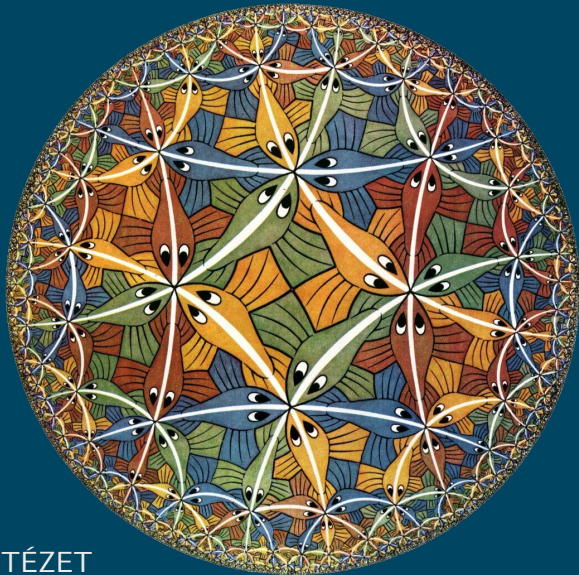
MTA

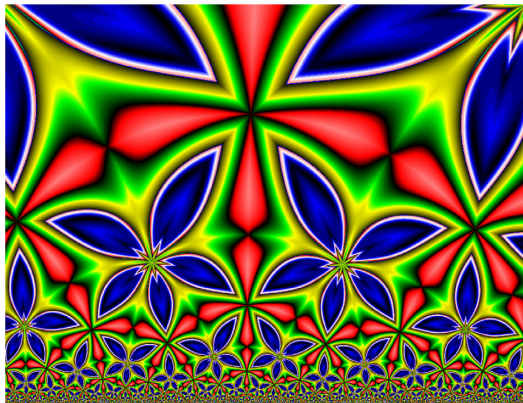
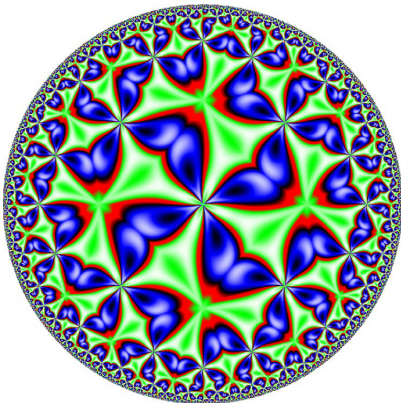
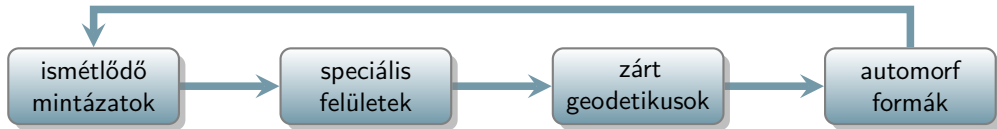
Lendület
Program

Automorf formák és zárt geodetikusok

HARCOS GERGELY

RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET





Tekintsünk egy olyan mintázatot az euklideszi síkon, amely két különböző irányban is ismétlődik. Ezt a mintázatot előlíthatjuk úgy, hogy egy paralelogramma alakú csempét tologatunk az oldalvektoraival.



Persze a csempe szemközti oldalain ugyanaz a minta, ezért azokat képzeletben összeragaszthatjuk. Így a paralelogrammából egy **úszógumi alakú** felületet kapunk, amelyen lokálisan az **euklideszi geometria** érvényes.

Geodetikusok az egylyukú (euklideszi) úszógumin

A „ragasztással” kapott felületen a **geodetikusok** az euklideszi egyenesek képei. Ha egy egyenes iránya megegyezik két csempét összekötő eltolás irányával, akkor a képe **zárt geodetikus**, egyébként pedig önmagát nem metsző geodetikus.



egy másik
alapcsempe...

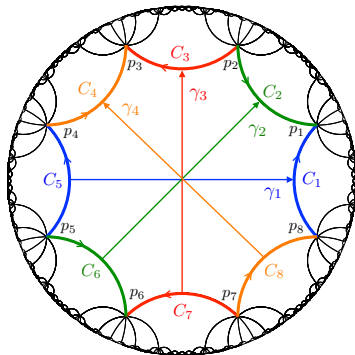


...és ugyanez
elforgatva 180 fokkal



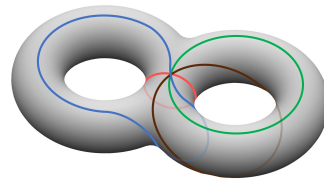
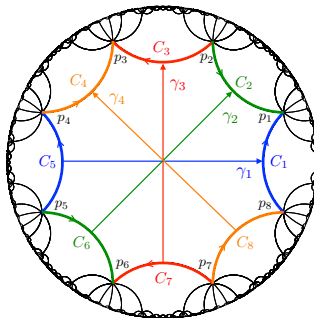
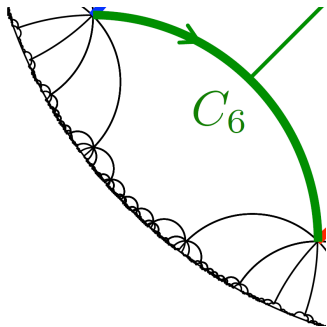
A hiperbolikus sík változatosabban csempézhető, mint az euklideszi, és így bonyolultabb felületek származtathatók belőle. Ennek több, egymással összefüggő oka van: a hiperbolikus síkon számít az eltolások sorrendje, minden eltolásnak van egy **tengelye**, és minden háromszög területe kifejezhető a szögeiből mint $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Vegyünk egy $4g$ oldalú hiperbolikus konvex sokszöget, amelyben a szögek összege 360 fok, továbbá a szemközti oldalak egymás eltoltjai. A sokszöget az oldalpárosító eltolásokkal tologatva a hiperbolikus sík egy csempézését kapjuk. Továbbá a sokszög szemközti oldalait képzeletben összeragasztva egy olyan **g lyukú úszógumi alakú** felületet kapunk, amelyen lokálisan a **hiperbolikus geometria** érvényes.



Geodetikusok a többlyukú (hiperbolikus) úszógumin

A „ragasztással” kapott felületen a **geodetikusok** a hiperbolikus egyenesek képei. Ha egy egyenes megegyezik két csempét összekötő eltolás tengelyével, akkor a képe **zárt geodetikus**. Ha egy egyenes átmegy két csempe egy-egy olyan pontján, amelyek egymásnak felelnek meg, akkor a képe egy önmagát metsző geodetikus (beleértve a zárt geodetikus esetét is), egyébként pedig egy önmagát nem metsző geodetikus.

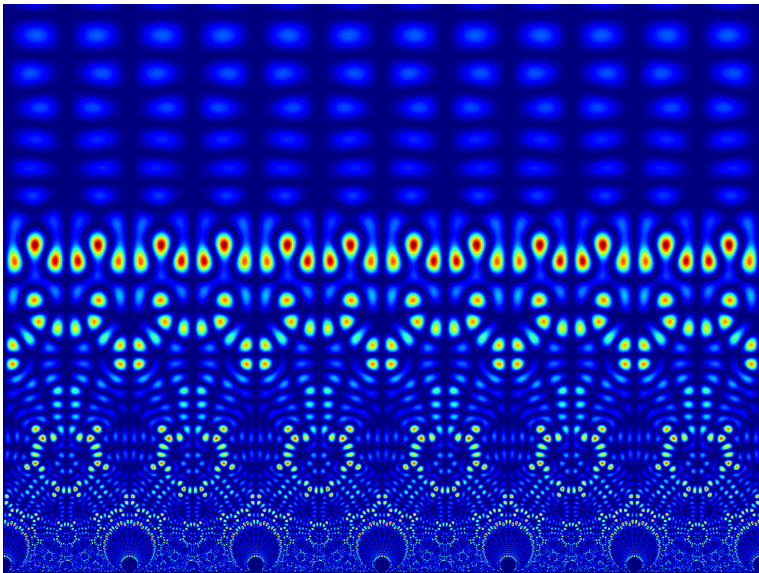


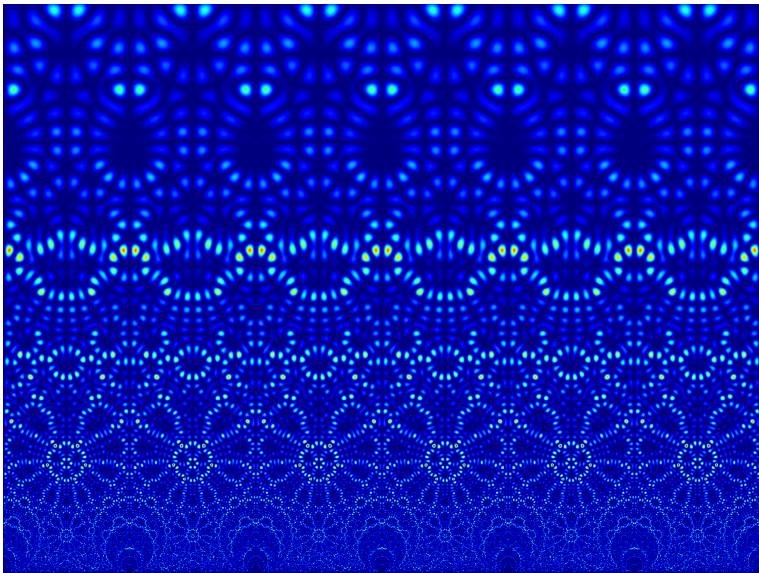
Selberg és Huber fedezte fel az 1950-es években, hogy egy többlyukú (hiperbolikus) úszógumin az irányított zárt geodetikusok hosszai hasonlóan oszlanak el, mint a prímszámok természetes logaritmusai. A bizonyításban fontos szerepet játszanak az adott felületen értelmezett hullámfüggvények, amelyek a hiperbolikus síkon periodikus hullámfüggvényeknek (ún. **Maass-formák**nak) felelnek meg.

Tétel (Soundararajan–Young 2013, Balog–Biró–Harcos–Maga 2019)

A moduláris felületen tekintsük az összes irányított zárt geodetikust, amelynek hossza legfeljebb $\ln(x)$. Legyen $\Psi(x)$ ezen geodetikusok hosszainak összege.

- Tetszőleges $c > 25/36$ esetén $|\Psi(x) - x|$ mindig kisebb, mint konstansszor x^c .
- Tetszőleges $c > 7/12$ esetén $|\Psi(x) - x|$ tipikusan kisebb, mint konstansszor x^c .





A képek forrásainak jegyzéke

- ① Ouyang et al., *Computers & Graphics* **36** (2012), 92–100.
- ② Maciejko & Rayan, *Sci. Adv.* **7** (2021), eabe9170
- ③ Stepanyants et al., *J. Phys. A: Math. Theor.* **57** (2024), 345201
- ④ <https://escherinhetpaleis.nl/story-of-escher/eight-heads/?lang=en>
- ⑤ <https://definepattern.tumblr.com/post/111225383794>
- ⑥ <https://www.pinterest.com/pin/619104279996380162/>
- ⑦ Fredrik Strömberg, University of Nottingham



A MAGYAR
TUDOMÁNY
ÜNNEPE

MTA

Lendület
Program

Köszönöm
a figyelmet!

MTA

