Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 1. feladatsor, megoldások

1. Alapfeladatok

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?

   Megoldás. A: van legalább egy hatos; B: különböző számokat dobtunk.

   Összes lehetőség: 6^3, a dobókocka szabályossága és a szimmetria miatt ezek egyformán valószínűek, alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűségi mezőre vonatkozó összefüggést.

   Bár ez nem volt kérdés, mivel 5^3 olyan lehetőség van, amiben nincs hatos:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = 42,1\%.$$

   Másrészt annak valószínűsége, hogy minden dobás különböző, azaz eltér az előzőektől:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{120}{6^3} = 55,5\%.$$

   Továbbá a B-n belül azok a rossz esetek, amikor hatos sincs, a számok pedig egymástól is eltérnek:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{60}{6^3} = 27,8\%.$$

   Összességében az A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{60}{6^3}}{\frac{120}{6^3}} = \frac{1}{2} = 50\% > \mathbb{P}(A) = 42,1\%.$$

   Másik lehetőség: ugyanannyi olyan eset van, amiben van hatos, mint amiben nincs, ebből is következik, hogy $1/2$ a feltételes valószínűség.

2. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A vérvizsgálat beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, míg az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.

   (a) Egy véletlenszerűen választott embernél k-szor függetlenül elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt minden alkalommal betegséget jelez? Mennyi ez $k = 1$-re, $k = 2$-re és $k = 3$-ra?

   (b) Valakinél k alkalommal végezték el a vizsgálatot, egymástól függetlenül. Feltéve, hogy minden alkalommal betegséget jelzett a teszt, mennyi a valószínűsége, hogy az illető beteg?

   Megoldás. Legyen A az az esemény, hogy a teszt mind a k alkalommal betegséget jelez, B pedig az az esemény, hogy az illető beteg. Ekkor B és a komplementere olyan teljes eseményrendszer, amiben minden eseménynek pozitív a valószínűsége. Tehát alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) = 0,95^k \cdot 0,02 + 0,01^k \cdot 0,98.$$

   Ennek értéke $k = 1$-re $2,8\%$, $k = 2$-re $1,8\%$, és $k = 3$-ra $1,7\%$.

   (b) Valakinél k alkalommal végezték el a vizsgálatot, egymástól függetlenül. Feltéve, hogy minden alkalommal betegséget jelzett a teszt, mennyi a valószínűsége, hogy az illető beteg?

   Az előző jelölésekkel Bayes tételét is alkalmazhatjuk, hiszen A-nak is pozitív a valószínűsége, a többi feltétel pedig továbbra is teljesül. Így

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{0,95^k \cdot 0,02}{0,95^k \cdot 0,02 + 0,01^k \cdot 0,98}.$$

   Ennek értéke $k = 1$-re 66%, $k = 2$-re $99,5\%$ és $k = 3$-ra $99,99\%$.

3. Véletlenszerűen kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Egy adott x valós számra mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$?

Megoldás. Mivel X a nagyobb rész hosszát jelöli, ezért $\frac{1}{2} \leq X < 1$, tehát a keresett valószínűség a következőképpen adható meg:

$$\mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2x - 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

Ugyanis a szimmetria miatt feltehetjük, hogy az osztópont az $(1/2, 1)$ intervallumba esik, ezen belül pedig a nagyobb rész hossza pontosan akkor lesz x-nél kisebb, ha az osztópont $1/2$ és x közé esik, vagyis egy $x - 1/2$ hosszú intervallum lesz megfelelő egy $1/2$ hosszú intervallumon belül, és feltéve, hogy a pontot egyenletes eloszlás szerint választottuk, a valószínűségeket az intervallum hosszával arányosan számíthatjuk ki. Másképpen: akkor lesz $X < x$, ha az osztópont $1 - x$ és x közé esik, vagyis egy $2x - 1$ hosszú intervallum megfelelő a teljes 1 hosszú intervallumból.

Hasonlóképpen, mivel Y a kisebb rész hosszát jelöli, ezért $0 < Y \leq \frac{1}{2}$, vagyis:

$$\mathbb{P}(Y < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

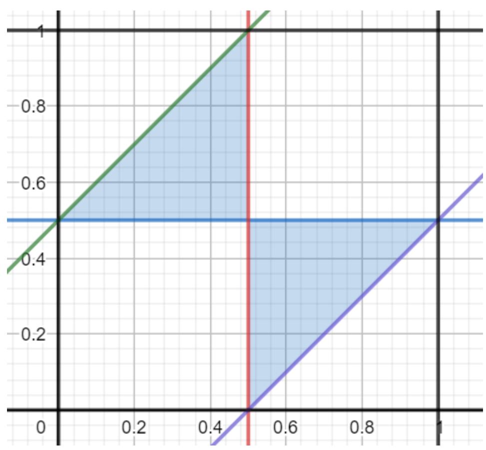
4. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két találomra választott pontjával három részre osztunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkezett szakaszokból szerkeszthető háromszög?

Megoldás. Használjuk a következő jelöléseket: a vizsgált esemény legyen A, a szakasz egyik végpontjának a távolságát a kiválasztott pontoktól jelölje x és y. Ekkor a két pont kiválasztása megfeleltethető azzal, hogy az egységnégyzetből szeretnénk kiválasztani egy (x, y) pontot.

A három szakasz pontosan akkor lehet egy háromszög három oldala, ha közülük bármelyik kettőnek a hossza nagyobb, mint a harmadik hossza. 2 esetet kell megkülönböztetni:

- Ha $x < y$, akkor a 3 szakasz: x, $y-x$, $1-y$. Ahhoz, hogy ezekből a szakaszokból háromszöget tudjunk alkotni, a következő egyenlőtlenségeknek kell teljesülni:
  (i) $x + y - x > 1 - y$, azaz $y > \frac{1}{2}$
  (ii) $x + 1 - y > y - x$, azaz $x + \frac{1}{2} > y$
  (iii) $y - x + 1 - y > x$, azaz $\frac{1}{2} > x$
- Ha $y > x$, akkor az x és y szerepcseréjével a következő egyenlőtlenségek adódnak:
  (i) $x > \frac{1}{2}$
  (ii) $y + \frac{1}{2} > x$
  (iii) $\frac{1}{2} > y$

Azon pontok, melyek a két egyenlőtlenség rendszer egyikét kielégítik az ábra beszínezett részébe esnek. Ez a terület $\frac{1}{4}$, és mivel az egységnégyzet területe 1, ezért $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$.



5. Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,

   (a) több a páros, mint a páratlan?
   (b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvőek?

   Megoldás. (a) Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám van, és a számok szerepe ugyanolyan, annak valószínűsége, hogy több a páros, mint a páratlan, ugyanannyi, mint annak valószínűsége, hogy több a páratlan, mint a páros. Mivel öt számot húzunk, az nem lehet, hogy ugyanannyi páros legyen, mint páratlan. Ezért a kérdéses valószínűség 1/2.

   (b) Bármi is az öt kihúzott szám, $5! = 120$-féle sorrendben lehet őket kihúzni, és minden sorrend egyformán valószínű a szimmetria miatt. A 120-féle lehetséges sorrend közül egy az, amikor a húzás sorrendjében növekvők. Ezért a kérdéses valószínűség

   $$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0,83\%.$$

   Másképpen, ha sorrenddel számolunk, minden számötöshöz egy jó sorrend tartozik, ezért:

   $$\frac{\binom{90}{5}}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{5!}$$

6. (*Osztozkodási probléma*) Hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 5 : 3-as állásnál félbeszakadt a 6 győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy bármelyik játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet az egyes játszmákban, a többi eredménytől függetlenül.

   Megoldás. A második játékos pontosan akkor nyer, ha a következő három játszma mindegyikét ő nyeri, hiszen az első már csak egy nyertes játszmára van a győzelemtől. Mivel a játszmák függetlenek, ennek valószínűsége 1/8, vagyis a valószínűségek szorzata (minden körben 1/2).

   A nyerési valószínűségek arányában elosztva a tétet tehát 7 : 1 a megfelelő arány.

2. Gondolkodtató feladatok

1. Egy állásra n pályázó közül szeretnénk a legjobbat kiválasztani. A pályázók véletlenszerű sorrendben bemutatkoznak, és rögtön el kell döntenünk, hogy felvesszük-e a jelöltet, aki éppen bemutatkozott. Alkossunk stratégiát amely maximalizálja annak a valószínűségét, hogy a legjobb pályázót vesszük fel!

   Megoldás. Vizsgáljuk meg azt a stratégiát, hogy az első k pályázót biztosan nem alkalmazzuk, majd ezután az első olyat kiválasztjuk, aki mindegyik előzőnél jobb. Mekkora a valószínűsége, hogy a legjobb pályázót vesszük fel? Mekkorának érdemes k-t választani, ha n nagy?

   Bontsuk szét a sorrendeket aszerint, hogy hányadikként érkezik a legjobb pályázó. Másképpen, legyen B_j az az esemény, hogy a legjobb pályázó j.-ként érkezik ($j = 1, 2, \ldots, n$). Legyen A az az esemény, hogy a legjobb pályázót választjuk. Világos, hogy $j = 1, 2, \ldots, k$ esetén

   $$\mathbb{P}(A|B_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

   hiszen az első k közül nem választunk. Ha pedig $j = k+1, \ldots, n$, akkor a következő igaz: pontosan akkor választjuk a legjobbat, ha az első $j-1$ pályázó közül a legjobb az első k között érkezett. Ilyenkor ugyanis a $k+1, \ldots, j-1$ közül nem választunk senkit, hiszen az első k közül már láttunk jobbat, ha pedig ez a pályázó nem az első k-ban jön, akkor legkésőbb akkor, amikor ő megérkezik, felveszünk valakit. Tehát

   $$\mathbb{P}(A|B_j) = \frac{k}{j-1} \qquad (j = k+1, \ldots, n),$$

   hiszen ennyi annak valószínűsége, hogy az első $j-1$ pályázó közül a legjobb az első k-ban érkezik.

   A $\{B_j\}_{j=1}^n$ teljes eseményrendszer, ezek közül pontosan az egyik következik be, és mindegyiknek $1/n > 0$ a valószínűsége. Így alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét:

   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k}{j-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Erre zárt képletet nem tudunk adni, de a második kérdésre tudunk közelítő választ adni.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{k}{j-1} \cdot \frac{1}{n} \approx \frac{k}{n} \int_k^n \frac{1}{x}\, dx = \frac{k}{n}(\log n - \log k) = -\frac{k}{n} \log \frac{k}{n}.$$

(Itt log az e alapú logaritmust jelöli.) Ha most $k/n = x$, akkor azt az x-et keressük, amire ez a valószínűség a legnagyobb.

Deriválással:

$$(-x \log x)' = -\log x - 1.$$

Mivel ez pontosan akkor pozitív $x \in [0,1]$ esetén, ha $-\log x - 1 > 0$, azaz $x < 1/e$, ennek a kifejezésnek $x = 1/e$ esetén van maximuma. Tehát körülbelül n/e jelöltet érdemes meghallgatni, és utána az első, minden korábbinál jobbat választani, ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk a legjobb jelöltet választani.

2. 100 utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy 100 fős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elvesztette a beszállókártyáját, így véletlenszerűen választ egy helyet, melyre leül. A többi utas egyesével száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helye már foglalt, akkor a még szabad ülések közül véletlenszerűen választ. Mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó utas a saját helyére ül le?

   Első megoldás: jelölje p_n a keresett valószínséget $n \geq 2$ utas esetén. Figyeljük meg, hogy $p_2 = 1$, és ha az első utas a k-adik helyre ül le ($k \neq 1, n$), akkor a hátralévő utasok pont az $n - k + 1$ emberre vonatkozó feladatot játszák le (a k-adik embert az első helyére képzelve). Így

$$p_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{n} \cdot p_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot p_2 + \frac{1}{n} \cdot 0.$$

   Ebből indukcióval $p_n = 1/2$ adódik minden n-re.

   Második megoldás: amikor az első utas, vagy bármely későbbi utas, akinek foglalt a helye, beszáll, azonos valószínűséggel ül az első utas helyére (mely esetben a végén a 100. utas jó helyre fog ülni), és a 100. utas helyére (mely esetben a 100. utas nem a saját helyén fog ülni). Minden más esetben a döntés csak elodázódik. Vagyis a keresett valószínűség 1/2.

   Harmadik megoldás: A válasz nyilván nem függ attól, hogy pontosan hanyadik helyen ül az első és a 100. utas. Játszuk le a folyamatot két párhuzamos univerzumban úgy, hogy az utasok pontosan ugyanoda ülnek le, de az első és a 100. utas helye a két univerzumban meg van cserélve. Mindkét univerzumban a feladatnak a helyes lefolyása valósul meg, és az egyikben a 100. utas akkor és csak akkor ül a saját helyére, ha a másikban nem. Ha a keresett valószínűség p, akkor az előző érvelés a $p + p = 1$ egyenletet adja, így $p = 1/2$.

3. Egy gömbfelületen egymástól függetlenül, véletlenszerűen választunk 4 pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott tetraéder tartalmazza a gömb középpontját?

   Megoldás. Helyezzük el a pontokat úgy, hogy először csak az átmérőjüket sorsoljuk ki, majd egy szabályos pénzérmével döntsük el, hogy az átmérő melyik végpontját választjuk. A 4 átmérő 1 valószínűséggel különböző, és gömbi értelemben független lesz. Meggondolandó, hogy bármely átmérőkiosztás esetén a 16 lehetséges érmedobás közül pontosan 2 lesz kedvező (ezek egymás komplementerei).

3. Gyakorló feladatok

1. (*Monty Hall-probléma*) Egy televíziós játékban 3 ajtó közül választhat a játékos, az egyik mögé ajándék van rejtve. A játékos választása után a műsorvezető kinyit egy másik ajtót és megmutatja, hogy ott nincs ajándék. Felajánlja a játékosnak, hogy változtathat. Érdemes-e változtatni?

   Szimuláció: `https://www.randomservices.org/random/apps/MontyHallGame.html`

   Megoldás.

$$\mathbb{P}(\text{első ajtó mögött van az ajándék}|\text{második ajtó mögött kecske}) = \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1,3\})} = \frac{1}{2}.$$

$$\Omega = \{1, 2, 3\}$$

a három lehetőség aszerint, hogy melyik mögött van az autó

Mi az egyest választottuk (különben átpermutáljuk), a második mögött kecske van: $\Omega' = \{1, 3\}$

B: az az esemény, hogy amikor először választottunk, az ajándékot rejtő ajtót választottuk

A: nyerünk

Változtatás esetén:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})$$

Érdemes változtatni.

Első stratégia: nincs változtatás. Ebben az esetben a játékos először 1/3 valószínűséggel mutatott az ajándékot tartalmazó ajtóra, tehát összességében is 1/3 valószínűséggel nyeri meg a játékot.

Második stratégia: változtatás. Vegyük észre, hogy ha a játékos először egy üres ajtóra mutat, akkor mindenképpen nyer: a másik két ajtó közül kinyitják az üreset, így a változtatás után ő biztosan az ajándékot rejtő ajtót fogja választani. Ha a játékos először az ajándékot rejtő ajtóra mutatott, akkor viszont, mivel változtat, biztosan nem nyer.

Legyen A az az esemény, hogy a játékos nyer, B az az esemény, hogy az első alkalommal az ajándékot rejtő ajtóra mutatott. A $\{B, \overline{B}\}$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszerre (metszetük üres, uniójuk Ω) alkalmazva a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) = 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3 = 2/3 > 1/3.$$

2. Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban van két ember, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Tegyük fel, hogy minden év 365 napos, és mindenki a többiektől függetlenül minden nap ugyanannyi valószínűséggel születik.) Szimuláció: `https://www.randomservices.org/random/apps/BirthdayExperiment.html`

   Megoldás. Az összes eset száma 365^4, és a feltétel szerint ezek egyformán valószínűek. A rossz esetek száma $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362$, ennyiféleképpen történhet meg, hogy mindenki különböző napon születik. Vagyis a kérdéses valószínűség

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362}{365^4} = 1,6\%.$$

3. A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

   Megoldás. A kérdés ekvivalens azzal, hogy 10 embert kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két csatárt választottunk ki. A kettéosztásnál ugyanis nem különböztetjük meg a „kiválasztott” és „maradék” sportolókat, de minden kettéosztásból kétféleképpen tudunk „kiválasztott” csoportot létrehozni, vagyis a kedvező és összes eset száma is megduplázódik, a valószínűség ugyanaz lesz.

   Tíz embert kiválasztani $\binom{20}{10}$-féleképpen lehetséges. Ebből olyan eset, amikor a kiválasztottak között pontosan két csatár van, $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8}$ van, hiszen meg kell mondanunk, hogy melyik két csatár kerül ide, meg kell mondani, hogy a többi 16 játékos közül ki az a nyolc, aki bekerül, és a csatárok választása bárhogyan kombinálható a többiek választásával, ezért lehet szorozni a kettőt. Összesen tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8}}{\binom{20}{10}} = 41,8\%.$$

4. Mennyi a valószínűsége, hogy a lottón kihúzott öt szám közötti páronkénti különbségek mindegyike legalább öt? A lottón $1 - 90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül, feltesszük, hogy minden számötös egyformán valószínű.

   Megoldás. Az összes eset számötös száma $\binom{90}{5}$ (a sorrend nem számít, csak az, hogy melyik öt számot húztuk), a feltétel szerint ezek egyformán valószínűek. Ha van egy jó számötös:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ nagyság szerint növekvő sorba rendezve, akkor ehhez hozzá tudjuk rendelni az $(x_1, x_2 - 4, x_3 - 8, x_4 - 12, x_5 - 16)$ számötöst, és mivel minden különbség a szomszédos számok között legalább 5 volt, ezzel öt olyan számot kaptunk, amik 1 és $90 - 16 = 74$ között vannak, különbözőek és nagyság szerint növekednek. Ez a hozzárendelés valójában egy bijekció: ha veszünk öt különböző számot 1 és 74 között, melyek nagyság szerint növekednek, akkor a másodikhoz 4-et, a harmadikhoz 8-at, a negyedikhez 12-t, az ötödikhez 16-ot hozzáadva kapunk öt, az eredeti feltételnek megfelelő számot 1 és 90 között, és semmit nem kapunk meg kétszer. Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{74}{5}}{\binom{90}{5}} = 36,7\%.$$