Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 2. feladatsor

1. Alapfeladatok

1. Mennyi egy (szabályos) kockadobás várható értéke?
2. Fej vagy írást játszunk, és mindig a fejre tippelünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy soha sem fogunk nyerni?
3. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Egymástól függetlenül mindenki választ a 10 emelet közül egyet (mindegyiket azonos valószínűséggel), ahol kiszáll. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden emeleten kiszáll valaki?
4. Egy kockával addig dobálunk, amíg hatost nem dobunk. Várhatóan hányadik dobásra kapunk hatost?
5. Péternek 6 szürke, 5 fekete és 3 fehér pólója van. Egy utazás előtt találomra kiválaszt hat különböző pólót, minden lehetőséget azonos valószínűséggel választva.
   (a) Milyen eloszlású a kiválasztott szürke pólók száma?
   (b) Mennyi a kiválasztott szürke pólók számának várható értéke?
   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy minden színből ugyanannyi darabot visz magával az utazásra?
6. Mi egy egység hosszú intervallum egy véletlenszerűen választott pontjának várható „helye”? Fogalmazzuk meg a kérdést várható érték problémaként!

2. Gondolkodtató feladatok

1. Egy majom ül egy írógép előtt, és véletlenszerűen nyomkodja a gombokat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a (végtelen hosszú) papíron előbb-utóbb megjelenik az „abrakadabra” szó?
2. Móriczka a telefonja mellett ül, és nagyon várja, hogy felhívja valaki. Unalmában azon gondolkozik, hogy hogyan modellezhetné az élményt, de az iskolában sajnos csak kombinatorikus valószínűségszámítást tanult. Azt megfigyelte, hogy naponta átlagosan 5 telefonhívást kap, és az az intuitív érzése, hogy minden pillanatban ugyannyira valószínű, hogy felhívják, függetlenül attól, hogy mikor volt az előző hívás. Segítsünk neki matematikai modellt alkotni!
3. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre 1/2-nél nagyobb annak az esélye, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb bekövetkezik, mint a másik. Hasonlítsuk össze az IIF, IFF, FII és FII sorozatokat!

Tanulságok:

- Miért kell a (hátoldalon felsorolt) kombinatorikai alapfogalmakat megtanulni?
- Ha még nem tanultunk folytonos jelenségekről, hogyan tudjuk ket (legalább is megpróbálni) modellezni?

Beadható házi feladat: Anna délelőtt azt mondta Beának, hogy megnézi a Barbie és az Oppenheimer filmek valamelyikét, még nem döntötte el, hogy melyiket, mind a kettőre 50% valószínűséggel esik a választása. Bea mindkét filmet látta, és jól ismeri Annát, ezek alapján azt gondolja, hogy a Barbie 30% valószínűséggel, az Oppenheimer 80% valószínűséggel tetszik Annának.

Bea este kap egy üzenetet Annától, amiben csak annyi szerepel, hogy "szuper volt a film". Ez alapján (Bea "modelljében") mennyi a feltételes valószínűsége, hogy Anna a Barbie-t nézte meg?

3. Gyakorló feladatok

1. Egy csokoládégyárban minden doboz desszertbe 12-féle reklámcédula közül egyet-egyet tesznek. Aki összegyűjti és beküldi mind a 12-félét, jutalmat kap. Mennyi a valószínűsége annak, hogy éppen k dobozzal kell vásárolnunk ahhoz, hogy mindegyik fajta cédulából legyen legalább egy példányunk?

2. Feldobunk egy szabályos dobókockát n-szer. Várhatóan hány darab hatos lesz a dobott számok között? Mennyi a valószínűsége, hogy a hatosok száma pontosan 10?

3. Van egy csomag virágmagunk, amelyről azt tudjuk, hogy elültetve őket, mindegyik egymástól függetlenül 10% eséllyel kikel, 90% eséllyel pedig nem. Hány magot ültessünk a cserépbe, ha azt szeretnénk, hogy pontosan egy virágmag keljen ki? Azaz, hány mag elültetése esetén a legnagyobb az esélye annak, hogy pontosan egy virág kel ki? Ebben az esetben mennyi a kikelő virágok számának várható értéke?

4. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: három urnába tesznek 2-2 golyót, az elsőbe két kéket, a másodikba egy kéket és egy pirosat, a harmadikba két pirosat. A játékos húz egy golyót, megnézi, majd tippelnie kell a másik golyó színére. Ha eltalálja, 4 aranyat kap, ha nem találja el, 6-ot fizet. Játszanátok-e?

4. Elmélet

Kombinatorika emlékeztető

1. Definíció (Ismétlés nélküli permutáció). *n (különböző) elem összes lehetséges sorrendje.*

$$n!.$$

2. Definíció (Ismétléses permutáció). *n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül $k_1, \ldots, k_r$ darab megegyezik.*

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}.$$

3. Definíció (Ismétlés nélküli kombináció). *n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.*

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

4. Definíció (Ismétléses kombináció). *n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), de van visszatevés.*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

5. Definíció (Ismétlés nélküli variáció). *n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.*

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

6. Definíció (Ismétléses variáció). *n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.*

$$n^k.$$