MILYEN TÁVOLSÁGOKRA ESHET EGY VALÓS SZÁM AZ ÖSSZES RACIONÁLIS SZÁMTÓL?

Harcos Gergely

1. Bevezetés

A számelméletben és a matematika egyéb területein is gyakran hasznot hajt Dirichlet azon észrevétele, miszerint minden ξ valós szám és Q pozitív egész esetében

$$\min_{1\le q\le Q}\|q\xi\|<\frac{1}{Q},$$

ahol $\|x\|$ egy tetszőleges x valós számnak a legközelebbi egésztől vett távolságát jelöli. Természetesen $Q=1$ mellett az állítás semmitmondó, a többi esetben viszont éppen azt jelenti, hogy létezik egy legfeljebb Q nevezőjű $\frac{p}{q}$ tört, amelynek a ξ-től vett eltérése

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qQ},$$

sőt a minimumot szolgáltató q-hoz a p egyértelműen létezik $\|q\xi\|<\frac{1}{Q}\le\frac{1}{2}$ miatt. A tételnek sokszor csak azt a következményét idézik, hogy tetszőleges ξ valós számra

$$\nu(\xi)\overset{\mathrm{df}}{=}\liminf_{q\to\infty} q\|q\xi\|\le 1$$

teljesül, pontosabban végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, amelynek a ξ-től vett eltérése

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}. \tag{1.1}$$

Ezek szerint minden valós szám közelíthető racionális számokkal négyzetes rendben, ami nem is javítható abban az értelemben, hogy 2-nél nagyobb kitevővel már csak nullmértékű halmaz teljesíti a megfelelő összefüggést. Igazán rosszul közelíthetőnek akkor nevezhetünk egy ξ valós számot, ha az (1.1) mellett még egy

$$\frac{1}{q^2}\ll\left|\xi-\frac{p}{q}\right|$$

alakú reláció is teljesül, azaz

$$0<\nu(\xi).$$

Az ilyen rosszul közelíthető ξ-k a Lebesgue-mérték szempontjából nagyon ritka—nullmértékű—halmazt alkotnak, számosságuk azonban kontinuum; igazi jellemzésüket a lánctört alak adja: ezek éppen azok a számok, amelyek lánctört kifejtésében

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

a jegyek korlátosak. Speciálisan, rosszul közelíthetőek a periodikus lánctörtek, azaz a másodfokú algebrai számok. A $\nu(\xi)$ függvény, bár nem elégíti ki egy norma követelményeit, mégis egyfajta távolságfüggvényként értelmezhető, amely azt méri, milyen messze van a ξ „majdnem minden" racionális számtól. A ν például eleget tesz a háromszög-egyenlőtlenségnek. Természetéből adódóan a ν nem tesz különbséget olyan számok között, amelyek lánctörtjegyei megegyeznek egy-egy adott ponttól kezdve, más szóval

$$\nu(\Xi) = \nu(\xi),$$

ha

$$\Xi = \frac{a\xi + b}{c\xi + d} \quad \text{valamilyen} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})\text{-vel.} \tag{1.2}$$

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy $GL_2(\mathbb{Z})$ a ± 1 determinánsú 2×2-es egész mátrixokból áll. A ξ-t és a Ξ-t *ekvivalenseknek* nevezzük, ha közöttük fennáll az (1.2) összefüggés; könnyen ellenőrizhető, hogy így ekvivalencia-relációt definiáltunk a valós számok halmazán.

Ha valós számoknak racionálisokkal való közelítéseiről beszélünk, nem érdektelen megkérdeznünk, mennyire javítható az (1.1) becslés (végtelen sok $\frac{p}{q}$ törtre), azaz a jobb oldalon mennyire csökkenthető az 1 konstans. Ez—kicsit enyhébb formában—annak a kérdésnek felel meg, hogy mennyi a ν értékkészletének a szuprémuma, illetve hogy ez a szuprémum maximum-e is egyben. Az első kérdésre Hurwitz [7] adta meg a választ, bebizonyítva, hogy $\frac{1}{\sqrt{5}}$ a legjobb konstans, ami az 1 helyébe írható az (1.1)-ben, ha végtelen sok $\frac{p}{q}$ közelítést várunk, és ez automatikusan megadja a választ a második kérdésre is, nevezetesen hogy ν-nek az $\frac{1}{\sqrt{5}}$ maximuma. Valójában többet bizonyított Hurwitz: megmutatta, hogy azok a ξ-k, amelyekre az $\frac{1}{\sqrt{5}}$ konstans pontos, más szóval amelyekre $\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, az $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ekvivalencia-osztályát alkotják, míg minden további ξ esetében a konstans javítható $\frac{1}{\sqrt{8}}$-ra, és ez a legjobb javítás, ami elérhető. Ez lényegében annyit tesz, hogy ν-nek az $\frac{1}{\sqrt{8}}$ a második legnagyobb értéke. Azok a ξ-k, amelyeknél $\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8}}$, ismét egy ekvivalencia-osztályt alkotnak, a $\sqrt{2}$-ét. Hurwitz megsejtette, hogy a becsléseknek ez a láncolata folytatható a végtelenségig, amit aztán Markov [8] kvadratikus formákról szóló alapvető munkájából kiindulva egymástól függetlenül Perron [9], Heawood [6] és Shibata [10] igazoltak pontosan megfogalmazott formában. Az $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és a $\sqrt{2}$ ekvivalencia-osztályán felüli ξ-kre az (1.1) jobb oldalán az 1 helyébe $\frac{1}{\sqrt{8{,}84}}$ írható, ami megint pontos egy ekvivalencia- osztályon, és így tovább. A fellépő konstansok $\frac{1}{\sqrt{9-4m^{-2}}}$ alakúak, ahol az m egészek az úgynevezett Markov-számok, amelyek az

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3$$

diofantikus egyenlet megoldásaiból származtathatók mint

$$m = \max(m_1, m_2, m_3).$$

Ez a diofantikus egyenlet alkotja Markov munkájának a magvát. Az egyes konstansokhoz tartozó extremális ekvivalencia-osztályok persze rosszul közelíthető, sőt, mint kiderül, másodfokú algebrai számokból állnak, vagyis mindegyik ilyen osztályra úgy tekinthetünk, mint egy-egy $F(x,1)$ alakú másodfokú polinom gyökével ekvivalens számok halmazára, ahol az $F(x,y)$ kifejezések kvadratikus binér formák egy jól megválasztott $\mathcal{F}_m$ hamazát alkotják. Ha ezt megtettük, elmondhatjuk, hogy meghatároztuk a ν függvény $\frac{1}{3}$-nál nagyobb értékeit—a ν Markov-spektrumát—és leírtuk a hozzájuk tartozó ξ-ket, amelyekből összességében is csak megszámlálható sok van. Ezek után talán nem túlságosan meglepő, de mindenképpen fontos tény, hogy a ν az $\frac{1}{3}$ értéket kontinuum számosságú halmazon veszi fel.

Az, hogy végtelen sok racionális számot követelünk meg egy (1.1) típusú egyenlőtlenségben, természetes az approximációelmélet szemszögéből, ám vannak helyzetek, amikor éppen hogy csak egy közelítő törtre van szükségünk. Gondoljunk pl. olyan alkalmazásokra, amikor egy I intervallumon vett határozott integrált akarunk megbecsülni úgy, hogy racionális középpontú intervallumokkal fedjük le az I-t: ilyenkor használhatatlannak tűnik, ha a fedés végtelenszeres, bár az sem nyilvánvaló, hogy egy fedés másmilyen is lehet. Mindenesetre várható, hogy ha minden ξ-re csak egy közelítő törtet követelünk meg az (1.1) egyenlőtlenségben, akkor a jobb oldalon lévő 1 konstans kisebbel helyettesíthető, mint amikor végtelen sok törtet kívánunk. A ν függvény szerepét ilyenkor a

$$\chi(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf_{q>0} q\|q\xi\|$$

veszi át, és annak szeretnénk valamiféle spektrumát leírni. A χ a ν megfelelőjeként most már azt méri, milyen messze esik a ξ az összes racionális számtól, innen származik a dolgozat címe.

Egy másik alkalmazásként tekintsük a XXXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 6. feladatának a következő erősebb változatát: *adjuk meg valós számoknak egy olyan korlátos* (a_n) *sorozatát, amely tetszőleges különböző* i *és* j *indexek esetében kielégíti az* $|a_i - a_j| \geq |i-j|^{-1}$ *egyenlőtlenséget.* Könnyen látható, hogy az $\frac{1}{\chi(\xi)}\big(\|n\xi\|\big)$ sorozat minden rosszul approximálható ξ esetében megoldást ad a feladatra, és a sorozat átmérője, $\frac{1}{2\chi(\xi)}$ annál kisebb, minél nagyobb a $\chi(\xi)$.

A χ-nek tehát tagadhatatlanul van egyfajta természetes létjogosultsága, igazi nehézségét a ν-vel szemben az adja, hogy sokkal „érzékenyebben változik”, például egyáltalán nem invariáns az (1.2)-beli ekvivalenciára. Sőt, „kapásból” csak annyit tudunk mondani, hogy

$$\chi(\xi) = \chi(\Xi)$$

teljesül, ha

$$\xi - \Xi \ \text{ vagy } \ \xi + \Xi \ \text{ egész.} \tag{1.3}$$

Az (1.3) reláció fennálltakor a ξ és a Ξ számokat *erősen ekvivalenseknek* fogjuk nevezni, később látni fogjuk, hogy a mi szempontunkból fontos számokon ez az a legfinomabb osztályozás, amelyre a χ még invariáns. Az osztályozás „nagyon nem sűrű” a valós számok topológiájában: minden véges intervallum csak véges sok pontot tartalmaz egy-egy ekvivalencia-osztályból, pontosabban szólva két szomszédos egész szám között minden irracionális szám osztályából pontosan két elem található. Ha most minden ξ-hez egyetlen racionális számot követelünk meg az (1.1) becslés egy olyan javított változatában, amelyben a jobb oldalon lévő 1 konstanst valamilyen kisebb α-val helyettesítjük, és a becslésre—ha fennáll—úgy nézünk, mint a

$[0,1]$ zárt intervallum egy nyílt intervallumokból álló fedésére, akkor a $[0,1]$ kompaktsága mutatja, hogy a szóba jövő α-k között nincsen legkisebb. Érdemesebb ezért

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\alpha}{q^2} \tag{1.4}$$

alalú egyenlőtlenségeket megkövetelni, reményünk van arra, hogy ezek között már találunk legjobbat. Igazából a legtöbb, amit várhatunk, az, hogy a ν függvényre tett megállapításokkal teljesen analóg állítások igazak a χ-re; nevezetesen hogy van egy legjobb α az (1.4) becslésben, ami a χ-nek maximuma, ez pontos az (1.3)-ban definiált ekvivalencia-reláció egy osztályán, a fennmaradó ξ-kre megint van egy legjobb (1.4) alakú becslés, ami a χ második legnagyobb értékét szolgáltatja és megint a lehető legjobb egy (1.3)-beli osztályon, és így tovább; a fellépő konstansok és ekvivalencia-osztályok a Markov-számokkal és az azokhoz tartozó kvadratikus gyökökkel vannak kapcsolatban; a konstansok talán az $\frac{1}{3}$-hoz tartanak, mint a ν esetében, vagyis leírhatjuk a χ értékkészletét az $\frac{1}{3}$ érték felett, meghatározhatjuk az ilyen értékek összességében megszámlálható ősképét, és talán az is kiderül, hogy ismét kontinuum sok ξ-re adódik $\chi(\xi) = \frac{1}{3}$. Ezt fogjuk bizonyítani, pontosabban megmutatjuk, hogy a χ Markov-spektruma a $\frac{2}{3+\sqrt{9-4m^{-2}}}$ alakú diszkrét pontokból áll, továbbá $\chi(\xi) > \frac{1}{3}$ esetén a megfelelő m Markov-szám az egyetlen olyan q pozitív egész, amelyre $\chi(\xi) = q\|q\xi\|$ teljesül. Mindenekelőtt azonban a teljesség kedvéért összefoglaljuk a lánctörtek és a Markov-formák elméletéből a szükséges eszközöket. A lánctörteket több könyv részletesen tárgyalja, ezen dolgozathoz különösen a [2, Chapter VII] és [5, Chapter II] munkákat ajánljuk; a Markov-formák rövid, de lényegre törő bevezetését találja az érdeklődő olvasó az [1, Chapter II] fejezetben.

2. Lánctörtek

A lánctörtek első megközelítésben a racionális számok általánosításának tekinthetők, amely különösen jó képet nyújt bizonyos approximációs tulajdonságokról. Az $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ *véges lánctörtet* mint $(n+1)$-változós folytonos valós függvényt definiálhatjuk rekurzívan az

$$[a_0] \stackrel{\mathrm{df}}{=} a_0, \qquad [a_0, a_1, \ldots, a_n] \stackrel{\mathrm{df}}{=} a_0 + [a_1, \ldots, a_n]^{-1} \ (n \geq 1)$$

képletekkel, ekkor az $[a_0, a_1, \ldots]$ *végtelen lánctörtet* az

$$[a_0, a_1, \ldots] \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim\, [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

pontonkénti határértékként értelmezzük, ahol az létezik és véges. Könnyen látható, hogy mind véges, mind végtelen lánctörtekre teljesül az

$$[a_0, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \ldots] = \big[a_0, \ldots, a_{m-1}, [a_m, a_{m+1}, \ldots]\big] \ (m \geq 0) \tag{2.1}$$

egyenlőség. Ha az a_i *lánctörtjegyek* konkrét valós számok, akkor *véges* vagy *végtelen lánctörtnek* fogjuk nevezni azokat a számokat is, amelyeket a megfelelő lánctört mint függvény rendel ezekhez a jegyekhez. A lánctörtek szigorúan növekvőek a páros indexű jegyeikben, szigorúan fogyóak a páratlan indexűekben.

Sokszor hasznos lehet számunkra, hogy a véges lánctörtek másképpen is értelmezhetők. Definiáljuk ehhez rekurzívan az $\langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle$ polinomokat a

$$\langle\rangle \overset{\text{df}}{=} 1, \quad \langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle \overset{\text{df}}{=} a_0\langle a_1, \dots, a_n\rangle + \langle a_2, \dots, a_n\rangle \ (n \geq 0)$$

képletekkel. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor teljesül az

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{\langle a_0, a_1, \dots a_n\rangle}{\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle} \tag{2.2}$$

egyenlőség minden olyan esetben, amikor a jobb oldal létezik. Röviden áttekintjük ezeknek a polinomoknak néhány fontos tulajdonságát. A definícióból rögtön adódik, hogy

$$\langle a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, 1\rangle \equiv \langle a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + 1\rangle, \tag{2.3}$$

és

$$\langle a_r, \dots, a_0, b_0, \dots b_s\rangle \equiv \langle a_r, \dots a_0\rangle\langle b_0, \dots, b_s\rangle + \langle a_r, \dots a_1\rangle\langle b_1, \dots, b_s\rangle.$$

Az utóbbiból kiindulva teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$\langle a_r, \dots, a_0\rangle \equiv \langle a_0, \dots, a_r\rangle. \tag{2.4}$$

A pozitív egész jegyekkel rendelkező lánctörteket *egyszerűeknek* hívjuk, ezek közvetlen rokonságban vannak a közönséges törtszámokkal, ezért az approximációs tulajdonságokat is jobban tükrözik, sok szempontból pedig szebben viselkednek az általános lánctörteknél. A véges egyszerű lánctörtek pl. megegyeznek a racionális számokkal, továbbá a pozitív egészeknek minden végtelen sorozata értelmes (konvergens) végtelen egyszerű lánctörtet állít elő. Ez utóbbi tulajdonság származtatható abból az egyszerű észrevételből, hogy ha két véges egyszerű lánctört megegyezik az első n jegyében, akkor eltérésük kisebb, mint 2^{2-n}. A végtelen egyszerű lánctörtek persze irracionális számok, fordítva, minden irracionális szám előáll végtelen egyszerű lánctörtként, mégpedig egyértelműen. Így a *lánctört kifejtés* természetes homeomorfizmust létesít az irracionális számok mint a valós számok altere és az $\mathbb{N}^\omega$ szorzattér között, ahol egy pillanatra $\mathbb{N}$-nel jelöltük a pozitív egészek halmazát a diszkrét topológiával ellátva. Ez a tény igen értékes pl. a valós függvénytan számára.

A definícióból adódóan minden $\xi = [a_0, a_1, \dots]$ végtelen egyszerű lánctört előáll az $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ racionális számok határértékeként. Ezeket a racionális számokat a végtelen lánctört *közelítő törtjeinek* nevezzük, amelyek egyik nagy előnye, hogy könnyen kifejezhetők a lánctörtjegyek segítségével, másik előnyük pedig az, hogy nevükhöz híven jó közelítést adnak a ξ irracionális számhoz, bizonyos értelemben a legjobbat. Már láttuk (2.2)-ben, hogy a

$$p_n \overset{\text{df}}{=} \langle a_0, \dots, a_n\rangle, \quad q_n \overset{\text{df}}{=} \langle a_1, \dots, a_n\rangle$$

jelölések mellett a közelítő törtek a $\frac{p_n}{q_n}$ alakba írhatók, amellyel valójában a tovább már nem egyszerűsíthető alakot nyertük, hiszen a (p_n) számláló- és a (q_n) nevezősorozat kielégíti a

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1} \tag{2.5}$$

összefüggést, amint az könnyűszerrel ellenőrizhető. A közelítő törtek mind eleget tesznek az (1.1) egyenlőtlenségnek; a páros indexűek szigorúan növekedve, a páratlan indexűek szigorúan csökkenve tartanak a ξ-hez. Egészen pontosan, fennáll az alábbi egyenlőség, ami a dolgozat alappillérét alkotja majd, ugyanúgy, mint Hurwitz eredeti problémájának vizsgálatában.

$$\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n^2(r_{n+1}+s_{n+1})},$$

ahol

$$r_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} [a_n, a_{n+1}, \dots] \quad \text{és} \quad s_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]. \tag{2.6}$$

Az egyenlőséget a tömörebb

$$q_n\|q_n\xi\| = (r_{n+1}+s_{n+1})^{-1} \tag{2.7}$$

alakba írva azonnal kapjuk, hogy

$$\min\bigl(q_{n-1}\|q_{n-1}\xi\|, q_n\|q_n\xi\|\bigr) < \frac{1}{2}, \tag{2.8}$$

ui. az

$$r_n = a_n + r_{n+1}^{-1} \quad \text{és} \quad s_{n+1}^{-1} = a_n + s_n$$

összefüggések miatt

$$\begin{aligned} 2\max(r_n+s_n, r_{n+1}+s_{n+1}) \geq & r_n+s_n+r_{n+1}+s_{n+1} = \\ & r_{n+1}^{-1}+r_{n+1}+s_{n+1}^{-1}+s_{n+1} > 2+2=4. \end{aligned}$$

A (2.8) egyenlőtlenség magában hordozza a

$$\chi(\xi) \leq \nu(\xi) \leq \frac{1}{2}$$

becslést. Ugyanakkor ismeretes, hogy

$$0 < q\|q\xi\| < \frac{1}{2} \implies q \in (q_n),$$

vagyis a Markov-spektrum felderítésekor elegendő csupán a közelítő törteket számba vennünk. A (2.7)-et is használva azt kapjuk, hogy

$$\nu(\xi) = \liminf\ (r_n+s_n)^{-1},$$

$$\chi(\xi) = \inf_{n>0}\ (r_n+s_n)^{-1}. \tag{2.9}$$

Ha két irracionális számot ekvivalensnek nevezünk, amennyiben lánctörtjegyeik az első néhány-néhány véges számú jegytől eltekintve megegyeznek, akkor az így kapott ekvivalencia-reláció az irracionális számokon megegyezik a Bevezetésben definiált (1.2)-vel (míg a racionális számok egy osztályt alkotnak az utóbbi relációnál). A fenti jelölésekkel ennek a relációnak fontos speciális esetét alkotják a

$$\xi = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} \quad (n \geq 1) \tag{2.10}$$

egyenlőségek (vö. (2.5)), amelyek természetes módon kiterjeszthetők az $n = -1, 0$ esetekre a

$$\begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definícióval. A χ-hez készített (1.3) reláció is jól áttekinthető az irracionális számokon a lánctörtjegyek segítségével. Az egyszerűség kedvéért hagyatkozzunk a $[0, 1)$ intervallum pontjaira; minden pont erősen ekvivalens egy ilyennel, nevezetesen a törtrészével, ami a lánctört alakból az első jegy 0-ra váltásával kapható. A $[0, 1)$ intervallumon belül az erős ekvivalencia párokba rendezi a pontokat, egy-egy párt az intervallum felezőpontjára, az $\frac{1}{2}$-re tükrös pontok alkotnak. Tekintsünk most egy irracionális számokból álló $\{\xi, \Xi\}$ párt, amelyben pl. Ξ a nagyobbik. Ekkor $\Xi > \frac{1}{2}$ miatt Ξ egyszerű lánctört alakja $\Xi = [0, 1, a, \dots]$, amit (2.1) felhasználásával a

$$\Xi = [0, 1, a, \eta]$$

alakba írhatunk, ahol η egyszerű lánctört. Innen

$$\xi = 1 - \Xi = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a+\eta}} = 1 - \frac{a + \eta}{1 + a + \eta} = \frac{1}{1 + a + \eta} = [0, 1 + a, \eta],$$

ami megadja a ξ egyszerű lánctört alakját megint a (2.1) felhasználásával. Ezek szerint az irracionális párok (2.1) szerinti lánctört alakban megadva

$$\Big\{\big\{[0, 1 + a, \eta], [0, 1, a, \eta]\big\} \,\big|\, a \in \mathbb{N}\,;\, \eta > 0\Big\}. \tag{2.11}$$

3. Markov-formák

A klasszikus Markov-láncnál fellépő m számok és kvadratikus binér formák az

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1 m_2 m_3 \tag{3.1}$$

diofantikus egyenlettel hozhatók kapcsolatba. Ezt kívánjuk leírni a továbbiakban. Az egyenletnek minden nemtriviális (nem csupa 0) egész megoldását az előjelek alkalmas változtatásával pozitív egész megoldássá alakíthatjuk, ezért csak ilyenekkel foglalkozunk. Két megoldást azonosnak fogunk tekinteni, ha csak a három komponens sorrendjében különbözik.

Induljunk ki egy tetszőleges (m_1, m_2, m_3) megoldásból, amelynek a komponensei mind különbözőek, mondjuk, $m_1 < m_2 < m_3$. Az ilyen megoldásokat *nemszinguláris*oknak fogjuk nevezni. Ha pl. m_1-et és m_2-t rögzítjük, akkor a fennmaradó m_3 gyöke lesz a

$$\Phi(x) = m_1^2 + m_2^2 + x^2 - 3m_1 m_2 x$$

másodfokú polinomnak. A polinom másik, m_3' gyöke is pozitív egész, hiszen kielégíti az

$$m_3 + m_3' = 3m_1 m_2, \quad m_3 m_3' = m_1^2 + m_2^2$$

összefüggéseket. Így (m_1, m_2, m_3') is megoldása (3.1)-nek, amit az eredeti megoldásból az előző két formula bármelyikével értelmezhetünk.

$$(m_2 - m_3)(m_2 - m_3') = \Phi(m_2) = m_1^2 + 2m_2^2 - 3m_1m_2^2 < 0$$

mutatja, hogy $m_3' < m_2$, más szóval

$$\max(m_1, m_2, m_3') < \max(m_1, m_2, m_3).$$

Hasonlóan, az m_2-t és az m_3-at, ill. az m_1-et és az m_3-at rögzítve jutunk el az (m_1', m_2, m_3), ill. az (m_1, m_2', m_3) megoldáshoz, ahol

$$m_1 + m_1' = 3m_2m_3, \quad m_1m_1' = m_2^2 + m_3^2,$$

$$m_2 + m_2' = 3m_1m_3, \quad m_2m_2' = m_1^2 + m_3^2,$$

és ellenőrizhető, hogy

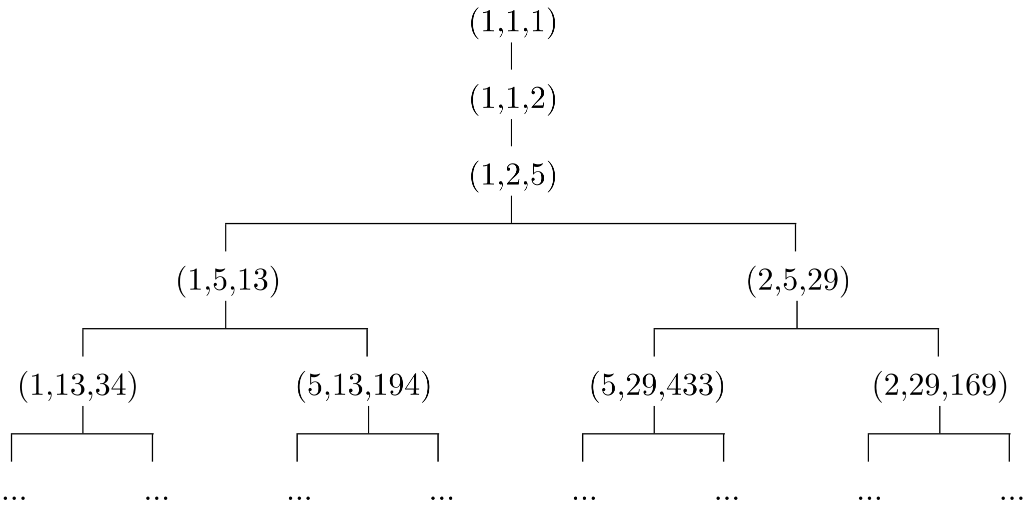
$$\max(m_1, m_2, m_3) < \max(m_1, m_2', m_3) < \max(m_1', m_2, m_3).$$

Ezek szerint minden nemszinguláris megoldás további háromra vezet, amelyeket az eredeti megoldás *szomszédainak* nevezünk. Két szomszéd nagyobb maximummal, a harmadik pedig kisebbel rendelkezik, mint az eredeti megoldás (l. az 1. ábrát).

$$\begin{tikzcd} & (m_1, m_2, m_3') \arrow[d, dash] & \\ & (m_1, m_2, m_3) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (m_1', m_2, m_3) & & (m_1, m_2', m_3) \end{tikzcd}$$

1. ábra. Egy nemszinguláris megoldás három szomszédja.

Induljunk ki most egy tetszőleges nemszinguláris megoldásból, és térjünk át a kisebb a maximummal rendelkező szomszédjára. Ha ez is nemszinguláris, ismételjük meg vele ezt a lépést, majd, ha lehet, az újonnan kapottal is, stb. Folytassuk ezt az eljárást mindaddig, ameddig csak tudjuk. Mivel a fellépő maximumok a pozitív egészek közül kerülnek ki, ezért véges sok lépésen belül szükségképpen meg kell állnunk, vagyis el kell jutnunk egy olyan ún. *szinguláris* (m_1, m_2, m_3) megoldáshármashoz, amelynek legfeljebb két különböző eleme van. Könnyű számolással ellenőrizhető, hogy a (3.1)-nek összesen csak két szinguláris megoldása van, nevezetesen az (1,1,1) és annak egyetlen szomszédja, az (1,1,2). A 'szomszédság' persze szimmetrikus reláció, vagyis az is igaz az előbbi gondolatmenet megfordításával, hogy a (3.1) minden megoldása megkapható az (1,1,1)-ből szomszédos megoldásokra való elegendő számú áttéréssel, és ez az előállítás egyértelmű is, ha kikötjük, hogy útunk során sohasem lépünk vissza arra a megoldásra, ahonnan jöttünk. Ezért a megoldásokat egy fa csúcsaiként ábrázolhatjuk, ahol az élek pontosan a szomszédos megoldásokat kötik össze; a fa legtetejére az (1,1,1) megoldást helyezzük, alá az egyetlen szomszédot, az (1,1,2)-t, majd ettől kezdve már csupa nemszinguláris megoldás következik, amelyek mindegyikéhez tartozik egy, az 1. ábrához hasonló láncszem. A teljes fát a (3.1) diofantikus egyenlet *Markov-láncának* hívjuk (l. a 2. ábrát).



2. ábra. Az $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3$ egyenlet Markov-lánca.

Érdemes egy pillanatra elidőznünk annál a kérdésnél, hogy a (3.1) egyenletben a 3 konstans mennyire esetleges, helyettesíthető-e pl. 7-tel, és akkor mik a megoldások. Ha a 3-at egy pozitív egész λ-val helyettesítjük, akkor az új egyenlet minden megoldása λ-val beszorozva a $\lambda = 1$ esetnek megfelelő

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M_1M_2M_3 \tag{3.2}$$

egy megoldását szolgáltatja. Fordítva, az utóbbi egyenlet minden olyan megoldása, amelyben a komponensek λ-val oszthatók, a λ-hoz tartozó módosított Markov-egyenlet megoldását szolgáltatja λ-val való osztás után. Tehát elég a $\lambda = 1$ esetet jól leírnunk, abból következik a válasz a kérdésünkre. Mármost a (3.2) egyenlet megoldásait kicsit több fáradsággal ugyan, de a (3.1)-éhez teljesen hasonló módon fába szerkeszthetjük, és kiderül, hogy a megoldások éppen azok, amelyek az eredeti (3.1)-ből származtathatók, tehát a $(3m_1, 3m_2, 3m_3)$ alakú hármasok. A Markov-láncban az egyes láncszemeken nyomon kísérhető, hogy minden megoldást egymáshoz relatív prím számok alkotnak, vagyis a vizsgált $(3m_1, 3m_2, 3m_3)$ alakú hármasok legnagyobb közös osztója 3. Azok tehát csak az eredeti Markov-egyenletből származhatnak (és persze a szóban forgó (3.2)-ből), hiszen semmilyen más λ nem osztója a 3-nak. Összeségében tehát csak a $\lambda = 1$ eset szolgáltat megoldást az eredeti $\lambda = 3$-on kívül, és az sem újat, hiszen azok az eredeti Markov-hármasok 3-szorosai. Ilyen értelemben a (3.1) Markov-egyenletben a 3 konstansnak bizony kitüntetett szerepe van.

Most a (3.1) minden (m_1, m_2, m_3) megoldásához definiálunk egy $F(x, y)$ kvadratikus binér formát a következőképpen. Tegyük fel, hogy

$$m = m_3 = \max(m_1, m_2, m_3),$$

és induljunk ki az

$$\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \equiv 0 \pmod{m}$$

kongruenciából, ahol az osztást természetesen a $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ csoportban értjük. A bal oldalon a tagok egymás reciprokai és egymás ellentettjei is a maradékosztályok gyűrűjében, tehát mindkettő négyzete -1 modulo m, és valamelyiküknek van egy (egyértelmű) k reprezentánsa a $\left[0, \frac{m}{2}\right]$ intervallumban. Ezzel tehát meghatároztunk egy olyan k-t, amelyre

$$0 \leq 2k \leq m, \tag{3.3}$$

$$k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}. \tag{3.4}$$

Ennek segítségével definiáljuk az $F \in \mathbb{Q}[x, y]$ kvadratikus formát az

$$F(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \left(x + \frac{3m - 2k}{2m} y\right)^2 - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}\right) y^2 \tag{3.5}$$

egyenlőséggel. Az adott m Markov-szám esetében fellépő $F(x, y)$ formák halmaza legyen $\mathcal{F}_m$: régóta megoldatlan probléma, hogy ennek csak 1 eleme lehet-e (amikoris F_m jelölhetné az egyetlen elemet, nevezetesen az előbb definiált F-et). Az összes $\mathcal{F}_m$ halmazok $\mathcal{F}$ egyesítése az ún. *Markov-formák.* A (3.5) definíció a

$$z = mx - ky \tag{3.6}$$

helyettesítés révén az

$$m^2 F(x, y) = G(y, z) = y^2 + 3myz + z^2 \tag{3.7}$$

szimmetrikus alakot ölti, ami sok esetben megkönnyíti az F Markov-formával való számolást. A későbbi hivatkozás kedvéért megjegyezzük, hogy

$$G(y, z) = G(z, y) = G(-z, y + 3mz) = G(z + 3my, -y). \tag{3.8}$$

Jelölje most $\delta(f)$ egy tetszőleges f kvadratikus binér forma diszkriminánsát, továbbá $\mu(f)$ az $|f(x, y)|$ értékek infimumát a $(0, 0)$-tól különböző egész számpárokon. Ekkor a (3.5)-beli definícióból azonnal adódik, hogy

$$\delta(F) = 9 - 4m^{-2}, \tag{3.9}$$

és némi fáradsággal (3.7)-ből következtethetünk arra, hogy

$$\mu(F) \geq 1, \tag{3.10}$$

ami a Markov-formák egyik legfontosabb tulajdonsága. Igazság szerint itt egyenlőség áll, amint könnyen ellenőrizhető pl. (3.5)-ből, hogy

$$F(k, m) = F(k - 3m, m) = 1.$$

Az, hogy a Markov-formák jól alkalmazhatók a rosszul approximálható számok leírásában, lényegében két dolgon múlik. Az egyik az az általános észrevétel, hogy szoros kapcsolat fűzi egymáshoz az approximációs és a kvadratikus binér formákról szóló extremális kérdéseket. E kapcsolatból nekünk elegendő lesz az alábbi

Állítás. *Ha az $f \in \mathbb{Q}[x,y]$ irreducibilis kvadratikus forma $\mathbb{R}[x,y]$ fölött felbomlik mint*

$$f(x,y) = (x - \theta y)(x - \Theta y),$$

akkor

$$\nu(\theta) = \nu(\Theta) = \frac{\mu(f)}{\sqrt{\delta(f)}}. \quad \square$$

A másik összetevő a Markov-formák használhatóságában az a tény, hogy ezeknek a formáknak létezik belső jellemzése az összes valós kvadratikus formák között, nevezetesen

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x,y) = x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \in \mathbb{R}[x,y] \;\middle|\; \begin{matrix} 2 \le \beta \le 3\,;\, 1 \le \mu(f)\,; \\ 0 < \delta(f) < 9 \end{matrix} \right\} \tag{3.11}$$

Jegyezzük meg, hogy már a (3.3), (3.5), (3.9), (3.10) összefüggések magukban hordozzák azt az információt, hogy a bal oldal része a jobb oldalnak.

4. A χ függvény Markov-lánca

Ebben a szakaszban megfogalmazzuk a dolgozat főeredményét és be is bizonyítjuk azt. A tétel előtt feltüntetjük a ν függvényre vonatkozó régóta ismert eredményt is, hogy az állítások közötti szoros analógia jól látszódjék. A megfogalmazáshoz célszerű bevezetni az

$$\mathcal{M}_m = \{x \mid F(x,1) = 0 \text{ valamilyen } F \in \mathcal{F}_m \text{ formára}\},$$
$$\mathcal{M} = \{x \mid F(x,1) = 0 \text{ valamilyen } F \in \mathcal{F} \text{ formára}\}$$

jelöléseket; az $\mathcal{M}$ halmazt nyilván értelmezhettük volna az $\mathcal{M}_m$ halmazok egyesítéseként is. Az (1.2)- és (1.3)-beli ekvivalenciafogalmakkal Markov eredeti tétele és a dolgozat főeredménye a következő.

1. Tétel (Perron [9]**, Heawood** [6]**, Shibata** [10]**).**

(1) *Ha $\nu(\xi) > \frac{1}{3}$, akkor ξ ekvivalens $\mathcal{M}$ egy elemével.*

(2) *Fordítva, ha ξ ekvivalens $\mathcal{M}_m$ egy elemével, akkor*

$$\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{9 - 4m^{-2}}} > \frac{1}{3},$$

és a $q\|q\xi\| < \nu(\xi)$ egyenlőtlenségnek végtelen sok pozitív egész megoldása van.

(3) *Kontinuum sok páronként nem ekvivalens ξ-re teljesül $\nu(\xi) = \frac{1}{3}$.* $\square$

2. Tétel.

(1) *Ha $\chi(\xi) > \frac{1}{3}$, akkor ξ erősen ekvivalens $\mathcal{M}$ egy elemével.*

(2) *Fordítva, ha ξ erősen ekvivalens $\mathcal{M}_m$ egy elemével, akkor*

$$\chi(\xi) = \frac{2}{3 + \sqrt{9 - 4m^{-2}}} > \frac{1}{3},$$

és a $q\|q\xi\| = \chi(\xi)$ egyenlet egyetlen pozitív egész megoldása $q = m$.

(3) *Kontinuum sok páronként nem ekvivalens ξ-re teljesül $\chi(\xi) = \frac{1}{3}$.*

Megkezdjük a 2. Tétel bizonyítását. A lánctörtekre vonatkozó elemi ismereteket külön hivatkozás nélkül fogjuk használni, ezek jórészét feltüntettük a 2. fejezetben. Sokszor azonosítani fogunk egy tetszőleges pozitív egészekből álló sorozatot a neki megfelelő egyszerű lánctörttel és valós számmal, ha ez az azonosítás nem okozhat félreértést. Ha $\mathbf{a} = (\dots, a)$ egy véges és $\mathbf{b} = (b, \dots)$ egy esetleg végtelen sorozat, akkor jelölje $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ az egybefűzött $(\dots, a, b, \dots)$ sorozatot. Tetszőleges véges

$$\mathbf{a}_i = (b_i, \dots, c_i) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

sorozatok egybefűzésén értsük az

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots) \overset{\mathrm{df}}{=} (b_0, \dots, c_0, b_1, \dots, c_1, \dots)$$

általában végtelen sorozatot. Ha $\mathbf{c}$ egy tetszőleges véges sorozat és l egy pozitív egész, akkor jelölje $\mathbf{c}_l$ azt a sorozatot, amely a $\mathbf{c}$-nek l-szeri egymásután írásával keletkezik, azaz

$$\mathbf{c}_l \overset{\mathrm{df}}{=} (\overset{1}{\breve{\mathbf{c}}}, \overset{2}{\breve{\mathbf{c}}}, \dots, \overset{l}{\breve{\mathbf{c}}}).$$

Ezt a definíciót kiterjeszthetjük az $l = \infty$ szimbólumra mint

$$\mathbf{c}_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} (\overset{1}{\breve{\mathbf{c}}}, \overset{2}{\breve{\mathbf{c}}}, \dots)\ ,$$

végül az $l = 0$ esetben legyen $\mathbf{c}_l$ az üres $()$ sorozat. Az egyelemű sorozatokat azonosíthatjuk egyetlen elemükkel, így pl. $(3, 2_5, 7, 6_\infty) = (3, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 6, 6, \dots)$.

(1) bizonyítása. Tekintsünk egyelőre csak egy olyan tetszőleges ξ-t, amelyre $\chi(\xi) \geq \frac{1}{3}$. Ekkor ξ irracionális, azaz egyértelműen írható az $[a_0, a_1, \dots]$ végtelen egyszerű lánctört alakba, továbbá a (2.6) és a (2.9) szerint $\chi(\xi) \geq \frac{1}{3}$ pontosan azt jelenti, hogy minden pozitív egész n esetén fennáll az

$$r_n + s_n = [a_n, a_{n+1}, \dots] + [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1] \leq 3 \tag{4.1a}$$

egyenlőtlenség. Ebből speciálisan $a_n < 3$ is következik, azaz $a_1, a_2, \dots$ mindegyike 1 vagy 2. Persze ξ erősen ekvivalens $\|\xi\|$-vel, vagyis feltehetjük a továbbiakban, hogy egyenlő is vele, amikoris a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumba esik, azaz $a_0 = 0$ és $a_1 \geq 2$. De akkor $a_1 = 2$, és

$$\begin{aligned} \xi &= [\,a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] \\ &= [\ \ 0,\ \ 2, a_2, a_3, \dots]. \end{aligned}$$

A (4.1a)-t felhasználva próbáljuk a ξ lánctört alakját felderíteni. A ξ párja, $\Xi = 1-\xi$ (2.11) szerint

$$\begin{aligned} \Xi &= [\,A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots] \\ &= [\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1, A_3, A_4, \dots] \\ &= [\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1, a_2,\ a_3, \dots], \end{aligned}$$

és minden pozitív egész n esetén fennáll rá az

$$R_n + S_n = [A_n, A_{n+1}, \dots] + [0, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_1] \leq 3 \tag{4.1b}$$

egyenlőtlenség, hiszen természetesen $\chi(\Xi) = \chi(\xi)$. A Ξ lánctört alakja sokszor könnyebben kezelhető, mint a ξ-é, ez indokolja a bevezetését. Valójában a ξ és a Ξ

párhuzamos vizsgálata a bizonyítás egyik legfontosabb eleme, amint az a későbbiekben ki fog derülni.

Kezdjük is el a Ξ lánctört alakjának felderítését. Első észrevételünk az, hogy sem az $(1,2,1)$, sem a $(2,1,2)$ részsorozat nem fordul elő az 1-esekből és 2-esekből álló (A_n)-ben. Ha ugyanis pl.

$$(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}) = (1,2,1),$$

akkor

$$R_n + S_n = [2,1,\dots] + [0,1,\dots] > [2,2] + [0,2] = 3,$$

ellentétben a (4.1b)-vel, ha pedig pl.

$$(A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) = (2,1,2),$$

akkor az előbbi eset vizsgálata alapján csakis $A_{n+1} = 2$ lehetséges, amikoris

$$R_n + S_n = [2,2,\dots] + [0,1,2,\dots] > [2,3] + [0,1,2] = 3,$$

megint csak ellentétben a (4.1b)-vel.

Második észrevételünk az, hogy az (A_n) sorozatban a 2-esekből álló maximális véges blokkok páros hosszúak. Tekintsünk ehhez egy tetszőleges ilyen (2_m) blokkot. Ezt legalább két 1-es követi, hiszen a $(2,1,2)$ nem fordul elő részsorozatként. Hasonlóan következik, megjegyezve még azt is, hogy az (A_n) sorozat kezdete $(0,1,1)$, hogy a szóban forgó (2_m) blokkot legalább két 1-es előzi meg. Ezek szerint az (A_n) egy része

$$(A_{i-m-2}, A_{i-m-1}, A_{i-m}, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}) = (1,1,2,\dots,2,1,1),$$

ahol természetesen $m \geq 2$, hiszen az $(1,2,1)$ sem fordul elő részsorozatként. Foglalkozzunk egyelőre csupán az

$$(A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}) = (2,2,1,1) \tag{4.2}$$

feltétellel. Ekkor a (4.1b) szerint

$$R_{i-1} + S_{i-1} = [2,1,1,R_{i+2}] + [0,2,S_{i-2}^{-1}] < 3,$$

majd a (2.11)-et is felhasználva

$$[0,2,S_{i-2}^{-1}] < 1 - [0,1,1,R_{i+2}] = [0,2,R_{i+2}],$$

$$S_{i-2}^{-1} < R_{i+2}.$$

Ismét a (4.1b) miatt

$$R_{i+2} + S_{i+2} = R_{i+2} + [0,1,1,2,2,S_{i-2}^{-1}] < 3,$$

majd a (2.11) segítségével

$$R_{i+2} < 2 + 1 - [0,1,1,2,2,S_{i-2}^{-1}] = [2_4, S_{i-2}^{-1}].$$

Harmadszor is alkalmazva a (4.1b)-t, majd utána a (2.11)-et,

$$R_{i-2}+S_{i-2}=[2,2,1,1,R_{i+2}]+S_{i-2}<3,$$

$$S_{i-2}<1-[0,2,1,1,R_{i+2}]=[0,1_4,R_{i+2}],$$

$$[1_4,R_{i+2}]<S_{i-2}^{-1}.$$

Ezek szerint a (4.2) feltételből következik az

$$[1_4,R_{i+2}]<S_{i-2}^{-1}<R_{i+2}<[2_4,S_{i-2}^{-1}] \tag{4.3}$$

egyenlőtlenséglánc. Az első és a harmadik tag egyenlőtlenségét iterálva

$$\cdots<[1_{12},R_{i+2}]<[1_8,R_{i+2}]<[1_4,R_{i+2}]<R_{i+2},$$

amiből határátmenettel

$$[1_\infty]<R_{i+2} \tag{4.4}$$

adódik; a (4.3) második és negyedik tagjának egyenlőtlenségét iterálva

$$S_{i-2}^{-1}<[2_4,S_{i-2}^{-1}]<[2_8,S_{i-2}^{-1}]<[2_{12},S_{i-2}^{-1}]<\dots,$$

amiből határátmenettel

$$S_{i-2}^{-1}<[2_\infty]$$

következik. A mi esetünkben

$$S_{i-2}^{-1}=[2_{m-2},1,1,\dots],$$

ami az előző egyenlőtlenséggel együtt csak úgy teljesülhet, ha $m-2$ páros, vagyis ha m is az.

Harmadikként azt vesszük észre, hogy az (A_n) sorozatban (1_∞) csak úgy fordulhat elő, ha $(A_n)=(0,1_\infty)$. Tegyük fel ui., hogy a sorozatban

$$(A_{i-1},A_i,\dots)=(2,1_\infty).$$

Ekkor, mivel $(1,2,1)$ nem fordul elő az (A_n)-ben, továbbá az utóbbi sorozat kezdete $(0,1)$, szükségképpen teljesül most is a (4.2) feltétel az i-re, amiből kifolyólag a (4.4) következmény is fennáll. Ámde az indirekt feltevés ennek ellentmond: $R_{i+2}=[1_\infty]$, ami pedig igazolja az állításunkat.

Ha $(A_n)=(0,1_\infty)$, akkor

$$\Xi=[0,1_\infty]=\frac{\sqrt5-1}{2}$$

erősen ekvivalens a $\frac{\sqrt5-3}{2}\in\mathcal{M}$ számmal, ami az

$$F(x,y)=x^2+3xy+y^2\in\mathcal{F}_1$$

Markov-formából származik. A továbbiakban ezért feltehetjük, hogy az (A_n) sorozat különbözik a $(0, 1_\infty)$-től, amikoris az előző megállapításunk szerint csak véges, 1-esekből álló blokkok fordulnak elő benne. Negyedik észrevételünk az, hogy egy maximális ilyen (1_m) blokk csak páros hosszú lehet. A blokkot az (A_n) sorozatban vagy a 0, vagy egy 2-es jegy előzi meg, és a fent már gyakorta alkalmazott érveléssel következik, hogy $m \geq 2$, továbbá (A_n) egy része

$$(A_{j-m}, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}) = (1, \dots, 1, 2, 2).$$

Mindenesetre teljesül az

$$(A_{j-2}, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}) = (1, 1, 2, 2) \tag{4.5}$$

feltétel, amit a (4.2) párjának fogunk tekinteni. A (4.1b)-t és a (2.11)-et a szokásos módon alkalmazva kapjuk, hogy

$$R_j + S_j = [2, 2, R_{j+2}] + [0, 1, 1, S_{j-2}^{-1}] < 3,$$

$$[0, 1, 1, S_{j-2}^{-1}] < 1 - [0, 2, R_{j+2}] = [0, 1, 1, R_{j+2}],$$

$$R_{j+2} < S_{j-2}^{-1}.$$

Másodszor is használva a (4.1b)-t és a (2.11)-et,

$$R_{j+1} + S_{j+1} = [2, R_{j+2}] + [0, 2, 1, 1, S_{j-2}^{-1}] < 3,$$

$$[2, R_{j+2}] < 2 + 1 - [0, 2, 1, 1, S_{j-2}^{-1}] = [2, 1_4, S_{j-2}^{-1}],$$

$$[1_4, S_{j-2}^{-1}] < [R_{j+2}].$$

Ezek szerint a (4.5) feltételből következik az

$$[1_4, S_{j-2}^{-1}] < [R_{j+2}] < S_{j-2}^{-1} \tag{4.6}$$

egyenlőtlenséglánc, amelynek két szélső felét iterálva, majd határátmenettel

$$[1_\infty] < S_{j-2}^{-1}$$

adódik. A mi esetünkben

$$S_{j-2}^{-1} = [1_{m-2}, \dots],$$

ahol az (1_{m-2}) blokkot közvetlenül követő jegy, ha létezik, 2, ami az előző egyenlőtlenséggel együtt csak úgy teljesülhet, ha $m - 2$ páros, vagyis ha m is az.

Eddigi észrevételeinket, tehát hogy az (A_n) sorozatban az 1-esekből álló maximális blokkok páros hosszúak, és a 2-esekből álló maximális véges blokkok ugyancsak páros hosszúak, úgy összegezhetjük, hogy Ξ mint lánctört

$$\Xi = [0, 1_{2B_0}, 2_2, 1_{2B_1}, 2_2, \dots] \tag{4.7b}$$

alakú, ahol a (B_n) sorozat nemnegatív egészekből áll és persze $B_0 \geq 1$. Ennek az eredménynek az átfogalmazása az eredeti ξ-re a (2.11) szerint a

$$\xi = [0, 2, 1_{2b_0}, 2_2, 1_{2b_1}, 2_2, \dots] \tag{4.7a}$$

egyenlőség, ahol a (b_n) sorozat is nemnegatív egészekből áll, pontosabban

$$(b_0, b_1, b_2, \dots) = (B_0 - 1, B_1, B_2, \dots). \tag{4.8}$$

Most megmutatjuk, hogy bármely két szomszédos B_i legfeljebb 1-gyel térhet el egymástól. Tegyük fel ui., hogy az (A_n) sorozatban

$$(A_{i-2-l}, \dots, A_{i-3}, A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{i+m-1}, A_{i+m}) = (1_l, 2, 2, 1_m, 2),$$

ahol l és m nemnegatív páros egészek, továbbá az (1_l) blokkot vagy a 0, vagy egy 2-es jegy előzi meg. Azt kell igazolnunk, hogy $|l - m| \leq 2$. Ha $m > 0$, akkor természetesen $m \geq 2$, tehát az i-re teljesül a (4.2) feltétel, vagyis annak következménye, a (4.3) is. A mi esetünkben az

$$[1_4, R_{i+2}] < S_{i-2}^{-1} < R_{i+2}$$

egyenlőtlenség az

$$[1_{m+2}, 2, \dots] < [1_l, \dots] < [1_{m-2}, 2, \dots]$$

alakot ölti, ahol az (1_l) blokkot közvetlenül követő jegy, ha létezik, 2. Ebből pedig már világos, hogy mind az $m + 2 < l$, mind az $l < m - 2$ feltevés ellentmondásra vezet, tehát valóban $|l - m| \leq 2$. Ha pedig $m = 0$ és feltesszük, hogy $l \geq 4$, akkor a $j = i - 2$ jelöléssel az (A_n) sorozatban

$$(A_{j-4}, \dots, A_{j+3}) = (1_4, 2_4),$$

vagyis a j-re teljesül a (4.5) feltétel, ezért annak következménye, a (4.6) is, és így

$$[2, 2, \dots] = R_{j+2} < S_{j-2}^{-1} = [1, 1, \dots],$$

ami nyilvánvaló ellentmondás. Ezzel tehát igazoltuk, hogy bármely két szomszédos B_i különbsége legfeljebb 1. Természetesen ugyanez a bizonyítás szóról szóra elmondható lenne a (b_n) sorozatra is, azaz ebben is legfeljebb 1-gyel tér el bármely két szomszédos elem, amely csak annyi többletet ad a (B_n) sorozatra vonatkozó állításhoz képest, hogy $b_0 - b_1 \geq -1$, azaz $B_0 - B_1 \geq 0$ a (4.8) miatt. Hasonlóan, a $B_0 - B_1 \leq 1$ egyenlőtlenségből következtethetünk arra, hogy $b_0 - b_1 \leq 0$, összességében tehát $b_0 - b_1 = 0, -1$ és $B_0 - B_1 = 0, 1$. Az alábbiakban kiderül, hogy ennél sokkal többet mondhatunk.

Most pedig megkezdjük a (B_n) és a (b_n) sorozat többé-kevésbé párhuzamos és beható vizsgálatát. Tegyük fel először, hogy

$$B_k - B_{k+1} = -1.$$

Legyen az (A_n) sorozatban A_i az $(1_{2B_{k+1}})$ blokk első eleme, ekkor i-re teljesül a (4.2) feltétel és annak folyománya, (4.3) is. Speciálisan,

$$S_{i-2}^{-1} < R_{i+2},$$

ahol jelen esetben $2B_{k+1} - 2 = 2B_k$ miatt

$$R_{i+2} = [1_{2B_k}, 2_2, 1_{2B_{k+2}}, 2_2, 1_{2B_{k+3}}, 2_2, \dots]$$

és

$$S_{i-2}^{-1} = [1_{2B_k}, 2_2, 1_{2B_{k-1}}, 2_2, 1_{2B_{k-2}}, 2_2, \dots].$$

A három összefüggésből következik, hogy mindenképpen van olyan h pozitív egész, amelyre a $B_{k+h+1} - B_{k-h}$ különbség nem nulla, és ha a h-t a lehető legkisebbnek választjuk, akkor ez a nemnulla különbség csakis negatív lehet.

Tegyük fel most, hogy

$$B_k - B_{k+1} = 1.$$

Ekkor hasonló érveléssel, csak most a (4.5) és a (4.6) formulákat használva látható, hogy ha h_0 olyan pozitív egész, hogy a $B_{k+h+1} - B_{k-h}$ különbség minden $0 < h < h_0$ mellett nulla, ellenben $h = h_0$ esetén már nem az, akkor akkor ez a nemnulla különbség csakis pozitív lehet. A könnyebb hivatkozás végett foglaljuk egy definícióba a (B_n) sorozatra vonatkozó megállapításainkat.

Definíció. A nemnegatív egészekből álló (B_n) sorozatot *II-sorozatnak* nevezzük, ha benne bármely két szomszédos tag különbsége legfeljebb 1, $B_0 \geq 1$, $B_k - B_{k+1} = 1$ esetén a $B_{k+h+1} - B_{k-h}$ $(1 \leq h \leq k)$ különbségek közül az első nemnulla—ha létezik—pozitív, továbbá $B_k - B_{k+1} = -1$ esetén a $B_{k+h+1} - B_{k-h}$ $(1 \leq h \leq k)$ különbségek nem mind nullák és az első nemnulla közülük negatív.

Eddigi eredményeinket lényegében úgy foglalhatjuk össze, hogy ha az $\frac{1}{2} < \Xi < 1$ számra $\chi(\Xi) \geq \frac{1}{3}$ teljesül, akkor Ξ a (4.7b) alakba írható valamilyen (B_n) II-sorozattal. Fontos észrevétel, hogy ennek az állításnak a megfordítása is igaz, tehát hogy a (4.7b) lánctört minden (B_n) II-sorozat esetében olyan $\frac{1}{2} < \Xi < 1$ számot határoz meg, amelyre $\chi(\Xi) \geq \frac{1}{3}$ teljesül, azaz minden pozitív egész n-re fennáll a (4.2b) egyenlőtlenség. Ennek igazolására tekintsünk egy (B_n) II-sorozatot, az általa (4.7b) szerint meghatározott Ξ-t, és egy tetszőleges pozitív egész n-et. Az eddigi jelöléseinket megtartva (4.2b) nyilvánvaló, ha $A_n = 1$, hiszen ilyenkor

$$R_n + S_n = [1, \dots] + [0, \dots] < 2 + 1 = 3,$$

és akkor is, ha $(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}) = (2, 2, 2)$, hiszen olyankor

$$R_n + S_n = [2, 2, \dots] + [0, 2, \dots] < [2, 2] + [0, 2] = 3.$$

A fennmaradó esetekben $(A_n, A_{n+1}) = (2, 1)$ vagy pedig $(A_{n-1}, A_n) = (1, 2)$. Ha $(A_n, A_{n+1}) = (2, 1)$, akkor természetesen $(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}) = (2, 2, 1, 1)$, hiszen a Ξ lánctörtjegyei párosával fordulnak elő. Az $i = n + 1$ indexre tehát teljesül a (4.2) feltétel, amikoris láttuk, hogy a bizonyítandó (4.2b) egyenlőtlenség az

$$S_{i-2}^{-1} < R_{i+2}$$

becsléssel egyenértékű. Legyen az (A_n)-ben az A_i-vel kezdődő, 1-esekből álló blokk az $(1_{2B_{k+1}})$. Ha $B_k - B_{k+1} \leq 0$, akkor az átfogalmazott becslés nyilvánvaló, ha pedig $B_k - B_{k+1} = 1$, akkor következik a II-sorozat definíciójából a fenti (megfordítható) gondolatmenet felhasználásával. Hasonlóan, ha $(A_{n-1}, A_n) = (1, 2)$, akkor $(A_{n-2}, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}) = (1, 1, 2, 2)$, azaz a $j = n$ indexre teljesül a (4.5) feltétel, amikoris a bizonyítandó (4.2b) egyenlőtlenség az

$$R_{j+2} < S_{j-2}^{-1}$$

becsléssel egyenértékű. Legyen az (A_n)-ben az A_{j-1}-gyel kezdődő, 1-esekből álló blokk az (1_{2B_k}). Ha $B_k - B_{k+1} \geq 0$, akkor az átfogalmazott becslés nyilvánvaló, ha pedig $B_k - B_{k+1} = -1$, akkor—ugyanúgy, mint az előbb—következik a II-sorozat definíciójából. Ezzel megmutattuk, hogy ha (B_n) II-sorozat, akkor a (4.7b)-beli Ξ kielégíti a $\chi(\Xi) \geq \frac{1}{3}$ egyenlőtlenséget.

A (4.2a) egyenlőtlenség ugyanúgy átfogalmazható a (4.7a)-beli (b_n) sorozatra, mint ahogyan a (4.2b) átfogalmazható volt a (B_n)-re, és ismét egy új fogalmat vezethetünk be a szükséges és elégséges feltételek összefogása végett:

Definíció. A nemnegatív egészekből álló (b_n) sorozatot *I-sorozatnak* nevezzük, ha benne bármely két szomszédos tag különbsége legfeljebb 1, $b_k - b_{k+1} = -1$ esetén a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ $(1 \leq h \leq k)$ különbségek közül az első nemnulla—ha létezik—negatív, továbbá $b_k - b_{k+1} = 1$ esetén a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ $(1 \leq h \leq k)$ különbségek nem mind nullák és az első nemnulla közülük pozitív.

Definíció. Ha (b_n) egy I-sorozat, akkor nevezzük a (4.8) által meghatározott (B_n) sorozatot a (b_n) *II-párjának.* Hasonlóan, ha (B_n) egy II-sorozat, akkor nevezzük a (4.8) szerinti (b_n) sorozatot a (B_n) *I-párjának.* Ha ez nem okoz félreértést, akkor az I-, illetve a II-párt hívhatjuk egyszerűen csak *párnak.*

Ezekkel a fogalmakkal láttuk, hogy igaz a következő, minden eddigi eredményünket összefoglaló

1. Állítás.

(1) *Egy* $0 < \xi < \frac{1}{2}$ *számra akkor és csak akkor teljesül a* $\chi(\xi) \geq \frac{1}{3}$ *egyenlőtlenség, ha vagy* $\xi = [0, 2, 1_\infty] = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$*, vagy pedig megadható a (4.7a) lánctört alakban valamilyen* (b_n) *I-sorozattal.*

(2) *Egy* $\frac{1}{2} < \Xi < 1$ *számra akkor és csak akkor teljesül a* $\chi(\Xi) \geq \frac{1}{3}$ *egyenlőtlenség, ha vagy* $\Xi = [0, 1_\infty] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$*, vagy pedig megadható a (4.7b) lánctört alakban valamilyen* (B_n) *II-sorozattal.*

(3) *Ha* $0 < \xi < \frac{1}{2}$ *és* $\frac{1}{2} < \Xi < 1$ *párjai egymásnak, azaz* $\xi + \Xi = 1$*, akkor a nekik megfelelő sorozatok egyszerre léteznek vagy nem léteznek, és ha léteznek, akkor azok is párjai egymásnak, azaz* (b_n) *I-párja* (B_n)*-nek, illetve* (B_n) *II-párja* (b_n)*-nek.* $\square$

Az alábbi következmény, amely alapvető fontosságú számunkra, most már teljesen világos, bár közvetlenül is ellenőrizhető lenne:

1. Következmény.

(1) *Az I-sorozatok II-párjai II-sorozatok.*

(2) *A II-sorozatok I-párjai I-sorozatok.* $\square$

Vegyünk most közelebbről szemügyre egy I-sorozatot, pl. a (b_n)-et. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a sorozat bármely két eleme legfeljebb 1-gyel térhet el egymástól. Mivel a szomszédos elemekre a definíció szerint teljesül ez a feltétel, és bármely elemből bármely másik elérhető szomszédosokon való lépdeléssel, ezért elegendő megmutatnunk, hogy nincs olyan két elem a sorozatban, amelyek különbsége pontosan 2. Tegyük fel, hogy van két ilyen b és $b-2$ elem a sorozatban, és válasszuk meg őket úgy, hogy a távolságuk a lehető legkisebb legyen, ekkor a köztük levő elemek mind $(b-1)$-gyel egyenlők. A (b_n) sorozat szóban forgó b eleme legyen

b_k, és tekintsük először azt az esetet, amikor a szóban forgó $b-2$ elem a b_k-tól jobbra helyezkedik el. Ekkor a sorozat egy része

$$(b_k, \ldots, b_{k+s+1}) = \big(b, (b-1)_s, b-2\big),$$

ahol s valamilyen pozitív egész. Mivel $b_k - b_{k+1} = 1$, ezért a definíció folytán egyrészt $k \geq 1$, másrészt a $h = 1$ választással

$$b_{k+2} - b_{k-1} = b_{k+h+1} - b_{k-h} \geq 0,$$

azaz

$$b_{k-1} \leq b_{k+2} \leq b-1,$$

és így $b_{k-1} = b-1$. Legyen t a (b_n) sorozatban a b_k-t megelőző, $(b-1)$-ekből álló maximális blokk mérete. Ekkor mindenesetre $1 \leq t \leq k$, és a sorozat egy része

$$(b_{k-t}, \ldots, b_k, \ldots, b_{k+s+1}) = \big((b-1)_t, b, (b-1)_s, b-2\big).$$

Ha $t \geq s$ lenne, akkor a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ különbségek mind nullák lennének $0 < h < s$ mellett, de -1 lenne $h = s$ esetén. Ez nyilván ellentmondana a $b_k - b_{k+1} = 1$ feltételnek, vagyis $t < s$. A különbségek ekkor mind nullák $1 \leq h \leq t$ mellett, tehát $t < k$ is következik, hiszen tudjuk, $1 \leq h \leq k$ mellett már nem lehet minden különbség nulla. Ezek szerint a $\big((b-1)_t\big)$ blokkot a (b_n) sorozatban megelőzi egy b_{k-t-1} tag, amelynek értéke a t meghatározása folytán b vagy $b-2$. Mivel a $b_k - b_{k+1} = 1$ és a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ különbségek mind nullák $1 \leq h \leq t$ mellett, ezért nemnegatív kell, hogy legyen $h = t+1$ esetén, azaz

$$b_{k-t-1} \leq b_{k+t+2} \leq b-1$$

(a második becslésben felhasználtuk, hogy $t+2 \leq s+1$). Tehát csakis $b_{k-t-1} = b-2$ lehetséges, amikoris a (b_n) sorozat egy része

$$(b_{k-t-1}, \ldots, b_k, \ldots, b_{k+s+1}) = \big(b-2, (b-1)_t, b, (b-1)_s, b-2\big).$$

Ez már egy szimmetrikus alak, amit ki is használunk. Induljunk ki ui. abból, hogy $b_{k-1} - b_k = -1$, ennek a ténynek ellentmond, hogy a $b_{k+h} - b_{k-h-1}$ különbségek mind nullák $0 < h < t$ mellett, de 1-gyel egyenlő $h = t$ esetén. Az ellentmondás a célul kitűzött állítást igazolja a vizsgált esetben. A másik eset vizsgálata, amikor a szóban forgó b és $b-2$ fordítva helyezkedik el egymáshoz képest, szinte azonos az előzőével, ezért azt nem részletezzük.

Ezek szerint a (b_n) sorozat korlátos, és ha b-vel jelöljük a maximumát, akkor b-n kívül csak $b-1$ fordulhat még elő benne. Most megmutatjuk, hogy a sorozat minimuma b_0. Ellenkező esetben ui. egy alkalmas k pozitív egésszel a sorozat egy része

$$(b_0, \ldots, b_{k-1}, b_k) = \big((b)_k, b-1\big),$$

de akkor $b_{k-1} - b_k = 1$ miatt valamilyen $0 < h < k$ mellett a $b_{k+h} - b_{k-h-1}$ különbség pozitív, ami ellentmond annak, hogy a fellépő b_{k-h-1} tagok mind b-vel, a sorozat maximumával egyeznek meg. Az ellentmondás igazolja az állításunkat.

Hasonlóan láthatjuk be, hogy a (b_n)-ben nem fordul elő a $\big((b-1)_\infty\big)$ részsorozat. Ellenkező esetben ui. egy alkalmas k egésszel a (b_n) sorozat egy része

$$(b_k, b_{k+1}, \dots) = \big(b, (b-1)_\infty\big),$$

de akkor $b_k - b_{k+1} = 1$ miatt valamilyen $1 \le h \le k$ mellett a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ különbség pozitív, ami ellentmond annak, hogy a fellépő b_{k+h+1} tagok mind $(b-1)$-gyel, a sorozat minimumával egyeznek meg. Az ellentmondás most is igazolja az állításunkat. Az előbbi két észrevétel alapján (b_n) vagy a (b_∞) sorozattal egyezik meg, vagy pedig a

$$(4.9a) \qquad (b_n) = \big((b-1)_{c_0}, b, (b-1)_{c_1}, b, \dots\big)$$

alakba írható valamilyen (c_n) nemnegatív egészekből álló sorozattal, amelyben $c_0 \ge 1$. Az utóbbi esetben próbáljuk meg átfogalmazni a (b_n) sorozatra vonatkozó feltételeket a (c_n)-re.

Ha $b_k - b_{k+1} = -1$, akkor $b_k = b-1$ és $b_{k+1} = b$, tehát b_k megegyezik valamelyik (4.9a)-beli $(b-1)_{c_l}$ blokk utolsó elemével, és b_{k+1} közvetlenül megelőzi a $(b-1)_{c_{l+1}}$ blokkot. Tekintsük most a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ $(1 \le h \le k)$ különbségeket. Az I-sorozat definíciója szerint az első ilyen nemnulla különbség—ha létezik—mindenképpen negatív, ami nyilvánvaló is akkor, ha $c_l \le c_{l+1}$. Ellenben ha $c_l > c_{l+1}$, akkor egyenértékű azzal, hogy $c_l - c_{l+1} = 1$, továbbá a $c_{l+i+1} - c_{l-i}$ $(1 \le i \le l)$ különbségek közül az első nemnulla—ha létezik—pozitív. Hasonlóan, ha $b_k - b_{k+1} = 1$, akkor $b_k = b$ és $b_{k+1} = b-1$, tehát b_{k+1} megegyezik valamelyik (4.9a)-beli $(b-1)_{c_{l+1}}$ blokk első elemével, és b_k közvetlenül követi a $(b-1)_{c_l}$ blokkot. Tekintsük most is a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ $(1 \le h \le k)$ különbségeket. Az I-sorozat definíciója szerint ezek a különbségek nem mind nullák és az első nemnulla közülük pozitív, ami nyilvánvaló is akkor, ha $c_l \ge c_{l+1}$. Ellenben ha $c_l < c_{l+1}$, akkor egyenértékű azzal, hogy $c_l - c_{l+1} = -1$, továbbá a $c_{l+i+1} - c_{l-i}$ $(1 \le i \le l)$ különbségek nem mind nullák és az első nemnulla közülük negatív. Tömören tehát úgy fogalmazhatunk, hogy a (4.9a) képlet pontosan akkor határoz meg egy, a (b_∞)-től különböző I-sorozatot, ha b egy pozitív egész és (c_n) egy II-sorozat. Természetesen (b_∞) minden nemnegatív egész b esetén I-sorozat, és csak ekkor az.

Tekintsünk most egy tetszőleges (B_n) II-sorozatot, és ennek I-párját, a (b_n) I-sorozatot (vö. 1. Következmény). Ha (b_n) alakja (b_∞), akkor $(B_n) = \big(B, (B-1)_\infty\big)$, ahol $B = b+1$. Ha (b_n)-et a (4.9a) képlet adja meg valamilyen (c_n) II-sorozattal, akkor (B_n) a

$$(4.9b) \qquad (B_n) = \big(B, (B-1)_{C_0}, B, (B-1)_{C_1}, B, \dots\big)$$

alakba írható $B = b$-vel és azzal a (C_n) sorozattal, amely a (c_n) I-párja (következésképp I-sorozat is az 1. Következmény szerint). Természetesen ez az érvelés meg is fordítható, azaz ha a (B_n) II-sorozat alakja $\big(B, (B-1)_\infty\big)$, akkor I-párja $(b_n) = (b_\infty)$, ahol $b = B-1$, továbbá ha (B_n)-et a (4.9b) képlet adja meg valamilyen (C_n) I-sorozattal, akkor a (B_n) I-párja a (4.9a) alakba írható a (C_n) II-párjának, (c_n)-nek a segítségével. Az 1. Következmény újbóli felhasználásával tehát a (4.9b) képlet pontosan akkor határoz meg egy, a $\big(B, (B-1)_\infty\big)$-től különböző II-sorozatot, ha B egy pozitív egész és (C_n) egy I-sorozat. Természetesen $\big(B, (B-1)_\infty\big)$ minden pozitív egész B esetén II-sorozat, és csak ekkor az. Mindezen állítások közvetlenül is igazolhatók lettek volna, ugyanúgy, mint a (b_n) sorozat esetében. Foglaljuk össze, mit is kaptunk.

2. Állítás.

(1) *Egy nemnegatív egészekből álló* (b_n) *sorozat pontosan akkor I-sorozat, ha vagy* (b_∞) *alakú valamilyen nemnegatív egész b-vel, vagy pedig megadható a (4.9a) alakban valamilyen* (c_n) *II-sorozattal, amelyet ilyenkor a sorozat deriváltjának hívunk.*

(2) *Egy nemnegatív egészekből álló* (B_n) *sorozat pontosan akkor II-sorozat, ha vagy* $\big(B,(B-1)_\infty\big)$ *alakú valamilyen pozitív egész B-vel, vagy pedig megadható a (4.9b) alakban valamilyen* (C_n) *I-sorozattal, amelyet ilyenkor a sorozat deriváltjának hívunk.*

(3) *Ha a* (b_n) *I-sorozat és a* (B_n) *II-sorozat párjai egymásnak, akkor deriváltjaik egyszerre léteznek vagy nem léteznek, és ha léteznek, akkor azok is párjai egymásnak, azaz* (c_n) *II-párja* (C_n)*-nek, illetve* (C_n) *I-párja* (c_n)*-nek.* $\square$

Ezek után érdemes némiképp átfogalmaznunk az 1. Állítást.

2. Következmény.

(1) *Egy* $0<\xi<\frac{1}{2}$ *számra akkor és csak akkor teljesül a* $\chi(\xi)\geq\frac{1}{3}$ *egyenlőtlenség, ha* $2+\xi$ *előáll az* $[\bar{a}_0,\bar{a}_0,\bar{a}_1,\bar{a}_1,\dots]$ *lánctört alakban, ahol* $(\bar{a}_n)$ *II-sorozat. Ha a sorozat deriváltja létezik, akkor az megegyezik a (4.7a)-beli* (b_n)*-nel.*

(2) *Egy* $\frac{1}{2}<\Xi<1$ *számra akkor és csak akkor teljesül a* $\chi(\Xi)\geq\frac{1}{3}$ *egyenlőtlenség, ha* $1/\Xi$ *előáll az* $[\bar{A}_0,\bar{A}_0,\bar{A}_1,\bar{A}_1,\dots]$ *lánctört alakban, ahol* $(\bar{A}_n)$ *I-sorozat. Ha a sorozat deriváltja létezik, akkor az megegyezik a (4.7b)-beli* (B_n)*-nel.*

(3) *Ha* $0<\xi<\frac{1}{2}$ *és* $\frac{1}{2}<\Xi<1$ *párjai egymásnak, azaz* $\xi+\Xi=1$*, akkor a nekik megfelelő sorozatok is párjai egymásnak, azaz* $(\bar{a}_n)$ *II-párja* $(\bar{A}_n)$*-nek, illetve* $(\bar{A}_n)$ *I-párja* $(\bar{a}_n)$*-nek.* $\square$

Megjegyezzük, hogy vizsgálódásainkat indíthattuk volna rögtön ezzel a következménnyel, ami talán terjedelmi csökkenést is eredményezett volna, de ezen az úton kevésbé természetesnek éreztük volna az I- és a II-sorozatok bevezetését.

A továbbiakban rekurzívan értelmezhetjük az I-, illetve II-sorozatok *n. deriváltjának* fogalmát minden nemnegatív egész n-re a következőképpen.

Definíció. A *0. derivált* a sorozat maga, és ha n egy pozitív egész, akkor az *n. derivált* az $(n-1)$. derivált deriváltja, ha az létezik. Ha egy sorozatnak létezik az n. deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat *n-szer deriválható* (vagy $n=1$ esetén egyszerűen csak *deriválható*), és ha ez nem minden n-re teljesül, akkor azt, hogy a sorozat *csak véges sokszor deriválható*.

Ha egy sorozat csak véges sokszor deriválható, akkor utolsó deriváltja vagy annak párja a 2. Állítás alapján periodikus (csupa azonos tagból áll), vagyis, megint csak a 2. Állítás alapján—teljes indukcióval haladva a deriváltakon visszafelé—minden derivált vagy annak párja is periodikus, speciálisan, maga a sorozat vagy annak párja is periodikus. Itt és a későbbiekben periodikus sorozaton mindig tisztán periodikus sorozatot értünk. A fellépő periódusok valójában elég speciális alakúak. Ehhez tekintsük a következő meghatározást.

Definíció. Egy $(\bar{a}_n)=(\bar{a}_0,\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m)_\infty$ periodikus I- vagy II-sorozatot és annak párját nevezzük *tükrösnek*, ha vagy $m=0$, vagy pedig $\bar{a}_0\neq\bar{a}_m$ és $\bar{a}_h=\bar{a}_{m-h}$ $(0<h<m)$.

Könnyen ellenőrizhető az előbbi gondolatmenettel, hogy minden véges sokszor deriválható sorozat tükrös is.

Láttuk a 2. Állítás bizonyításában, hogy egy (b_n) deriválható I- vagy II-sorozatban a $b_{k+h+1} - b_{k-h}$ $(0 \le h \le k)$ alakú különbségek vizsgálata hogyan vezethető vissza a (c_n) deriváltban a $c_{l+i+1} - c_{l-i}$ $(0 \le i \le l)$ alakú különbségekére. Ezért nem meglepő, hogy a többszöri deriválhatóság fogalma kapcsolatba hozható az alábbi *simaság* fogalommal.

Definíció. Ha n egy pozitív egész, akkor az $(\bar{a}_n)$ I- vagy II-sorozatot nevezzük *n-simának*, ha van olyan k, hogy $\bar{a}_{k+1} \ne \bar{a}_k$, ámde $\bar{a}_{k+h+1} = \bar{a}_{k-h}$ $(1 \le h \le n)$. Ha egy sorozat nem n-sima minden n-re, akkor hívjuk a sorozatot *végesen simának.* Tekintsünk továbbá minden I- vagy II-sorozatot *0-simának.*

A 2. Állítást használva könnyen látható, hogy ha egy I- vagy II-sorozat deriváltja $(n-1)$-sima, akkor a sorozat maga n-sima. Ebből teljes indukcióval azonnal adódik, hogy az n-szer deriválható sorozatok n-simák is egyben, speciálisan, a végesen sima sorozatok csak véges sokszor deriválhatók. A véges sokszor deriválható sorozatokról láttuk, hogy tükrösek, a tükrösekről viszont azonnal kimutatható, hogy végesen simák. A sok fogalmat tehát összefogja a soron lévő

3. Állítás. *A véges sokszor deriválható, a végesen sima és a tükrös sorozatok megegyeznek.*

Tekintsünk most egy tetszőleges olyan $\frac{1}{2} < \Xi < 1$ számot, amelyre $\chi(\Xi) > \frac{1}{3}$. Célunk azt kimutatni, hogy a Ξ-hez a 2. Következmény szerint tartozó $(\bar{A}_n)$ I-sorozat tükrös, ami az előző állítás szerint azzal egyenértékű, hogy végesen sima. A lánctörtjegyek (A_n) sorozatára átfogalmazva ez úgy hangzik, hogy elég nagy n esetén a (4.2)-t kielégítő i-kre S_{i-2}^{-1} és R_{i+2}, a (4.5)-öt kielégítő j-kre pedig S_{j-2}^{-1} és R_{j+2} nem egyezhet meg az első n jegyében. A (4.2)-t kielégítő i-kre a (2.9) szerint

$$3 - \chi(\Xi)^{-1} \le 3 - R_{i-1} - S_{i-1} = 3 - [2,1,1,R_{i+2}] - [0,2,S_{i-2}^{-1}] = \\ 1 - [0,1,1,R_{i+2}] - [0,2,S_{i-2}^{-1}],$$

a (4.5)-öt kielégítő j-kre pedig hasonlóan

$$3 - \chi(\Xi)^{-1} \le 3 - R_j - S_j = 3 - [2,2,R_{j+2}] - [0,1,1,S_{j-2}^{-1}] = \\ 1 - [0,2,R_{j+2}] - [0,1,1,S_{j-2}^{-1}]$$

teljesül. Egyezzék meg most S_{i-2}^{-1} és R_{i+2}, vagy pedig S_{j-2}^{-1} és R_{j+2} az első n jegyében. Amennyire jó szolgálatot tett nekünk eddig a

$$[0,1+a,\eta] + [0,1,a,\eta] = 1$$

azonosság ($a \in \mathbb{N}$; $\eta > 0$), olyannyira hasznos lesz most számunkra ennek a

$$[0,1+a,\eta] + [0,1,a,\theta] = 1 + \frac{\eta - \theta}{\big(1+(1+a)\eta\big)\big(1+(1+a)\theta\big)}$$

alakú erősebb változata ($a \in \mathbb{N}$; $\eta, \theta > 0$), amely némi számolással könnyen ellenőrizhető és amelyből az

$$\big|1 - [0,1+a,\eta] - [0,1,a,\theta]\big| \le |\eta - \theta|$$

becslés nyerhető. Ha ebben az $a = 1$ és a vizsgált esettől függően az $(\eta, \theta) = (S_{i-2}^{-1}, R_{i+2})$ vagy az $(\eta, \theta) = (R_{j+2}, S_{j-2}^{-1})$ helyettesítést végezzük, akkor η és θ mindenképpen megegyezik az első n lánctört jegyében, tehát eltérésük kisebb, mint 2^{2-n}, vagyis fennáll a

$$0 < 3 - \chi(\Xi)^{-1} < 2^{2-n}$$

becslés. Ennek következtében n nem lehet akármilyen nagy, és ezt akartuk bizonyítani.

Az eredménynek egyenes következménye, hogy a $\chi(\xi) > \frac{1}{3}$ egyenlőtlenség minden megoldása erősen ekvivalens vagy $[0, 1_\infty]$-nel, vagy $[0, 2_\infty]$-nel vagy egy olyan $0 < \theta < 1$ számmal, amelyre

$$2 + \theta = [2, 2, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1, 1]_\infty \tag{4.10a}$$

vagy

$$1/\theta = [1, 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2, 2]_\infty, \tag{4.10b}$$

ahol az $m = 1$ esetet is megengedjük (nincsenek $\bar{a}_i$-k), és az $\bar{a}_i$ pozitív egészekre

$$\bar{a}_h = \bar{a}_{m-h} \quad (0 < h < m). \tag{4.11}$$

Mivel

$$[0, 2_\infty] = \sqrt{2} - 1$$

éppen az $\mathcal{M}$-nek az $x^2 + 2xy - y^2$ Markov-formából származó eleme, $[0, 1_\infty]$ pedig—mint láttuk—erősen ekvivalens az $\mathcal{M}$ egy elemével, ezért elegendő már csak az előbbi két alakú θ számokra igazolnunk ugyanezt.

Tekintsük először a (4.10a) esetét, természetesen a (4.11) szem előtt tartásával. Legyen egy pillanatra

$$\lambda \overset{\text{df}}{=} 2 + \theta.$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned}
P &\overset{\text{df}}{=} \langle\, 2, 2, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1, 1 \,\rangle \\
Q &\overset{\text{df}}{=} \langle\, \ 2, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1, 1 \,\rangle \\
P' &\overset{\text{df}}{=} \langle\, 2, 2, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1 \,\rangle \\
Q' &\overset{\text{df}}{=} \langle\, \ 2, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1 \,\rangle
\end{aligned}$$

jelöléseket, ekkor a (2.2) alapján $\frac{P'}{Q'}$ és $\frac{P}{Q}$ a λ két egymás utáni közelítő törtje, azaz a (2.10)-et és a λ lánctörtjegyeinek periodicitását is használva

$$\lambda = \frac{P\lambda + P'}{Q\lambda + Q'},$$

$$Q\lambda^2 + (Q' - P)\lambda - P' = 0. \tag{4.12}$$

A későbbiek kedvéért feljegyezzük a $\frac{P}{Q}$ közelítő tört egyszerű

$$2 \le \frac{P}{Q} \le [2, 2] = \frac{5}{2} \tag{4.13}$$

becslését. Legyen most

$$S \stackrel{\text{df}}{=} \langle \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1, 1\rangle,$$

ekkor egyrészt nyilván

$$P = 2Q + S,$$

másrészt (2.3), (2.4) és (4.11) többszöri alkalmazásával

$$Q = \langle 2, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 1, 1\rangle =$$

$$= \langle 1, 1, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, \ldots, \bar{a}_1, \bar{a}_1, 2\rangle = \langle 1, 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2\rangle =$$

$$= \langle 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2\rangle + \langle \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2\rangle = Q' + S.$$

A két egyenlőséget egybevetve

$$P + Q' = 3Q.$$

A (2.5) most a

$$PQ' - P'Q = 1$$

alakot ölti, ahonnan az előzővel

$$P'Q = PQ' - 1 = P(3Q - P) - 1 = 3PQ - (P^2 + 1),$$

vagyis

$$R \stackrel{\text{df}}{=} \frac{P^2 + 1}{Q}$$

egy egész szám, amivel

$$P' = 3P - R.$$

A (4.12) most úgy írható mint

$$Q\lambda^2 + (3Q - 2P)\lambda - (R - 3P) = 0,$$

majd a θ-ra rendezve

$$Q\theta^2 + (7Q - 2P)\theta + (10Q + R - 7P) = 0.$$

Ha $F(x, y)$ azt a kvadratikus binér formát jelöli, amelyre

$$QF(x, y) \equiv Qx^2 + (7Q - 2P)xy + (10Q + R - 7P)y^2,$$

akkor tehát $F(\theta, 1) = 0$, és a bevezetőbeli Állítás szerint

$$\nu(\theta) = \frac{\mu(F)}{\sqrt{\delta(F)}}.$$

Ebben az egyenlőségben az F diszkriminánsa, $\delta(F)$ csodák csodájára

$$\delta \stackrel{\text{df}}{=} \delta(F) = Q^{-2}\big((7Q - 2P)^2 - 4Q(10Q + R - 7P)\big) =$$

$$= Q^{-2}(9Q^2 + 4P^2 - 4RQ) = Q^{-2}(9Q^2 - 4) = 9 - 4Q^{-2},$$

és mivel $QF \in \mathbb{Z}[x,y]$, ezért $\mu' \overset{\mathrm{df}}{=} Q\mu(F)$ egész. Tudjuk, hogy

$$\nu \overset{\mathrm{df}}{=} \nu(\theta) \geq \chi(\theta) = \chi(\xi) > \frac{1}{3},$$

tehát

$$\mu' = \nu\sqrt{Q^2\delta} = \nu\sqrt{9Q^2 - 4} > \sqrt{Q^2 - \frac{4}{9}} > Q - 1.$$

Ezek szerint $\mu' \geq Q$ is kell, hogy teljesüljön, azaz $\mu \geq 1$. Mivel az F diszkriminánsa szigorúan 0 és 9 közé esik, továbbá a (4.13) szerint az xy tag F-beli együtthatója, $7 - 2\frac{P}{Q}$ a $[2,3]$ intervallumban fekszik, ezért a (3.11) jellemzés alapján $F \in \mathcal{F}$, de akkor $\theta \in \mathcal{M}$ is, vagyis beláttuk, amit akartunk. Megjegyezzük, bár nincsen rá szükségünk, hogy a ξ-hez tartozó Markov-számot a Q szolgáltatja ebben az esetben, és θ a nagyobbik gyöke a hozzá tartozó $F(x,1)$ másodfokú egyenletnek.

Tekintsük most a (4.10b) esetet, megint a (4.11)-et szem előtt tartva. Legyen

$$\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} 1/\theta,$$

és vezessük be a

$$\begin{aligned}
P &\overset{\mathrm{df}}{=} \langle\, 1, 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2, 2\,\rangle\\
Q &\overset{\mathrm{df}}{=} \langle\, \ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2, 2\,\rangle\\
P' &\overset{\mathrm{df}}{=} \langle\, 1, 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2\,\rangle\\
Q' &\overset{\mathrm{df}}{=} \langle\, \ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}, 2\,\rangle
\end{aligned}$$

jelöléseket. A (2.4) alkalmazásaként jól látható, hogy az itteni (P, Q, P', Q') számnégyesre hasonló összefüggések igazolhatók, mint az előző esetbeli (P, P', Q, Q') négyesre, pontosabban

$$2 \leq \frac{P}{P'} \leq [2,2] = \frac{5}{2},$$
$$P + Q' = 3P',$$
$$Q = 3P - R,$$

ahol

$$R \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{P^2 + 1}{P'}$$

egész szám, és (4.12) a

$$(3P - R)\lambda^2 + (3P' - 2P)\lambda - P' = 0$$

alakba írható. Az

$$\eta \overset{\mathrm{df}}{=} -1/\lambda = -\theta$$

jelöléssel tehát

$$P'\eta^2 + (3P' - 2P)\eta - (R - 3P) = 0,$$

ami ugyanaz az egyenlet a (P, P', R, η) négyesre nézve, mint amit az előző esetben nyertünk a (P, Q, R, λ)-ra. Ezért most a

$$\Theta \overset{\mathrm{df}}{=} \eta - 2 = -\theta - 2$$

számról tudjuk kimutatni, hogy $\mathcal{M}$-beli, ami elég is számunkra, hiszen ez erősen ekvivalens a θ-val. Megjegyezhetjük, hogy a ξ-hez tartozó Markov-számot a P' szolgáltatja ebben az esetben, és Θ a kisebbik gyöke a hozzá tartozó $F(x,1)$ másodfokú egyenletnek ($F \in \mathcal{F}$).

Ezzel a 2. Tétel (1) részét teljesen beláttuk.

(2) bizonyítása. Legyen ξ erősen ekvivalens $\mathcal{M}_m$ egy elemével. A bizonyításnál nyilván feltehetjük, hogy $\xi = \theta$ vagy Θ, ahol

$$F(x,y) = (x - \theta y)(x - \Theta y) \tag{4.14}$$

egy $\mathcal{F}_m$-beli Markov-forma, és a meghatározottság kedvéért $\Theta < \theta$. A

$$\Delta \overset{\text{df}}{=} \frac{3 + \sqrt{9 - 4m^{-2}}}{2}$$

jelöléssel (3.5) szerint

$$\theta = \frac{k}{m} - 3 + \Delta \quad \text{és} \quad \Theta = \frac{k}{m} - \Delta, \tag{4.15}$$

amelyekre a (3.3)-at is használva rögtön adódik, hogy

$$-3 < \Theta < \theta < 1. \tag{4.16}$$

Legyen először $\xi = \theta$. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $\frac{p}{q}$ racionális szám esetén fennáll a

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{\Delta q^2} \tag{4.16}$$

egyenlőtlenség, és egyenlőség csakis $q = m$ mellett következik be. Rögzített $q > 0$ mellett nyilván elegendő csak azt az egy p nevezőt számba vennünk, amelyre a bal oldal a lehető legkisebb. Ilyenkor persze

$$-3 \leq \frac{p}{q} \leq 1.$$

A (4.16) egyenlőtlenség a (4.14) alapján átírható a

$$\Delta |F(p,q)| \geq \left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$$

alakba, amelynek bal oldalán a második tényező a (3.10) szerint legalább 1. Ha $\frac{p}{q}$ a Θ és a θ közé esik, akkor a jobb oldal (4.15) miatt kisebb, mint

$$\theta - \Theta = 2\Delta - 3 < \Delta,$$

vagyis ilyenkor nyilvánvaló az egyenlőtlenség. A többi esetben $\frac{p}{q} \geq \Theta$, tehát ilyenkor ismét (4.15)-ből adódóan az egyenlőtlenség átrendezve

$$\Delta\big(|F(p,q)| - 1\big) \geq \frac{p}{q} - \frac{k}{m}.$$

m^2-tel való szorzás után (3.6)-ot és (3.7)-et használva az

$$r \stackrel{\mathrm{df}}{=} mp - kq$$

jelöléssel

$$\Delta\big(|G(q,r)| - m^2\big) \geq \frac{mr}{q}$$

a bizonyítandó, ahol—amint már megjegyeztük—a bal oldal nemnegatív. A jobb oldal fényében ezért elegendő csak $r > 0$ esetével foglalkoznunk, amikoris

$$\Delta\big(q^2 + 3mqr + r^2 - m^2\big) \geq \frac{mr}{q} \tag{4.17}$$

igazolása a feladat. Mivel

$$r \equiv -kq \pmod m,$$

majd (3.4) miatt

$$kr \equiv -k^2 q \equiv q \pmod m,$$

ezért a

$$q' \stackrel{\mathrm{df}}{=} r \quad \text{és} \quad r' \stackrel{\mathrm{df}}{=} -q$$

jelölésekkel

$$r' \equiv -kq' \pmod m,$$

ami azt jelenti, hogy egy alkalmas p' egésszel

$$r' = mp' - kq'.$$

Erre (3.6), (3.7) és (3.10) szerint

$$|q^2 - 3mqr + r^2| = |G(q',r')| = m^2|F(p',q')| \geq m^2.$$

Ha a bal oldalon az abszolútérték jele elhagyható, akkor (4.17) második tényezője, tehát a (4.17) maga is legalább $6mqr$, ami nyilvánvalóan nagyobb, mint $\frac{mr}{q}$. Ha az abszolútérték jele nem hagyható el, akkor az utolsó egyenlőtlenséget a már ismert $m^2 \leq G(q,r)$ becsléssel egybevetve

$$m^2 - 6mqr \leq q^2 - 3mqr + r^2 \leq -m^2,$$

amiből

$$m \leq 3qr.$$

A (4.17)-ben ezért a bal oldal legalább $\Delta(q^2+r^2)$, a jobb oldal pedig legfeljebb $3r^2$, ezért elegendő belátnunk a

$$\Delta q^2 \geq (3-\Delta)r^2$$

egyenlőtlenséget. A jobb oldalon $3 - \Delta = \frac{1}{\Delta m^2}$, vagyis végső soron a

$$\Delta mq \geq r$$

becslésre van szükségünk, ami azonban világos, hiszen $\frac{p}{q} \leq 1$ miatt

$$r = mp - kq < mp \leq mq.$$

Ezzel megmutattuk, hogy fennáll az eredetileg célul kitűzött (4.16) egyenlőtlenség, és egyszersmind azt is láttuk, hogy csakis $r = 0$ és $(p, q) = 1$ esetén következik be az egyenlőség, azaz ha $p = k$ és $q = m$.

Legyen most $\xi = \Theta$. Ugyanúgy, mint az előbb, azt kapjuk, hogy elegendő belátnunk a

$$\Delta\big(|G(q,r)| - m^2\big) \geq \frac{m\bar{r}}{q}$$

egyenlőtlenséget, ahol r jelentése a régi,

$$\bar{r} \overset{\mathrm{df}}{=} kq - 3qm - pm = -r - 3qm,$$

és most is csak a pozitív q nevezőkkel foglalkozunk. A (3.8) alapján

$$G(q,r) = G(-q,-r) = G(q,\bar{r}),$$

vagyis a (q, r) párra fentebb elmondott érvelést megismételhetjük a $(q, \bar{r})$-ra. Legvégül a

$$\Delta mq \geq \bar{r}$$

marad csak hátra, ami $k \leq m$ és $-3 \leq \frac{p}{q}$ miatt valóban teljesül, hiszen

$$\bar{r} = kq - 3qm - pm \leq -2mq - pm \leq mq.$$

Az is kitűnik a lépésekből, hogy csakis $\bar{r} = 0$ és $(p, q) = 1$ esetén következik be az egyenlőség, azaz ha $p = k - 3m$ és $q = m$.

Ezzel a 2. Tétel (2) részét is teljesen beláttuk.

(3) bizonyítása. Lényegében az 1. Tétel (3) részének [1]-beli bizonyítását fogjuk lemásolni. Vegyünk egy tetszőleges végtelen utat a az $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3m_1m_2m_3$ egyenlet Markov-láncában (2. ábra), amely az $(1, 1, 1)$ megoldásból indul ki. Az út csúcsaihoz tartozó Markov-formákat soroljuk fel az $\big(F^{(j)}\big) \subseteq \mathcal{F}$ sorozatban. Legyen

$$F^{(j)}(x,y) = \left(x - \theta^{(j)}\right)\left(x - \Theta^{(j)}\right),$$

ahol a (4.16) szerint pl.

$$-3 < \Theta^{(j)} < \theta^{(j)} < 1.$$

A (j) indexeknek esetleg egy részsorozatára áttérve a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt feltehetjük, hogy a $\Theta^{(j)}$-k egy Θ, a $\theta^{(j)}$-k pedig egy θ számhoz tartanak. Tetszőleges j-re és q pozitív egészre a 2. Tétel már igazolt (2) része miatt

$$q\big\|q\theta^{(j)}\big\| > \frac{1}{3}$$

teljesül, azaz határátmenettel

$$q\|q\theta\| \geq \frac{1}{3}.$$

Ezek szerint minden így előállított θ kielégíti a $\chi(\theta) \geq \frac{1}{3}$ becslést. A Markov-láncban az $(1, 1, 1)$ megoldásból kontinuum sok végtelen út indul ki, ezek mindegyike különböző θ-ra vezet az [1, Chapter II, Lemma 14] bizonyításában szereplő gondolat alapján, tehát összességében kontinuum sok θ-t adtunk meg, amelyre $\chi(\theta) \geq \frac{1}{3}$. A 2. Tétel (1) része szerint ezek közül csak megszámlálható sokra teljesülhet $\chi(\theta) > \frac{1}{3}$, vagyis kontinuum sok θ-ra $\chi(\theta) = \frac{1}{3}$ is fennáll. Mivel az (1.2)-beli ekvivalencia minden osztálya megszámlálható, ezért az előbbi θ-k között kontinuum sok páronként nem ekvivalens ξ van, és ezt kellett igazolnunk. Ezzel a 2. Tétel bizonyítását befejeztük. $\boxtimes$

5. Záró megjegyzések

Érdekes, hogy a dolgozatban felvetett probléma történében is hasonlít Hurwitz eredeti kérdéséhez. Úgy tűnik, hogy a problémát Newman vetette fel először, aki fel is tárta az új Markov-lánc első 2 láncszemét, ugyanúgy, mint Hurwitz tette annak idején az eredeti Markov-láncban. Newman sejtését aztán tanítványa, Gurwood bizonyította lényegében a mi 2. Tételünk formájában, Ph. D. tézise [3] legnagyobb részt ezeket az eredményeket tárgyalja. E szakdolgozat szerzője a kérdéshez és a bizonyításhoz Newmantól és Gurwoodtól függetlenül jutott el, először ő is csak az első 2 láncszemet találta meg, amelyről a KöMaL-ban cikket is írt [4]. A későbbiekben jutott el a 2. Tételhez, miután Markov munkájával megismerkedett, és ezeket egy újabb dolgozatban kívánta közzétenni. Csak miután már az eredményeket letisztázta és a fordítással is elkészült, kapta kézhez Gurwood disszertációját és mondott le a közlésről. Az itt közölt bizonyítás a szerző saját munkája, amely a probléma természetéből és előéletéből adódóan tartalmaz ugyan közös vonásokat Gurwood gondolatmenetével, de azért lényegesen különbözik attól. Gurwood több észrevétele nem szerepel a bizonyításban, de fordítva is, a bizonyítás számos eleme fel sem merül Gurwoodnál. Ez a különbség bátorította fel a szerzőt munkájának ilyen módon való közzétételére.

A szerző hálával tartozik Surányi János Tanár Úrnak, aki a kezdetektől fogva nyomon kísérte ezt az első munkáját, először hívta fel a figyelmét a Markov-láncra, adta kezébe a diofantikus approximáció [1] alapkönyvét, bizonyításait átnézte, továbbá mindvégig mindenben támogatta. A címlap elkészítésében nyújtott segítségért a szerző Fleiner Balázsnak és Varga Dánielnek mond ezúton is köszönetet.

Irodalom

1. Cassels, J. W. S., *An introduction to diophantine approximation (Cambridge tracts in mathematics; vol. 45)*, Cambridge Univ. Press, 1957.
2. Dickson, L. E., *Studies in the theory of numbers*, Univ. of Chicago Press, 1930.
3. Gurwood, C., *Diophantine approximation and the Markov chain*, Ph. D. thesis, New York Univ., 1976.
4. Harcos, G., *Mely valós számok esnek a „legtávolabbra" az összes racionális számtól?*, Középiskolai Mat. Lapok **42** (1992), 337–342.
5. Hardy, G. H.–Wright, E. M., *The theory of numbers*, 5th ed., Oxford Univ. Press, 1979.
6. Heawood, P., *The classification of rational approximation*, Proc. London Math. Soc. **20** (1922), 233–250.
7. Hurwitz, A., *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Bruche*, Math. Ann. **39** (1891), 279–284.
8. Markoff, A. A., *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math. Ann. **15** (1879), 381–407; Math. Ann. **17** (1880), 379–399.
9. Perron, O., *Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale*, S. B. Heidelberg Akad. Wiss. (1921).
10. Shibata, K., *On the approximation of irrational numbers by rational numbers*, Japanese Journal of Math. **1** (1924), 9–13; Tohoku Math. Journal **23** (1924), 328–337.