Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 1. feladatsor

1. Alapfeladatok

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?

2. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A vérvizsgálat beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, míg az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.

   (a) Egy véletlenszerűen választott embernél k-szor függetlenül elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt minden alkalommal betegséget jelez? Mennyi ez $k = 1$-re, $k = 2$-re és $k = 3$-ra? (b) Valakinél k alkalommal végezték el a vizsgálatot, egymástól függetlenül. Feltéve, hogy minden alkalommal betegséget jelzett a teszt, mennyi a valószínűsége, hogy az illető beteg?

3. Véletlenszerűen kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Egy adott x valós számre mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$?

4. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két találomra választott pontjával három részre osztunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkezett szakaszokból szerkeszthető háromszög?

5. Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,

   (a) több a páros, mint a páratlan?
   (b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvőek?

6. (*Osztozkodási probléma*) Hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 5 : 3-as állásnál félbeszakadt a 6 győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy bármelyik játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet az egyes játszmákban, a többi eredménytől függetlenül.

2. Godolkodtató feladatok

1. Egy állásra n pályázó közül szeretnénk a legjobbat kiválasztani. A pályázók véletlenszerű sorrendben bemutatkoznak, és rögtön el kell döntenünk, hogy felvesszük-e a jelöltet, aki éppen bemutatkozott. Alkossunk stratégiát amely maximalizálja annak a valószínűségét, hogy a legjobb pályázót vesszük fel!

2. 100 utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy 100 fős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elvesztette a beszállókártyáját, így véletlenszerűen választ egy helyet, melyre leül. A többi utas egyesével száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helye már foglalt, akkor a még szabad ülések közül véletlenszerűen választ. Mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó utas a saját helyére ül le?

3. Egy gömbfelületen egymástól függetlenül, véletlenszerűen választunk 4 pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott tetraéder tartalmazza a gömb középpontját?

Tanulságok:

- Mi a teendő, ha egy valószínűségszámítás (vagy kombinatorika) feladatban a „legalább” (vagy „legfeljebb”) szót olvassuk?
- Hogyan kezeljünk geometriai valószínűségszámítás feladatokban függetlenül választott pontokat?
- Mi a különbség a kombinatorika (geometria) és a valószínűségszámítás között?
- Tudtok olyan valószínűségszámítás feladatot mondani, ami nem olyan, mint a fentiek?

3. Gyakorló feladatok

1. (*Monty Hall-probléma*) Egy televíziós játékban 3 ajtó közül választhat a játékos, az egyik mögé ajándék van rejtve. A játékos választása után a műsorvezető kinyit egy másik ajtót és megmutatja, hogy ott nincs ajándék. Felajánlja a játékosnak, hogy változtathat. Érdemes-e változtatni?

   Szimuláció: `https://www.randomservices.org/random/apps/MontyHallGame.html`

2. Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban van két ember, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Tegyük fel, hogy minden év 365 napos, és mindenki a többiektől függetlenül minden nap ugyanannyi valószínűséggel születik.) Szimuláció: `https://www.randomservices.org/random/apps/BirthdayExperiment.html`

3. A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

4. Mennyi a valószínűsége, hogy a lottón kihúzott öt szám közötti páronkénti különbségek mindegyike legalább öt? A lottón $1-90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül, feltesszük, hogy minden számötös egyformán valószínű.

4. Elmélet

1. Definíció (Feltételes valószínűség). *Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{ha } P(B) \neq 0.$$

2. Definíció (Események függetlensége). *A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. ($A$ esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva.)*

3. Definíció (Teljes eseményrendszer). *A $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha mindig pontosan egy következik be belőlük. Pontosabban:*

1. $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j-$*re;*
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega.$

4. Tétel (Teljes valószínűség tétele). *Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, és legyen $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

5. Tétel (Bayes tétel). *Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, és legyen $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$