Szubkonvex becslések automorf L-függvényekre és alkalmazásaik

Harcos Gergely

MTA doktori értekezés tézisei

Budapest, 2011

I. Kitűzött kutatási feladat

Az értekezés a számelmélet egy kulcsfontosságú egyesítő fogalmával, az L-függvénnyel foglalkozik. Az L-függvényeknek a matematikában betöltött előkelő szerepét jól mutatja, hogy a Clay Mathematics Institute által kitűzött hét milleniumi probléma közül kettőnek a megfogalmazásában is szerepelnek. A bennük rejlő információ kiaknázásához elengedhetetlen, hogy analitikus szempontból vizsgáljuk őket: megértsük az analitikus folytatásukat, a függvényegyenletüket, a gyökeik és a pólusaik eloszlását, illetve a nagyságukat. A Langlands-filozófia elképzelése szerint a számelméletben előforduló L-függvények az ún. elsődleges automorf L-függvényekből épülnek fel. Automorf L-függvényekre a szükséges analitikus tulajdonságok némelyike könnyen elérhető, míg másokról kiderült, hogy rendkívül mélyek. A területen jelenleg folyó kutatások jelentősen alapoznak arra a felfogásra, hogy az L-függvények nem elszigetelten, hanem természetes családokban fordulnak elő. A modern felfogás már egyetlen L-függényt is L-értékek egy családjának tekinti.

Az elmúlt évek fontos felismerései közé tartozik, hogy egyes mély diofantikus problémák megoldásához a kulcsot természetes L-függvénycsaládokban várható analitikus tulajdonságok szolgáltatják. Ilyen módon az L-függvények kapcsolódnak a matematika olyan szerteágazó területeihez, mint az algebrai geometria, a kombinatorika, a reprezentációelmélet, az ergodelmélet, a dinamikai rendszerek és a véletlen mátrixok elmélete, a matematikai fizika. Központi kérdés az L-függvények eltűnése és nagysága egy-egy családon belül, és a két kérdés nem független egymástól. Az első felmerül az Abel-varietások rangjánál (Birch és Swinnerton-Dyer sejtése), az automorf formák elméletében fontos teta-megfeleltetésnél és a hiperbolikus felületek deformációinál. A második jól alkalmazható különböző egyenletes eloszlási vizsgálatokban, mint pl. Linnik problémái (rácspontok eloszlása ellipszoidokon, illetve Heegner-pontok és zárt geodetikusok eloszlása aritmetikus hiperbolikus felületeken) vagy ezeknek az André–Oort-sejtéshez kapcsolódó finomításai és általánosításai (Shimura-varietások speciális részvarietásainak eloszlása rövid Galois-orbitokban), Hilbert 11. problémája (kvadratikus formák előállításszámának eloszlása egy génuszon belül), és a kvantum-ergodicitás (hullámok sűrűségeloszlása aritmetikus hiperbolikus felületeken). Ezeket az izgalmas fejleményeket kiválóan összefoglalja [Fr95, KS99, IS00, Sa03, MV06, Mi07].

Az értekezésben klasszikus automorf L-függvényekre vonatkozó szubkonvex becsléseket és azok néhány alkalmazását tárgyaljuk. A fejezet hátralevő részében röviden áttekintjük a szubkonvexitás problémáját.

Egy F számtest feletti n-edfokú teljes elsődleges automorf L-függvényt az F feletti GL_n csoport egy π irreducibilis csúcsos automorf reprezentációjához társítunk, amelynek centrális karaktere unitér. A kapott $\Lambda(\pi,s)$ meromorf az s komplex változóban (lehetséges egyszerű pólusokkal a $\Re s=0$ és a $\Re s=1$ egyeneseken, amelyek pontosan $n=1$ és $\pi=|\det|^{it}$ esetén fordulnak elő) és a π csúcsos volta miatt nem bomlik fel kisebb fokú teljes L-függvények szorzatára. A π maga realizálható a $\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ adélikus hányados csúcsformáinak a terében egy irreducibilis altérként, amelyen jobbról és felcserélhetően hatnak a nemarchimédeszi $\mathrm{GL}_n(F_v)$ kvázifaktorok, illetve az archimédeszi $\mathrm{GL}_n(F_v)$ kvázifaktorok Lie-algebrái. Ez harmonizál Flath tételével, miszerint a π előáll egy $\otimes_v\pi_v$ megszorított tenzorszorzatként, ahol π_v a $\mathrm{GL}_n(F_v)$ irreducibilis megengedett reprezentációja az F minden egyes v helyére. Ennek megfelelően fennáll a $\Lambda(\pi,s)=\prod_v L(\pi_v,s)$ szorzatelőállítás, amely abszolút konvergens a $\Re s>1$ félsíkban. A teljes L-függvény korlátos minden függőleges sávban (a pólusok környezetét leszámítva), továbbá $\Lambda(\pi,s)$-t egyszerű függvényegyenlet kapcsolja $\Lambda(\tilde{\pi},1-s)$-hez. Itt $\tilde{\pi}$ a π kontragrádiens reprezentációja, amelyet jellemez az $L(\tilde{\pi}_v,s)=\overline{L(\pi_v,\bar{s})}$ azonosság.

A $\Lambda(\pi,s)$ finomabb analitikus viselkedése akkor válik láthatóvá, ha leválasztjuk róla az archimédeszi $L(\pi_v,s)$ lokális faktorokat. Valóban, az archimédeszi faktorok exponenciálisan csökkennek minden függőleges sávban, míg a nemarchimédeszi faktorok távol maradnak a nullától. A nemarchimédeszi faktorok szorzata az $L(\pi,s)$ véges L-függvény: ennek nagysága az értekezés központi témája. A nagyságot a $C(\pi,s)$ analitikus konduktorhoz képest mérjük, ami megragadja az F összes helyéhez tartozó „lokális elágazási adatot”, vö. [IS00]. A Phragmén–Lindelöf-féle konvexitási elvből és a $\Lambda(\pi,s)$ függvényegyenletéből következik a $L(\pi,s)\ll_{\varepsilon,n,F} C(\pi,s)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ konvexitási becslés a $\Re s=\frac{1}{2}$ kritikus egyenesen. Itt és a továbbiakban ε tetszőleges pozitív számot jelöl, és a $\ll_{\varepsilon,n,F}$ szimbólum jelentése az, hogy „abszolút értékben kisebb, mint egy ε,n,F-től függő abszolút konstansszor”. Valójában ezek az L-értékek egyenletesen és tetszőleges pontossággal megkaphatók az $L(\pi,s)$ és az $L(\tilde{\pi},1-s)$ Dirichlet-sorának mintegy $C(\pi,s)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ darab tag utáni megvágásával, vö. [Ha02]. Az általános Riemann-sejtés szerint a $\Lambda(\pi,s)$ összes gyöke a $\Re s=\frac{1}{2}$ egyenesen fekszik, amiből következne, hogy a konvexitási becslésben az $\frac{1}{4}+\varepsilon$ kitevő cserélhető ε-ra. Ez az álomkorlát az általános Lindelöf-sejtés, amelyet még egyetlen esetben sem igazoltunk. Reálisabb cél annak belátása, hogy a π-k egyes speciális családjaira (vagy sejtett családjaira) létezik $\delta=\delta(n,F)>0$ úgy, hogy $L(\pi,s)\ll_{\delta,n,F} C(\pi,s)^{\frac{1}{4}-\delta}$ teljesül a $\Re s=\frac{1}{2}$ kritikus egyenesen. Ez az automorf L-függvényekre vonatkozó szubkonvexitási probléma.

Az automorf L-függvényekre vonatkozó szubkonvex becsléseket erősen motiválja, hogy több egyenletes eloszlási problémában a hibatag ilyen L-függvények speciális értékeiből fejezhető ki (mély explicit formulákkal). Általában a konvexitási becslés még éppen kevés az egyenletes eloszlás belátásához, míg tetszőleges $\delta>0$ nemtriviális javítás már elegendő. Másképpen szólva az aritmetika pontosan akkor válik „láthatóvá”, amikor a szóban forgó L-függvénycsaládra szubkonvex becslést állítunk fel. Egyes helyzetekben a szubkonvex kitevő minősége is lényeges. Például [Hu72]-ben valamilyen $\delta>\frac{1}{12}$ értékre van szükség a $\zeta(\frac{1}{2}+it)$-re, míg [CCU09] a $\delta<\frac{1}{32}$ tartományt használja egy bizonyos $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_1$ típusú családra.

A $C(\pi,s)$ analitikus konduktorban szereplő különböző paramétereknek megfelelően beszélhetünk a szubkonvexitási probléma s-aspektusáról, ∞-aspektusáról (vagy sajátértékaspektusáról), illetve q-aspektusáról (vagy szint-aspektusáról). Ebben az értekezésben $\mathbb{Q}$ feletti $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_1$, GL_2, $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_2$ típusú családokra összpontosítunk a q-aspektusban, ezért csak röviden említünk meg néhány újabb fejleményt az egyéb irányokban: [Bl11, BlHa10, BR05, JM05, JM06, LLY06, Li11, MV10, Ve10].

II. Vizsgálati módszerek

Röviden összefoglaljuk a következő fejezetben kifejtett 1. és 2. és 3. Tétel bizonyítása mögött rejlő ötleteket, módszereket. A bizonyítások közvetlen előzményei a [By96, KMV00, DFI02, Mi04] dolgozatok. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$\mathscr{L}(f) := L(f \otimes \chi, s) \quad \text{az 1. Tétel esetében;}$$
$$\mathscr{L}(f) := L(f, s)^2 \quad \text{a 2. Tétel esetében;}$$
$$\mathscr{L}(f) := L(f \otimes g, s) \quad \text{a 3. Tétel esetében;}$$

ekkor a cél egy bizonyos $\delta > 0$ felállítása úgy, hogy $\mathscr{L}(f) \ll q^{\frac{1}{2}-\delta}$ teljesüljön valamilyen ordókonstanssal, ami a másodlagos paraméterektől függ polinomiálisan. Ezt egy

$$\frac{1}{q}\int_{\phi} |\mathscr{M}(\phi)|^2 |\mathscr{L}(\phi)|^2 \, d\mu(\phi) \tag{1}$$

súlyozott második momentum becslésével érjük el, ahol az átlagolást a $\approx q$ szintű és adott melléktípusú automorf függvényeken ható Laplace-operátor spektruma felett végezzük, így a tagok valamelyike egy $\phi \approx f$ csúcsformához tartozik. Az $\mathscr{M}(\phi)$ egy megfelelően választott súlyfüggvény (ún. amplifikátor), miközben a ϕ Maass-csúcsformákon, holomorf csúcsformákon és Eisenstein-sorokon fut végig egy alkalmas $d\mu(\phi)$ spektrális mérték szerint, amit a Kuznyecov-formula szem előtt tartásával tervezünk. Az amplifikátort az

$$\mathscr{M}(\phi) := \sum_{\ell} x(\ell)\lambda_{\phi}(\ell)$$

kifejezéssel definiáljuk, ahol $(x(\ell))$ egy komplex számokból álló véges sorozat, ami kizárólag az f-től függ. A négyzetek felbontása és a Hecke-sajátértékekre vonatkozó multiplikatív azonosságok alkalmazása után a

$$\mathscr{Q}(\ell) := \frac{1}{q}\int_{\phi} \lambda_{\phi}(\ell) |\mathscr{L}(\phi)|^2 \, d\mu(\phi)$$

normalizált átlagok becslése marad hátra, ahol az ℓ nem haladja meg a q valamilyen kis kitevőjű hatványát. Nyert ügyünk van, amint meg tudjuk mutatni, hogy $\mathscr{Q}(\ell) \ll \ell^{-\delta}$ egy alkalmas pozitív δ-val.

A Kuznyecov-formulával a $\mathscr{Q}(\ell)$ spektrális összegeket átírjuk csavart Kloosterman-összegek egy súlyozott összegévé, ahol a súlyok alakja az 1., 2., 3. Tétel esetében rendre $\chi(m)\chi(n)$, $\tau(m)\tau(n)$, $\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)$. A $\chi(m)\chi(n)$ súlyok esete lényegesen egyszerűbb, főként ennek köszönhetően kapunk itt jobb δ értéket. Ilyenkor úgy járunk el, mint eredetileg Bikovszkij [By96] járt el, tehát az összeget Hurwitz zeta-függvényekkel fejezzük ki. Ezekre a zeta-függvényekre alkalmazzuk a függvényegyenletet: így a problémát bizonyos karakterösszegek nemtriviális becslésére vezetjük vissza, amit pedig Weil tételével végzünk el. A $\tau(m)\tau(n)$ súlyokat a $\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)$ speciális esetének tekinthetjük a

$$g(z) := \frac{\partial}{\partial s} E_{\infty}(z,s)_{|s=\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y}\log(e^{\gamma}y/4\pi) + 4\sqrt{y}\sum_{n\geqslant 1} \tau(n)\cos(2\pi nx)K_0(2\pi ny) \tag{2}$$

definícióval. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy ez a g nem négyzetesen integrálható, ami technikai bonyodalmakhoz vezet, és külön eljárást tesz szükségessé. Akárhogy is, a

2. és a 3. Tétel bizonyításában a következő lépés az, hogy alkalmazzuk a Voronoi-féle összegzési formulát, ami a Kloosterman-összegeket egyszerűbb Gauss-összegekre váltja (a (2) esetében keletkezik még egy elhanyagolható adalék tag is). A Gauss-összegek felbontása után nagyjából

$$\frac{1}{q^{3/2}}\sum_h \chi_f\chi_g(h)\sum_{\ell_1 m-\ell_2 n=h}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)W_{\ell_1,\ell_2}(m,n). \tag{3}$$

alakú összegek becslése marad hátra. Ezekben h, m, n mérete $\approx q$, továbbá W_{ℓ_1,ℓ_2} egy szép súlyfüggvény, ami enyhén függ az ℓ_1-től és az ℓ_2-től.

A (3)-beli belső összeg egy eltolt konvolúciós összeg, ami legjobb esetben is csak négyzetgyökösen rövidül, ezért a h paramétertől függő oszcillálást ki kell használnunk. A h-tól való függés megértéséhez az eltolt konvolúciós összeget a körmódszer Kloosterman-finomításával elemezzük. Ez a megközelítés nagyon is helyénvaló: korábban jól bevált hasonló helyzetekben [DFI93, DFI94a, Ju99, KMV02], sőt speciális esetben már Kloosterman [Kl26] eredeti alkalmazása is a szóban forgó probléma egy speciális esetévé válik. Pontosabban a Kloosterman-finomítás helyett technikai okokból a körmódszer Meurmantól [Me01] és Jutilától [Ju92, Ju96] származó variánsait használjuk. Ennek eredményeképpen az eltolt konvolúciós összeg – elhanyagolható hiba erejéig – felbomlik egy főtagra és $S(h,h';c)$ Kloosterman-összegek egy súlyozott c-összegére. A súlyokat a $\lambda_g(n)$ együtthatókból fejezzük ki, de a végén csak azt kell kihasználnunk, hogy ezek négyzetes átlagban kicsik. A főtag csupán (2) esetén van jelen, erre lent visszatérünk. A Kloosterman-összegek összegére a Kuznyecov-formulát alkalmazzuk (a másik irányban), hogy a h és h' változókat szétválasszuk. Ekkor

$$\int_\psi \sum_h \chi(h)\rho_\psi(h)\,d\tilde{\mu}(\psi), \tag{4}$$

alakú kifejezéseket kapunk, ahol a h-összeg hossza $\approx q$, és ψ – egy másik $d\tilde{\mu}(\psi)$ spektrális mérték szerint – a $\approx \ell_1\ell_2$ szintű és triviális melléktípusú moduláris formákon fut végig. A h-összeg rövidülése ezért a csavart automorf L-függvényekre vonatkozó szubkonvexitással egyenértékű, amihez az 1. Tételre van szükségünk. Némi nehézséget okoz, hogy a (3)-beli eltolt konvolúciós összegek lehetnek kiegyensúlyozatlanok is: ha a W_{ℓ_1,ℓ_2} tartója olyan, hogy m jóval kisebb az n-nél, akkor a (4)-beli ψ-integrál „hosszú”. A szükséges megtakarítást ilyenkor Deshouillers–Iwaniec [DI82] nagy-szita egyenlőtlenségeiből nyerjük.

A (2) esetén, tehát amikor $\lambda_g(n)=\tau(n)$, a (3) elemzése során megjelenik egy adalék tag, nevezetesen az eltolt konvolúciós összegek főtagjának járuléka. Az adalék tag – elhanyagolható hiba erejéig – megegyezik az (1)-beli Eisenstein-spektrum járulékával, amely általában túl nagy, és csupán azt a célt szolgálja, hogy az (1) spektrálisan teljes legyen. A [DFI02] dolgozat ennek a megfigyelésnek a megfelelőjét szigorúan alátámasztja: a két nagy járulékról kimutatja, hogy egyenlők, így azokat el lehet felejteni. A 2. Tétel bizonyításában ehelyett egy rövidebb utat választunk. A közelítő függvényegyenletben és a Kuznyecov-formulában úgy választjuk meg a súlyfüggvényeket, hogy az adalék tag elhanyagolható legyen: az elemzésben ez úgy nyilvánul meg, hogy egy gyök mesterséges létrehozásával megszüntetünk egy bizonyos pólust.

III. Új tudományos eredmények és alkalmazásaik

A $\mathbb{Q}$ feletti GL_2 egy irreducibilis csúcsos automorf reprezentációja azonosítható – egyszerű ekvivalencia erejéig – a $\mathscr{H}$ felső félsík egy klasszikus moduláris formájával, tehát egy $k \geqslant 1$ egész súlyú primitív holomorf csúcsformával vagy egy $\kappa \in \{0,1\}$ súlyú primitív Maass-csúcsformával. Egy ilyen g automorf forma rendelkezik az alábbi három alapvető tulajdonsággal (megfelelő értelemben véve):

- szimmetrikus az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ egy Γ kongruencia-részcsoportjára nézve;
- négyzetesen integrálható modulo Γ;
- közös sajátfüggvénye a Laplace- és Hecke-operátoroknak.

A Laplace-sajátértéket jelölje $\frac{1}{4}+t_g^2$, és a $\mu_g := 1+|t_g|$ mennyiséget nevezzük a g spektrális paraméterének (tehát ha g holomorf és k_g súlyú, akkor $\mu_g = \frac{k_g+1}{2}$). Az n. Hecke-sajátértéket jelölje $\lambda_g(n)$: ezek a komplex számok központi jelentőséggel bírnak számunkra, mert belőlük kapjuk az értekezésbeli L-függvényeket. A következő hipotézis igen hasznos az analitikus vizsgálatokban.

Hipotézis (H_θ). *Ha g egy 0 vagy 1 súlyú primitív Maass-csúcsforma, akkor $\lambda_g(n) \ll_\varepsilon n^{\theta+\varepsilon}$. Ha g egy 0 súlyú Maass-csúcsforma, akkor $\frac{1}{4}+t_g^2 \geqslant \frac{1}{4}-\theta^2$.*

Megjegyezzük, hogy holomorf g csúcsformákra a $\lambda_g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ korlátot Deligne bizonyította a híres [De74] dolgozatában, míg az 1 súlyú Maass-csúcsformákra $\frac{1}{4}+t_g^2 \geqslant \frac{1}{4}$ következik az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ reprezentációelméletéből. A H_θ hipotézis $\theta=0$ esetén nem más, mint a Ramanujan–Selberg-sejtés, de bármilyen $\theta < \frac{1}{2}$ érték nemtriviális. Jelenleg a $\theta = \frac{7}{64}$ érték megfelelő Kim–Shahidi, Kim and Kim–Sarnak [KiSh02, Ki03, KiSa03] mély munkája alapján.

Az első család, amelyet vizsgálunk, $f\otimes\chi$ alakú csavart formákból áll, ahol f egy rögzített primitív forma és χ egy változó primitív Dirichlet-karakter. Az ezekhez társított (véges) L-függvényeket lényegében az

$$L(f\otimes\chi,s) \approx \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_f(n)\chi(n)}{n^s}, \qquad \Re s > 1, \tag{5}$$

Dirichlet-sor definiálja, ahol $\approx$ azt jelenti, hogy a két oldal hányadosa elhanyagolható a mi analitikus céljaink szempontjából. Ezek az L-függvények Riemann zeta-függvényéhez és Dirichlet L-függvényeihez hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, nevezetesen mindegyikük

- végtelen Euler-szorzatra bomlik a prímek felett;
- kiterjed egészfüggvénnyé, amely $s \longleftrightarrow 1-s$ szimmetriát mutat.

Speciálisan, ha q jelöli a χ konduktorát és N az f szintjét, akkor fennáll az alábbi (egyszerű) konvexitási becslés[1] a $\Re s = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen:

$$L(f\otimes\chi,s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f N q)^\varepsilon\, |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

[1] Igazából a konvexitási becslés némileg erősebb állítás. Mi azt a változatot mutatjuk itt, amiben elkülönülnek a különböző paraméterek.

Az általános Lindelöf-sejtés szerint a (6)-ban az összes kitevő ε-ra cserélhető, míg a szubkonvexitási probléma a kitevők (némelyikének) csökkentését célozza meg. Az első eredményünk a probléma q-aspektusát érinti, tehát itt elsődlegesen a q-nak a (6)-beli $1/2$ kitevőjét próbáljuk csökkenteni, de úgy, hogy közben a másik három kitevő ne növekedjék túlzottan. Történetileg ezt az esetet vizsgálták először (Burgess [Bu63] klasszikus munkája után, amely a GL_1-re vonatkozó analóg kérdést boncolta, lásd a (7)-et alább), és ez indította el az általános szubkonvexitási probléma módszeres tanulmányozását.

A kezdeti áttörést Duke, Friedlander, Iwaniec [DFI93] érte el 1993-ban azzal, hogy teljes szintű ($N=1$) holomorf f formákra a q kitevőjét az $\frac{1}{2}-\delta$ értékre javította, ahol $\delta=\frac{1}{22}$. A bizonyításuk bevezetett több, a szubkonvexitási problémában alapvető eszközt, mint pl. az amplifikációs módszert (egy a család súlyozott második momentumának becslésére épülő technikát) és különböző összegzési formulákat a Hecke-sajátértékekre. A szóban forgó problémában a további fejlemények a következőképpen foglalhatók össze[2]:

$\delta=\frac{1}{8}$, ha f holomorf és a mellléktípusa triviális, lásd Bikovszkij [By96];

$\delta=\frac{1}{54}$, ha f tetszőleges, lásd Harcos [Ha03a, Ha03b];

$\delta=\frac{1}{22}$, lásd Michel [Mi04];

$\delta=\frac{1-2\theta}{10+4\theta}$, lásd Blomer [Bl04];

$\delta=\frac{1-2\theta}{8}$, lásd Blomer–Harcos–Michel [BHM07a].

Az utolsó két eredményben θ olyan, amire a H_θ hipotézis fennáll (tehát $\theta=\frac{7}{64}$ megfelelő), és az eredmények jó okkal függenek ettől a paramétertől. Nevezetesen a [Bl04, BHM07a] munkák a [DFI93]-t követik és az amplifikációt a χ karakterek felett végzik. Az átlagolás után a $\chi(n)$-ek eltűnnek az (5)-ből, de a $\lambda_f(n)$-ek tovább élnek páros szorzatokban. Ezeket a Hecke-sajátértékpárokat eltolt konvolúciós összegekbe rendezik, amiket aztán bonyolult harmonikus analízisbeli technikákkal elemeznek. Mindenek ellenére bizonyos $\lambda_f(q)$ típusú tényezők nagyon „masszívnak" bizonyulnak, és ebből származnak a nemkívánatos q^θ tényezők a megfelelő becslésekben. Bikovszkij [By96] módszere azért figyelemre méltó, mert a $\delta=\frac{1}{8}$ értéket produkálja mindenféle θ nélkül. Jegyezzük meg, hogy ez felel meg Burgess [Bu63] híres

$$L(\chi,s)\ll_\varepsilon (|s|q)^\varepsilon\,|s|^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}} \tag{7}$$

korlátjának, hiszen $L(f\otimes\chi,s)$ közeli rokona az $L(\chi_1,s)L(\chi_2,s)$ szorzatoknak, amelyekben $\chi_1\chi_2=\chi^2$. Ennek fényében még inkább érdekes, hogy [BHM07a] ettől az eredménytől csak a θ jelenléte miatt marad el, habár emez nem tesz megszorítást az f típusára. Bikovszkij kulcsötlete az volt, hogy az $[N,q]$ szintű spektrum f formái felett amplifikáljon. Ebben az átlagolásban a $\lambda_f(n)$-ek eltűnnek az (5)-ből, és csak a $\chi(n)$-ek élnek tovább, amik triviálisan 1-gyel becsülhetők. Ez a leírás persze igen elnagyolt, de remélhetőleg jól motiválja a mondanivalónk egészét.

Az értekezés első eredménye közös munka Valentin Blomerrel [BlHa08], ami kihozza Bikovszkij [By96] módszeréből a maximumot.

[2] Csak az összes χ-re bizonyított eredményeket soroljuk fel, ezért [CI00]-t kihagyjuk.

1. Tétel. *Legyen f egy primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek a szintje N és a melléktípusa triviális, továbbá legyen χ egy primitív karakter modulo q. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett fennáll*

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f N q)^\varepsilon \left(|s|^{\frac{1}{4}} \mu_f^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{8}} + |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f N^{\frac{1}{2}} (N,q)^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \right),$$

ha f holomorf, és

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f N q)^\varepsilon \left(|s|^{\frac{1}{4}} \mu_f^{3} N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{8}} + |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{\frac{7}{2}} N^{\frac{1}{2}} (N,q)^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \right)$$

egyébként.

A tétel újdonsága, hogy magában foglalja a Maass-formákat is, és jó egyenletességet ér el a másodlagos paraméterekben (pl. az s-aspektusban ugyanannyira erős, mint a konvexitási becslés). Az alkalmazások szempontjából könnyebb egyetlen taggal bánni a jobb oldalon, ezért megfogalmazzuk az alábbi egyszerűsítést.

1. Következmény. *Legyen f egy primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek a szintje N és a melléktípusa triviális, továbbá legyen χ egy primitív karakter modulo q. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett fennáll*

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f N q)^\varepsilon |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{3} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{8}}. \tag{8}$$

Ha még $q \geqslant (\mu_f N)^4$ is teljesül, akkor

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f N q)^\varepsilon |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{3} N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{8}}. \tag{9}$$

Az 1. Tétel fontos következményeként a félegész súlyú csúcsformák Fourier-együtthatóira vonatkozó becslések javíthatók (lásd [BlHa08, Corollary 2] és [BM10, Theorem 1.5]), ezek pedig alkalmazhatók ellipszoidokon és hiperbolikus felületeken különféle eloszlási problémákban [Du88, DuSP90], illetve ternér kvadratikus formák előállításszámára a változók megszorításai mellett [Bl08]. Egy másik alkalmazás a következő hibrid szubkonvex becslés a kritikus egyenesen:

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_\varepsilon (N|s|q)^\varepsilon N^{\frac{4}{5}} (|s|q)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{40}}.$$

Végezetül az 1. Tétel fontos összetevője a lenti 2. és 3. Tétel bizonyításának.

A második család, amelyet vizsgálunk, q szintű f primitív csúcsformákból áll, amelyekre a konvexitási becslés így szól:

$$L(f, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f q)^\varepsilon |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}}.$$

A cél egy hasonló korlátot igazolni $\frac{1}{4} - \delta$ kitevővel a q-n (ahol $\delta > 0$ rögzített), amelyben az ordókonstans folytonosan függ az s-től és a μ_f-től. A probléma története dióhéjban:

$\delta = \frac{1}{192}$, ha f holomorf és a melléktípusa triviális, lásd [DFI94b];

$\delta = \frac{1}{262144}$, ha f holomorf, q négyzetmentes és a melléktípus primitív, lásd [DFI01];

$\delta = \frac{1}{23041}$, ha f melléktípusa primitív [DFI02].

Az értekezés második eredménye közös munka Valentin Blomerrel és Philippe Michellel [BHM07b], ami más módszerrel erősebb és általánosabb szubkonvex becslést állít fel a moduláris L-függvényekre.

2. Tétel. *Legyen f egy primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek a szintje q és a melléktípusa nemtriviális. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett fennáll*

$$L(f,s) \ll (|s|\mu_f)^A q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{1889}}, \tag{10}$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

A tétel újdonsága, hogy a melléktípustól a primitivitás helyett csak azt követeli meg, hogy ne legyen triviális[3], és a szubkonvex kitevő is erősebb. A nemprimitív melléktípus felvétele elengedhetetlen az alábbi következményekhez, amik számelméleti alkalmazásokkal bírnak.

2. Következmény. *Legyen K egy másodfokú számtest, és legyen $\mathcal{O} \subset K$ egy K-beli rend, amelynek diszkriminánsa $d_{\mathcal{O}}$. Legyen χ a $\operatorname{Pic}(\mathcal{O})$ egy primitív karaktere. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett fennáll*

$$L(\chi,s) \ll |s|^A \, |d_{\mathcal{O}}|^{\frac{1}{4}-\frac{1}{1889}},$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

3. Következmény. *Legyen K egy harmadfokú számtest, amelynek diszkriminánsa d_K. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett a K Dedekind L-függvényére fennáll*

$$\zeta_K(s) \ll |s|^A \, |d_K|^{\frac{1}{4}-\frac{1}{1889}}, \tag{11}$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

A 3. Következmény lényeges elem Einsiedler–Lindenstrauss–Michel–Venkatesh mély munkájában [ELMV11], amely a moduláris felület zárt geodetikusaira vonatkozó, Duke-tól származó egyenletes eloszlási tétel [Du88, Theorem 1] egy magasabb rangú általánosítása.

A harmadik család, amelyet vizsgálunk, $f \otimes g$ alakú Rankin–Selberg konvolúciókból áll, ahol g egy rögzített primitív csúcsforma és f egy változó primitív csúcsforma. Az ezekhez társított (véges) L-függvényeket lényegében az

$$L(f \otimes g, s) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s}, \qquad \Re s > 1,$$

Dirichlet-sor definiálja, ahol $\approx$ ismét azt jelenti, hogy a két oldal hányadosa elhanyagolható a mi analitikus céljaink szempontjából. Ezeknek az L-függvényeknek a már említettekhez hasonló tulajdonságaik vannak (Euler-szorzat, analitikus folytatás, szimmetria), ezért az f szintjét q-val és a g szintjét D-vel jelölve a következő konvexitási becslést kapjuk a $\Re s = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen:

$$L(f \otimes g, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_f\mu_g Dq)^\varepsilon \, |s|\mu_f\mu_g D^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}.$$

[3] A bizonyítás kiegészíthető úgy, hogy a triviális melléktípus esetét is lefedje.

A cél egy hasonló korlátot igazolni $\frac{1}{2} - \delta$ kitevővel a q-n (ahol $\delta > 0$ rögzített), amelyben az ordókonstans folytonosan függ a többi paramétertől. Ezt a problémát Kowalski–Michel–VanderKam [KMV02] megoldotta arra az esetre, amikor f holomorf és $\chi_f \chi_g$ konduktora (ahol χ_f és χ_g jelöli az f és a g melléktípusát) legfeljebb $q^{\frac{1}{2}-\eta}$ valamilyen $\eta > 0$ mellett; ekkor a megfelelő δ megtakarítás függ az η-tól. A második megszorítást (amelyik a komolyabb) Michel [Mi04] el tudta hagyni abban az esetben, ha g holomorf és $\chi_f \chi_g$ nemtriviális.

Az értekezés harmadik eredménye közös munka Philippe Michellel [HM06], ami még nagyobb általánosságban oldja meg a Rankin–Selberg L-függvényekre vonatkozó szubkonvexitási problémát.

3. Tétel. *Legyen f és g két primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek szintje q és D, melléktípusa χ_f és χ_g. Tegyük fel, hogy $\chi_f \chi_g$ nemtriviális. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett fennáll*

$$L(f \otimes g, s) \ll (|s| \mu_f \mu_g D)^A \, q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{1413}}, \tag{12}$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

A tétel újdonsága, hogy nem tartalmaz megszorítást a benne szereplő csúcsformákra, és a másodlagos paraméterektől való függése polinomiális. Egész pontosan a [HM06] dolgozatban az eredményt az $\frac{1}{2} - \frac{1}{2648}$ kitevővel igazoltuk a q-n, mert annak idején az 1. Tételnek csak egy gyengébb változata állt rendelkezésünkre. Az értekezésben frissítjük a [HM06]-beli kitevőket, illetve jelezzük, hogyan függ a (12)-beli q-kitevő a θ-tól és a (8)-beli kitevőktől.

A fenti szubkonvexitási eredmények segítségével új bizonyítást és finomítást nyerhetünk Duke egyenletes eloszlási tételére [Du88], amit most röviden bemutatunk. Ha $d < 0$ (ill. $d > 0$) egy fundamentális diszkrimináns, akkor jelölje Λ_d az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathscr{H}$ moduláris felület d diszkriminánsú Heegner-pontjainak (ill. zárt geodetikusainak) a halmazát. A Λ_d halmaz és a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ számtest H_d szűk ideálosztály-csoportja között létezik egy természetes bijekció, aminek megfelelően a H_d természetes módon hat a Λ_d-n. A Λ_d teljes térfogata Siegel tétele szerint $|d|^{1/2+o(1)}$, ezért kézenfekvő a kérdés, hogy a Λ_d egyenletesen oszlik-e el az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathscr{H}$-n, amint $|d| \to \infty$. Linnik [Li68] az úttörő ergodikus módszerével be tudta látni az egyenletes eloszlást azon feltétel mellett, hogy a d egy kvadratikus maradék egy tetszőleges rögzített $p > 2$ prímszámra. A kongruencia-feltételtől – meglehetősen más módszerek segítségével – Duke-nak [Du88] sikerült megszabadulnia. Duke – Maass egy megfeleltetését használva – az egyenletes eloszlási problémában felmerülő Weyl-összegeket félegész súlyú Maass-formák Fourier-együtthatóiból fejezte ki, majd az utóbbiakra egy Iwaniec [Iw87] által bevezetett technikával nemtriviális korlátokat bizonyított. A szubkonvexitással való kapcsolat Waldspurger-nak [Wa81] a Shimura-megfeleltetésről szóló munkájából származik, ami mutatja, hogy a szóban forgó Fourier-együtthatók nemtriviális becslése ekvivalens az $L\left(f \otimes \left(\frac{d}{\cdot}\right), \frac{1}{2}\right)$ centrális csavart értékek szubkonvex becslésével, ahol f az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathscr{H}$ Hecke–Maass csúcsformáin és Eisenstein-sorain fut végig. A szükséges korlátok következnek a fenti (7)-ből és (8)-ből.

A 2. és a 3. Tételből a Λ_d jóval kisebb részhalmazainak egyenletes eloszlása is következik (amint $|d| \to \infty$), ha a két eredményt kombináljuk Zhang [Zh01] és Popa [Po06] speciális formuláival a $d < 0$ és a $d > 0$ esetben.

4. Következmény. *Jelölje $d\mu(z)$ (ill. $ds(z)$) a hiperbolikus valószínűségi mértéket (ill. a hiperbolikus ívhosszt) az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}$ moduláris felületen. Legyen $g:\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}\to\mathbb{C}$ egy kompakt tartójú sima függvény.*

- *Ha $d<0$ egy fundamentális diszkrimináns, $H\leqslant H_d$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ szűk ideálosztálycsoportjának egy részcsoportja, továbbá $z_0\in\Lambda_d$ egy d diszkriminánsú Heegner-pont, akkor*

$$\frac{\sum_{\sigma\in H} g(z_0^\sigma)}{\sum_{\sigma\in H} 1}=\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}} g(z)\,d\mu(z)+O_g\left([H_d:H]|d|^{-\frac{1}{2827}}\right). \tag{13}$$

- *Ha $d>0$ egy fundamentális diszkrimináns, $H\leqslant H_d$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ szűk ideálosztálycsoportjának egy részcsoportja, továbbá $G_0\in\Lambda_d$ egy d diszkriminánsú zárt geodetikus, akkor*

$$\frac{\sum_{\sigma\in H}\int_{G_0^\sigma} g(z)\,ds(z)}{\sum_{\sigma\in H}\int_{G_0^\sigma} 1\,ds(z)}=\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}} g(z)\,d\mu(z)+O_g\left([H_d:H]|d|^{-\frac{1}{2827}}\right). \tag{14}$$

Speciálisan, $[H_d:H]\leqslant|d|^{\frac{1}{2828}}$ és $|d|\to\infty$ mellett minden Λ_d-beli H-orbit egyenletesen oszlik el az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}$-n. A fenti becslésekben az ordókonstans a g egy Szoboljev-normájával egyenlő.

Ez a következmény megjavítja a [HM06, Theorem 2] és a [Po06, Theorem 6.5.1] eredményekben szereplő numerikus értékeket. Másfelől [HM06] és [Po06] általánosabb aritmetikus hiperbolikus felületeken tárgyalja az analóg eredményt – ettől az értekezésben az egyszerűség végett eltekintünk.

Végezetül megemlítjük, hogy a (8), (10), (12) becsléseket sikeresen alkalmazták jópár egyéb szituációban, lásd [MV07, Sa07, FM11, KMY11, Ma11, MY11].

IV. Az értekezéshez kapcsolódó szerzői közlemények

[1] T. BERGER, G. HARCOS, ℓ-adic representations associated to modular forms over imaginary quadratic fields, *Int. Math. Res. Not.* **2007**, no. 23, Art. ID rnm113, 16 oldal

[2] V. BLOMER, G. HARCOS, Hybrid bounds for twisted L-functions, *J. Reine Angew. Math.* **621** (2008), 53–79.

[3] V. BLOMER, G. HARCOS, The spectral decomposition of shifted convolution sums, *Duke Math. J.* **144** (2008), 321–339.

[4] V. BLOMER, G. HARCOS, L-functions, automorphic forms, and arithmetic, *Symmetries in Algebra and Number Theory (I. Kersten, R. Meyer eds.)*, 11–25., Universitätsverlag Göttingen, 2009.

[5] V. BLOMER, G. HARCOS, Twisted L-functions over number fields and Hilbert's eleventh problem, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), 1–52.

[6] V. BLOMER, G. HARCOS, A hybrid asymptotic formula for the second moment of Rankin–Selberg L-functions, benyújtva

[7] V. BLOMER, G. HARCOS, P. MICHEL, A Burgess-like subconvex bound for twisted L-functions (with Appendix 2 by Z. Mao), *Forum Math.* **19** (2007), 61–105.

[8] V. BLOMER, G. HARCOS, P. MICHEL, Bounds for modular L-functions in the level aspect, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), 697–740.

[9] G. HARCOS, Uniform approximate functional equation for principal L-functions, *Int. Math. Res. Not.* **2002**, 923–932.; Erratum, *ibid.* **2004**, 659–660.

[10] G. HARCOS, An additive problem in the Fourier coefficients of Maass forms, *Math. Ann.* **326** (2003), 347–365.

[11] G. HARCOS, New bounds for automorphic L-functions, Ph. D. thesis, Princeton University, 2003.

[12] G. HARCOS, Equidistribution on the modular surface and L-functions, *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic*, 377–387, Clay Math. Proc. Vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[13] G. HARCOS, P. MICHEL, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. II, *Invent. Math.* **163** (2006), 581–655.

[14] G. HARCOS, N. TEMPLIER, On the sup-norm of Maass cusp forms of large level. II, benyújtva

Hivatkozások

[BM10] E. M. Baruch, Z. Mao, A generalized Kohnen–Zagier formula for Maass forms, *J. London Math. Soc.* **82** (2010), 1–16. 7

[BR05] J. Bernstein, A. Reznikov, Periods, subconvexity of L-functions and representation theory, *J. Differential Geom.* **70** (2005), 129–141. 2

[Bl04] V. Blomer, Shifted convolution sums and subconvexity bound for automorphic L-functions, *Int. Math. Res. Not.* **2004**, 3905–3926. 6

[Bl08] V. Blomer, Ternary quadratic forms, and sums of three squares with restricted variables, *Anatomy of integers (J. M. de Koninck, A. Granville, F. Luca eds.)*, 1–17., CRM Proc. Lecture Notes, 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. 7

[Bl11] V. Blomer, Subconvexity for twisted L-functions on $GL(3)$, *Amer. J. Math.*, megjelenés alatt 2

[BlHa08] V. Blomer, G. Harcos, Hybrid bounds for twisted L-functions, *J. Reine Angew. Math.* **621** (2008), 53–79. 6, 7

[BlHa10] V. Blomer, G. Harcos, Twisted L-functions over number fields and Hilbert's eleventh problem, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), 1–52. 2

[BHM07a] V. Blomer, G. Harcos, P. Michel, A Burgess-like subconvex bound for twisted L-functions (with Appendix 2 by Z. Mao), *Forum Math.* **19** (2007), 61–105. 6

[BHM07b] V. Blomer, G. Harcos, P. Michel, Bounds for modular L-functions in the level aspect, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), 697–740. 8

[Bu63] D. A. Burgess, On character sums and L-series, *Proc. London Math. Soc.* **12** (1962), 193–206.; II, *ibid.* **13** (1963), 524–536. 6

[By96] V. A. Bykovskiĭ, A trace formula for the scalar product of Hecke series and its applications, translation in *J. Math. Sci. (New York)* **89** (1998), 915–932. 3, 6

[CCU09] F. Chamizo, E. Christóbal, A. Ubis, Lattice points in rational ellipsoids, *J. Math. Anal. Appl.* **350** (2009), 283–289. 2

[CI00] B. Conrey, H. Iwaniec, The cubic moment of central values of automorphic L-functions, *Ann. of Math.* **151** (2000), 1175–1216. 6

[De74] P. Deligne, La conjecture de Weil. I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 274–307. 5

[DI82] J-M. Deshouillers, H. Iwaniec, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, *Invent. Math.* **70** (1982/83), 219–288. 4

[Du88] W. DUKE, Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms, *Invent. Math.* **92** (1988), 73–90. 7, 8, 9

[DFI93] W. DUKE, J. B. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, Bounds for automorphic L-functions, *Invent. Math.* **112** (1993), 1–8. 4, 6

[DFI94a] W. DUKE, J. B. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, A quadratic divisor problem, *Invent. Math.* **115** (1994), 209–217. 4

[DFI94b] W. DUKE, J. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, Bounds for automorphic L-functions. II, *Invent. Math.* **115** (1994), 219–239.; Erratum, *ibid.* **140** (2000), 227–242. 7

[DFI01] W. DUKE, J. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, Bounds for automorphic L-functions. III, *Invent. Math.* **143** (2001), 221–248. 7

[DFI02] W. DUKE, J. B. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, The subconvexity problem for Artin L-functions, *Invent. Math.* **149** (2002), 489–577. 3, 4, 7

[DuSP90] W. DUKE, R. SCHULZE-PILLOT, Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids, *Invent. Math.* **99** (1990), 49–57. 7

[ELMV11] M. EINSIEDLER, E. LINDENSTRAUSS, P. MICHEL, A. VENKATESH, Distribution of periodic torus orbits and Duke's theorem for cubic fields, *Ann. of Math.*, megjelenés alatt 8

[FM11] A. FOLSOM, R. MASRI, The asymptotic distribution of traces of Maass–Poincaré series, *Adv. Math.* **226** (2011), 3724–3759. 10

[Fr95] J. B. FRIEDLANDER, Bounds for L-functions, *Proc. Int. Congr. Math. (Zürich, 1994), Vol. I*, 363–373, Birkhäuser, Basel, 1995. 1

[Ha02] G. HARCOS, Uniform approximate functional equation for principal L-functions, *Int. Math. Res. Not.* **2002**, 923–932.; Erratum, *ibid.* **2004**, 659–660. 2

[Ha03a] G. HARCOS, An additive problem in the Fourier coefficients of Maass forms, *Math. Ann.* **326** (2003), 347–365. 6

[Ha03b] G. HARCOS, New bounds for automorphic L-functions, Ph. D. thesis, Princeton University, 2003. 6

[HM06] G. HARCOS, P. MICHEL, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. II, *Invent. Math.* **163** (2006), 581–655. 9, 10

[Hu72] M. N. HUXLEY, On the difference between consecutive primes, *Invent. Math.* **15** (1972), 164–170. 2

[Iw87] H. IWANIEC, Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight, *Invent. Math.* **87** (1987), 385–401. 9

[IS00] H. Iwaniec, P. Sarnak, Perspectives on the analytic theory of L-functions, *Geom. Funct. Anal. Special Volume* (2000), 705–741. 1, 2

[Ju92] M. Jutila, Transformations of exponential sums, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori 1989)*, 263–270, Univ. Salerno, Salerno, 1992. 4

[Ju96] M. Jutila, A variant of the circle method, *Sieve methods, exponential sums and their applications in number theory*, 245–254, Cambridge University Press, 1996. 4

[Ju99] M. Jutila, Convolutions of Fourier coefficients of cusp forms, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **65(79)** (1999), 31–51. 4

[JM05] M. Jutila, Y. Motohashi, Uniform bounds for Hecke L-functions, *Acta Math.* **195** (2005), 61–115. 2

[JM06] M. Jutila, Y. Motohashi, Uniform bounds for Rankin-Selberg L-functions, *Multiple Dirichlet series, automorphic forms, and analytic number theory*, 243–256, Proc. Sympos. Pure Math., 75, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. 2

[KS99] N. M. Katz, P. Sarnak, Zeroes of zeta functions and symmetry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **36** (1999), 1–26. 1

[KMY11] B. D. Kim, R. Masri, T. H. Yang, Nonvanishing of Hecke L-functions and the Bloch–Kato conjecture, *Math. Ann.* **349** (2011), 301–343. 10

[Ki03] H. Kim, Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 (with Appendix 1 by D. Ramakrishnan and Appendix 2 by H. Kim and P. Sarnak), *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 139–183. 5

[KiSa03] H. Kim, P. Sarnak, Appendix: Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg Conjectures, *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), 175–181. 5

[KiSh02] H. Kim, F. Shahidi, Cuspidality of symmetric powers with applications, *Duke Math. J.* **112** (2002), 177–197. 5

[Kl26] H. D. Kloosterman, On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, *Acta Math.* **49** (1926), 407–464. 4

[KMV00] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications, *Invent. Math.* **142** (2000), 95–151. 3

[KMV02] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, Rankin–Selberg L-functions in the level aspect, *Duke Math. J.* **114** (2002), 123–191. 4, 9

[LLY06] Y.-K. Lau, J. Liu, Y. Ye, A new bound $k^{2/3+\varepsilon}$ for Rankin-Selberg L-functions for Hecke congruence subgroups, *Int. Math. Res. Pap.* **2006**, Art. ID 35090, 78 pp. 2

[Li68] Y. V. LINNIK, Ergodic properties of algebraic fields [translated from the Russian by M. S. Keane], Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 45, Springer-Verlag, New York, 1968. 9

[Li11] X. LI, Bounds for $GL(3) \times GL(2)$ L-functions and $GL(3)$ L-functions, *Ann. of Math.*, **173** (2011), 301–336. 2

[Ma11] R. MASRI, The asymptotic distribution of traces of cycle integrals of the j-function, benyújtva 10

[MY11] R. MASRI, T. H. YANG, Nonvanishing of Hecke L-functions for CM fields and ranks of abelian varieties, benyújtva 10

[Me01] T. MEURMAN, On the binary additive divisor problem, *Number theory (Turku 1999)*, 223–246, de Gruyter, Berlin, 2001. 4

[Mi04] P. MICHEL, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points, *Ann. of Math.*, **160** (2004), 185–236. 3, 6, 9

[Mi07] P. MICHEL, Analytic number theory and families of automorphic L-functions, *Automorphic forms and applications*, 181–295, IAS/Park City Math. Ser. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 1

[MV06] P. MICHEL, A. VENKATESH, Equidistribution, L-functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik, *Proc. Int. Congr. Math. (Madrid 2006), Vol. II*, 421–457, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006 1

[MV07] P. MICHEL, A. VENKATESH, Heegner points and non-vanishing of Rankin/Selberg L-functions, *Analytic number theory*, 169–183, Clay Math. Proc. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 10

[MV10] P. MICHEL, A. VENKATESH, The subconvexity problem for GL_2, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **111** (2010), 171–271. 2

[Po06] A. POPA, Central values of Rankin L-series over real quadratic fields, *Compos. Math.* **142** (2006), 811–866. 9, 10

[Sa03] P. SARNAK, Spectra of hyperbolic surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **40** (2003), 441–478. 1

[Sa07] P. SARNAK, Reciprocal geodesics, *Analytic number theory*, 217–237, Clay Math. Proc. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 10

[Ve10] A. VENKATESH, Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity, *Ann. of Math.* **172** (2010), 989–1094. 2

[Wa81] J.-L. WALDSPURGER, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, *J. Math. Pures et Appliquées* **60** (1981), 374–484. 9

[Zh01] S. ZHANG, Gross–Zagier formula for GL_2, *Asian J. Math.* **5** (2001), 183–290. 9