ADDITÍV KONVOLÚCIÓS ÖSSZEGEK SPEKTRÁLIS FELBONTÁSA

HARCOS GERGELY

Ha $a(n)$ egy számelméleti függvény, akkor természetes feladat a

$$\sum_{m\pm n=h} a(m)a(n)W(m,n)$$

alakú additív konvolúciós összegek vizsgálata. Ha $W:(0,\infty)^2\to\mathbb{C}$ egy rögzített szép súlyfüggvény, akkor a kérdés a fenti összegek viselkedése a h növekedtével. Gyakorlati szempontból a fenti összegeket bizonyos $b(h)$ természetes számelméleti függvények kombinációjával próbáljuk közelíteni oly módon, hogy az összeg kívánatos tulajdonságai láthatóvá váljanak.

Már Jacobi (1829) felismerte, hogy egyes speciális esetekben a fenti közelítés hibatag nélkül megvalósítható, ráadásul az eredeti $a(n)$ függvényhez hasonló $b(h)$ függvények segítségével. Tekintsük példaképpen az alábbi explicit formulát a

$$\sigma_\nu(n):=\sum_{d|n} d^\nu$$

osztószám-függvényekre:

$$\sum_{m+n=h}\sigma_3(m)\sigma_3(n)=\frac{1}{120}\sigma_7(h)-\frac{1}{120}\sigma_3(h). \tag{1}$$

A formulára gyors és lényegre törő bizonyítást adhatunk a holomorf moduláris formák elméletének segítségével. Nevezetesen minden k páros pozitív egészre

$$E_k(z):=\frac{1}{2}\sum_{(m,n)=1}(mz+n)^{-k}$$

egy k súlyú holomorf moduláris forma az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ csoportra nézve (az ún. Eisenstein-sor), aminek Fourier-sorfejtése

$$E_k(z)=1-2kB_k^{-1}\sum_{n=1}^\infty \sigma_{k-1}(n)e(nz),$$

ahol B_k a k. Bernoulli-szám. Speciálisan,

$$E_4=1+240\sum_{n=1}^\infty\sigma_3(n)e(nz)\qquad\text{és}\qquad E_8=1+480\sum_{n=1}^\infty\sigma_7(n)e(nz),$$

tehát az (1) azonosság ekvivalens azzal, hogy

$$E_4^2=E_8.$$

Az utóbbi egyenlet annak következménye, hogy $E_4^2-E_8$ egy 8 súlyú csúcsforma, továbbá a 8 súlyú csúcsformák tere 0-dimenziós. Általában az mondható el, hogy ha

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty a(n)e(nz)$$

egy k súlyú moduláris forma az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ csoportra nézve, akkor alkalmas c_j konstansokkal létezik egy

$$f^2(z) = c_0 E_{2k}(z) + \sum_{j=1}^{\theta(k)} c_j g_{j,k}(z) \tag{2}$$

spektrális felbontás, ahol $(g_{j,k})_{j=1}^{\theta(k)}$ a $2k$ súlyú csúcsformák terének egy normalizált Hecke-bázisa, tehát a megfelelő Hecke-sajátértékekkel

$$\sum_{m+n=h} a(m)a(n) = c_0 \sigma_{2k-1}(h) + h^{k-1/2} \sum_{j=1}^{\theta(k)} c_j \lambda_{j,k}(h). \tag{3}$$

Megjegyezzük, hogy Deligne (1973) neves eredménye szerint

$$|\lambda_{j,k}(h)| \leqslant d(h).$$

Maradjunk továbbra is holomorf moduláris formák Fourier-együtthatóinál, de most próbáljuk a mínusz típusú konvolúciós összegekre alkalmazni a fenti gondolatmenetet. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz)$$

egy Hecke-csúcsforma. Az $f^2(z)$ forma helyett most az $|f(z)|^2$ kifejezéssel szeretnénk dolgozni, de ez már nem holomorf moduláris forma, tehát (2) alakú spektrális felbontása nem létezik. Mindenesetre

$$F(x+iy) := y^k |f(x+iy)|^2$$

invariáns a $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ csoportra nézve, és természetesen

$$\langle F, F\rangle < \infty, \qquad \text{ahol} \qquad \langle F_1, F_2\rangle := \int_{\Gamma\backslash\mathscr{H}} F_1(z)\overline{F_2(z)} \frac{dxdy}{y^2},$$

vagyis F-re alkalmazhatjuk az $L^2(\Gamma\backslash\mathscr{H})$ Hilbert-tér spektrálelméletét. Ebben a térben F felbontható mint

$$F(z) = \langle F, 1\rangle \frac{3}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} \langle F, g_j\rangle g_j(z) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F, E(\cdot, \tfrac12 + it)\rangle E(z, \tfrac12 + it)\, dt,$$

ahol $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ az $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathscr{H})$ Hilbert-altér egy L^2-normalizált Hecke-bázisa, továbbá

$$E(z,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \Im(\gamma z)^s$$

az Eisenstein-sor. Tekintsük most a

$$P_h(z,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \Im(\gamma z)^s e(h\Re(\gamma z))$$

Poincaré-sort és a spektrális felbontásból nyerhető

$$\langle F, P_h(\cdot,s)\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle F, g_j\rangle\langle g_j, P_h(\cdot,s)\rangle + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F, E(\cdot, \tfrac12 + it)\rangle\langle E(\cdot, \tfrac12 + it), P_h(\cdot,s)\rangle\, dt \tag{4}$$

Plancherel-azonosságot. A bal oldal a híres Rankin–Selberg kihajtogatós technika szerint (jegyezzük meg, hogy $\lambda_f(n)$ valós)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma\backslash\mathscr{H}} y^k |f(x+iy)|^2 \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \Im(\gamma z)^s e(-h\Re(\gamma z))\,\frac{dxdy}{y^2}\\
&=\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathscr{H}} |f(x+iy)|^2 e(-hx) y^{s+k}\,\frac{dxdy}{y^2}\\
&=\int_0^1\int_0^\infty \sum_{m,n=1}^\infty \lambda_f(m)\lambda_f(n)(mn)^{\frac{k-1}{2}} e((m+n)z)e(-hx)y^{s+k-2}\,dx\,dy\\
&=\sum_{m-n=h}\lambda_f(m)\lambda_f(n)(mn)^{\frac{k-1}{2}}\int_0^\infty e^{-2\pi(m+n)y}y^{s+k-1}\,\frac{dy}{y}\\
&=\frac{\Gamma(s+k-1)}{(2\pi)^{s+k-1}}\sum_{m-n=h}\frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{(m+n)^s}\left(\frac{\sqrt{mn}}{m+n}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

A (4) jobb oldalán hasonló számolással kapjuk, hogy a $\langle g, P_h(\cdot,s)\rangle$ alakú belső szorzatok a megfelelő g forma $\lambda_g(h)$ Hecke-sajátértékével arányos. Ily módon a (4) azonosságból a (3) egy analogonját nyerjük:

$$\sum_{m-n=h}\frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{(m+n)^s}\left(\frac{\sqrt{mn}}{m+n}\right)^{k-1} = h^{\frac12-s}\left\{\sum_{j=1}^\infty \lambda_j(h)w_j(s)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty h^{-it}\sigma_{2it}(h)w(s,t)\,dt\right\}. \tag{5}$$

Itt az analízis szempontjából fontos

$$\sum_{j=1}^\infty |w_j(s)| + \int_{-\infty}^\infty |w(s,t)|\,dt \ll_\varepsilon |s|^A, \qquad \Re(s) > \frac12+\varepsilon$$

alakú becslés visszavezethető egy

$$\sum_{|t_j|\leqslant T} |\langle F, g_j\rangle|^2 e^{\pi|t_j|} + \int_{-T}^T |\langle F, E(\cdot,\tfrac12+it)\rangle|^2 e^{\pi|t|}\,dt \ll T^B \tag{6}$$

alakú becslésre, ez utóbbit Good (1981) igazolta.

Az (5) azonosságot többen többféle módszerrel próbálták általánosítani az

$$f(x+iy) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0}\lambda_f(|n|)K_{ir}(2\pi|n|y)e(nx)$$

Hecke–Maass csúcsformák esetére ($\frac14 + r^2$ a forma Laplace-sajátértéke), de mindeddig csak közelítő formulákat sikerült igazolni. Kiemelném Sarnak (1994) és Jutila (1996) eredményét, miszerint a fontos (6) egyenlőtlenség továbbra is fennáll az

$$F(x+iy) := |f(x+iy)|^2$$

$L^2(\Gamma\backslash\mathscr{H})$-beli függvényre, továbbá Blomer (2004) eredményét, miszerint

$$\sum_{m-n=h}\frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{(m+n)^s} \ll_{\sigma,\varepsilon} |s|^A h^{\frac12-\sigma+\theta+\varepsilon}, \qquad \sigma = \Re(s) > \frac12+\theta,$$

ha

$$\forall j\forall h:\ |\lambda_j(h)| \leqslant d(h)h^\theta.$$

A holomorf formákra szépen működő fenti gondolatmenettel a legfőbb nehézség az, hogy pozitív egész (m,n) párokra csak egy

$$\int_0^\infty K_{ir}(2\pi my)K_{ir}(2\pi ny)y^s\frac{dy}{y}\approx\frac{G(s,ir)}{(m+n)^s}\left(\frac{\sqrt{mn}}{m+n}\right)^{2ir}$$

közelítés igaz, ahol $G(s,ir)$ az s és az ir egy alkalmas függvénye. A közelítés nagy (m,n) párokra (ahol $m-n=h$) elég pontos, de megmutatható, hogy a bal oldali integrálokból nagyon sok szép $W(m,n)$ súlyfüggvény nem rakható ki, tehát végtelen sok hiányzó harmonikussal kell szembenéznünk.

A továbbiakban arról szeretnék beszámolni, hogy Blomerrel közösen sikerült a hiányzó harmonikusokat reprezentációelméleti módszerekkel azonosítanunk és a következő tételt igazolnuk:

$$\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m-n=h}}\frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{(m+n)^s}\left(\frac{\sqrt{mn}}{m+n}\right)^{100}= \tag{7}$$

$$h^{\frac{1}{2}-s}\left\{\sum_{j=1}^\infty\lambda_j(h)w_j(s)+\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^{\theta(k)}\lambda_{j,k}(h)w_{j,k}(s)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty h^{-it}\sigma_{2it}(h)w(s,t)\,dt\right\},$$

ahol

$$\sum_{j=1}^\infty|w_j(s)|+\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^{\theta(k)}|w_{j,k}(s)|+\int_{-\infty}^\infty|w(s,t)|\,dt\ll_\varepsilon|s|^{22},\qquad\frac{1}{2}+\varepsilon<\Re(s)<\frac{3}{2}-\varepsilon. \tag{8}$$

Láthatjuk tehát, hogy a spektrális felbontásban nem csak a Maass- és Eisenstein-spektrumok vesznek részt, hanem a teljes holomorf spektrum is. A tétel működik holomorf Hecke-csúcsformákra és kevert $\lambda_f(m)\lambda_g(n)$ alakú szorzatokra is. Ez szépen harmonizál Motohashi (1994) formulájával, amiben $\sigma_\alpha(m)\sigma_\beta(n)$ alakú együtthatók kerülnek összegzésre és amiben szintén részt vesz mindhárom fajta spektrum. Ezek a formulák igen hasznosak különböző automorf L-függvények vizsgálatában. A 100 kitevőnek csak annyi a szerepe, hogy elég nagy, ennek növelésével a (8)-nál jóval erősebb becslés is garantálható a súlyfüggvényekre.

A bizonyítás alapötlete az, hogy a $\lambda_f(|n|)$ Hecke-sajátértékek nem csak az eredeti f formában lelhetők fel, hanem azok ún. Maass-eltoltjaiban is. A Maass-eltolásokat maga Maass (1953) fedezte fel és a számunkra lényeges tulajdonságok a következők. Minden p egészhez van egy

$$f_p(x+iy)=\sum_{n\neq 0}\frac{\lambda_f(|n|)}{\sqrt{|n|}}W_{f,p}(ny)e(nx)$$

$2p$ súlyú Hecke–Maass csúcsforma a felső félsíkon, továbbá a $W_{f,p}$ függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(\mathbb{R}^\times)$ Hilbert-térben. Az f_p függvények nem Γ-invariánsak, de felemelhetők a $G:=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoport balról Γ-invariáns függvényeivé a

$$\phi_p(n(x)a(y)k(\theta)):=\sum_{n\neq 0}\frac{\lambda_f(|n|)}{\sqrt{|n|}}W_{f,p}(ny)e(nx)e^{2ip\theta},$$

$$n(x):=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\quad a(u):=\begin{pmatrix}y^{1/2}&0\\0&y^{-1/2}\end{pmatrix},\quad k(\theta):=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

definícióval. Kiderül, hogy egy alkalmas $C_f>0$ konstanssal

$$\forall p\forall q:\langle W_{f,p},W_{f,q}\rangle=C_f\langle\phi_p,\phi_q\rangle,$$

vagyis

$$W := \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p W_{f,p} \quad \longmapsto \quad \phi := C_f^{1/2} \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p \phi_p \tag{9}$$

egy $L^2(\mathbb{R}^\times) \to L^2(\Gamma\backslash G)$ Hilbert-tér izomorfizmus. Az így kapható ϕ függvények az $L^2(\Gamma\backslash G)$ egy irreducibilis alterét alkotják, ezeken a vektorokon a G jobbról hat. A megfelelő W függvények alkotják ezen automorf reprezentáció Kirillov-modelljét, amin tehát szintén hat a G. A G-hatás segítségével definiálhatók a ϕ és W függvények Lie-deriváltjai és a deriváltak átlagos nagyságát mérő Szoboljev-normák. Nagyjából elmondható, hogy a (9)-beli összegek annál gyorsabban konvergálnak, minél kisebbek az előállítandó W Szoboljev-normái, ez utóbbi pedig nagyjából azon múlik, hogy a W milyen gyorsan csökken a 0-ban és a $\pm\infty$-ben. Végső soron azt kapjuk, hogy minden kellően szép $W \in L^2(\mathbb{R}^\times)$ súlyfüggvényhez tartoznak kis Szoboljev-normákkal rendelkező $\phi^\pm \in L^2(\Gamma\backslash G)$ vektorok úgy, hogy

$$\phi^\pm(n(x)a(y)) = \sum_{n\neq 0} \frac{\lambda_f(|n|)}{\sqrt{|n|}} W(\pm ny)e(nx).$$

A $\phi^+\phi^-$ vektort spektrálisan felbonthatjuk az $L^2(\Gamma\backslash G)$ térben, ami a Fourier-együtthatók szintjén egy

$$\sum_{m-n=h} \frac{\lambda_f(|m|)\lambda_f(|n|)}{\sqrt{|mn|}} W(my)W(ny) =$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(h)}{\sqrt{h}} W_j(hy) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\theta(k)} \frac{\lambda_{j,k}(h)}{\sqrt{h}} W_{j,k}(hy) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^{-it}\sigma_{2it}(h)}{\sqrt{h}} W(hy,t)\,dt$$

azosságot eredményez. A jobb oldalon szereplő súlyfüggvények a végtelenben gyorsan csökkennek, a nulla körül pedig majdnem négyzetgyökösen, ami miatt a bal oldali $\lambda_f(m)\lambda_f(n)$ tagok nagyjából négyzetgyökösen kiejtik egymást. Végezetül egy Laplace-transzformáltas technikával, különböző $W \in L^2(\mathbb{R}^\times)$ súlyfüggvények és $y > 0$ számok feletti átlagolással kapjuk a (7) spektrális felbontást és a (8) becslést.

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, 1053 Budapest, Reáltanoda u. 13-15.
E-mail address: gharcos@renyi.hu