Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 2. feladatsor, megoldások

1. Alapfeladatok

1. Mennyi egy (szabályos) kockadobás várható értéke?

   Megoldás.
$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\ldots+\frac{1}{6}\cdot 6=3,5.$$

2. Fej vagy írást játszunk, és mindig a fejre tippelünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy soha sem fogunk nyerni?

   Megoldás. Jelöljük a feladat megoldását p-vel, persze $0\leq p\leq 1$. Annak a valószínűsége, hogy az első n dobásban nem nyerünk $1/(2^n)$, és a p-nek ennél kisebbnek kell lennie. Ha ez minden n-re igaz, akkor p csak 0 lehet. (Persze emögött az $1/2^n\to 0$ határérték áll, de a megoldást el lehet mondani határérték nélkül is.) Felvetődő kérédések: mi az Ω eseménytér? Érdemes $0,1^{\mathbb{N}}$-nek választani. Mik az események, és mi a P halmazfüggvény? Mértékelmélet kurzus nélkül nem világos, de erre a kérdésre szerencsére tudtunk válaszolni. Tanulság: attól, hogy valami bekövetkezhet, még lehet 0 a valószínűsége!

3. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Egymástól függetlenül mindenki választ a 10 emelet közül egyet (mindegyiket azonos valószínűséggel), ahol kiszáll. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden emeleten kiszáll valaki?

   Megoldás. Legyen A_i az az esemény, hogy az i. emeleten nem száll ki senki ($i=1,...,10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 emeleten kiszáll valaki: $1-\mathbb{P}(A_1\cup\ldots\cup A_{10})$.

   Kezdjük el felírni a szitaformulát. Az első tag:
$$\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\ldots+\mathbb{P}(A_{10})=10\cdot\frac{9^{15}}{10^{15}},$$
   hiszen A_j azt jelenti, hogy a j. emeleten nem száll ki senki, mind a 15 ember a többi 9 emelet közül választhat (tetszőleges elrendezésben), az összes, egyformán valószínű eset száma pedig 10^{15}.

   Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:
$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2)+\mathbb{P}(A_1\cap A_3)+\ldots+\mathbb{P}(A_9\cap A_{10})=\binom{10}{2}\cdot\frac{8^{15}}{10^{15}},$$
   hiszen a tagok száma megegyezik az $1,2,\ldots,10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i\cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. emeleten nem száll ki senki, így mindenki 8-féle emelet közül választhat. Ezt a gondolatmenetet folytatva a szitaformula alapján azt kapjuk, hogy
$$\mathbb{P}(A_1\cup\ldots\cup A_{10})=10\cdot\frac{9^{15}}{10^{15}}-\binom{10}{2}\cdot\frac{8^{15}}{10^{15}}+\binom{10}{3}\cdot\frac{7^{15}}{10^{15}}-\ldots=\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\binom{10}{k}\frac{(10-k)^{15}}{10^{15}}=95,4\%.$$
   Ez tehát annak valószínűsége, hogy legalább az egyik emeleten nem áll meg a lift, így a keresett valószínűség: $100-95,4=4,6\%$.

4. Egy kockával addig dobálunk, amíg hatost nem dobunk. Várhatóan hányadik dobásra kapunk hatost?

   Megoldás: Nehézség: végtelen sok lehetséges kimenetel mellett kell átlagot számolni. Pont a 2-es feladat mutatja, hogy 1 valószínűséggel csak véges sokáig kell várni, így az átlagban nem szerepel majd ∞, mint összeadandó.

   Végtelen összeges megoldás: Írjuk fel az átlagot Annak a valószínűsége, hogy pontosan az n-edik dobásra jön ki az első hatos $(5/6)^{n-1}\cdot(1/6)$. Így a várható érték:
$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot n+\ldots$$

Bontsuk fel, ettől elsőre még rosszabbnak tűnik a helyzet:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{6}\cdot 1 & +\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} & +\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots+ & \\
 & +\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} & +\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots+ & \\
 & & +\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots+ & \\
 & & \ddots &
\end{array}$$

Látszik, hogy érdemes meghatározni az $(1+(5/6)+(5/6)^2+\ldots)$ összeg értékét, mert ha a fenti táblázat i-edik sorából kiemelünk $(1/6)\cdot(5/6)^{i-1}$-t, akkor pont ezt kapjuk. Ez már megy:

$$\begin{array}{rll}
1+\ \tfrac{5}{6}+\left(\tfrac{5}{6}\right)^2+\ldots & =x & /\cdot\frac{5}{6} \\
\tfrac{5}{6}+\left(\tfrac{5}{6}\right)^2+\ldots & =\frac{5}{6}x & /(1)-(2) \\
1 & =\frac{1}{6}x & \Rightarrow x=6.
\end{array}$$

A korábbi felírásunkat így ki tudjuk egészíteni:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{6}\cdot 1 & +\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} & +\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot 6=1 \\
 & +\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} & +\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 6=\frac{5}{6} \\
 & & +\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 6=\left(\frac{5}{6}\right)^2 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Vagyis a jobb oldalakon megint az $(1+(5/6)+(5/6)^2+\ldots)$ összeg van, amit már kiszámoltunk. Így az eredmény 6.

Megjegyzés Az $(1+(5/6)+(5/6)^2+\ldots)$ összeget számolás nélkül is megkaphatjuk, bár ehhez trükkösnek kell lenni. Az 2-es feladatból tudjuk, hogy 1 valószínűséggel véges sok dobás után megállunk. Vagyis a valószínűségek összege 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}=1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}=6.$$

Markov láncos megoldás: Legyen a keresett várható érték y, várhatóan ennyi dobásra van szükség az első hatoshoz. Ha az első dobás hatos, akkor nem kell tovább várakozni, összesen 1 dobásra volt szükség. Ha viszont nem hatos, akkor a dobás után még mindig várhatóan y dobásra van szükség! Vagyis ebben az esetben az elsővel együtt várhatóan $1+y$ dobás kell.

$$y=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}(1+y).$$

Ez y-ban egy lináris egyenlet, amiből $y=6$.

5. Péternek 6 szürke, 5 fekete és 3 fehér pólója van. Egy utazás előtt találomra kiválaszt hat különböző pólót, minden lehetőséget azonos valószínűséggel választva.

(a) Milyen eloszlású a kiválasztott szürke pólók száma?
(b) Mennyi a kiválasztott szürke pólók számának várható értéke?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy minden színből ugyanannyi darabot visz magával az utazásra?

Megoldás. (a) A lehetséges értékek: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Mivel mind a $\binom{14}{6}$ lehetőség egyformán valószínű:

$$\mathbb{P}(k \text{ szürke póló}) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{8}{6-k}}{\binom{14}{6}},$$

ugyanis $\binom{6}{k}$-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik szürke pólókat viszi el, $\binom{8}{6-k}$-féleképpen, hogy melyik nem szürke pólókat viszi el, és ezen lehetőségek számát lehet szorozni, ugyanis bármelyik bármelyikkel megfelelő és különböző lehetőséget ad.

Ez hipergeometrikus eloszlás, $N = 14$, $M = 6$ és $n = 6$ paraméterekkel.

Másképpen: a kiválasztott szürke pólók számát X-szel jelölve X hipergeometrikus eloszlású $n = 6, M = 6$ és $N = 14$ paraméterekkel.

Állítás: minden húzásnál $6/14$ valószínűséggel húzunk szürke pólót, hiszen a pólók szerepének felcserélhetősége miatt minden húzásnál minden póló azonos valószínűséggel jön ki.

Ennek megfelelően a kiválasztott szürke pólók számának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 6 \cdot \frac{6}{14} = 2,57.$$

(c) Az előzőhöz hasonlóan számolhatjuk az összes eset számát, most azonban mindhárom színből két-két darabot kell kiválasztani. A választások most is tetszőlegesen kombinálhatók, így

$$\mathbb{P}(\text{minden színből ugyanannyi}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{14}{6}} = 15\%.$$

6. Mi egy egység hosszú intervallum egy véletlenszerűen választott pontjának várható „helye”? Fogalmazzuk meg a kérdést várható érték problémaként!

   Megoldás. Az egység hosszú intervallum legyen a $[0, 1]$. A kérdés az, hogy ha ebből húzunk egy véletlen számot, akkor az várhatóan mennyi. Intuitíven érezzük, hogy ennek a véletlen számnak a várható értéke $(1/2)$. Vagyis a véletlen pont várható „helye” középen van.

   A feladat fő gondolati nehézsége az, hogy a kimenetelek halmaza már nem is megszámlálható, hanem kontinuum. Ezzel egy időben minden kimenetel valószínűsége 0. Bármely fix pontra annak a valószínűsége, hogy oda esik a véletlen pont láthatóan 0. Hogyan lehet kontinuum sok számot átlagolni, ha ráadásul mindegyiket 0-val kéne súlyozni? Ábrázoljuk egy (nagyon egyszerű) függvénnyel, hogy ha az x pontba érkezik a véletlen pont, akkor mennyi az értéke. Ez persze az $f(x) = x$ függvény. Mennyi ennek a függvénynek az átlaga? Ránézésre is $1/2$, vagy ki is integrálhatjuk.

   Diszkretizálós megoldás. Osszuk az intervallumot n részre, és becsüljük alulról a véletlen pontunk értékét az $1/n$ megfelel többszörösével. (Avagy legyen $X_n = \lfloor n \cdot X \rfloor / n$, ahol X a véletlen pontunk.) Ekkor $X_n \leq X \Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X)$, és előbbit kiszámolva

   $$\frac{1}{n} \cdot \frac{0}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2n} = \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X).$$

   Hasonlóan eljárval felső becslést is adhatunk, legyen $Y_n = \lceil n \cdot X \rceil / n$, és erre

   $$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

   Ez minden n-re igaz, így $\mathbb{E}(X) = 1/2$.

2. Gondolkodtató feladatok

1. Egy majom ül egy írógép előtt, és véletlenszerűen nyomkodja a gombokat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a (végtelen hosszú) papíron előbb-utóbb megjelenik az „abrakadabra” szó?

   Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy a majom rögtön (az 1.től a 11. karakterig) leírja az „abrakadabra”-át ugyan kicsi, de pozitív, jelöljük p-vel. Ha nem sikerül, akkor a 12. és 23. karakterek között újra próbálkozhat, ismét p eséllyel. És így tovább, végtelen sokszor. Ez olyan, mintha cinkelt érmével játszanánk a 2. feladatban, onnan tudjuk, hogy 1 valószínűséggel valamikor sikerülni fog. Persze az lehet, hogy valahol máshol is van „abrakadabra” a papíron, de nekünk az csak jó. Mi azt bizonyítottuk, hogy 1 valósínűséggel lesz olyan „abrakadabra”, ami a $(11k+1)$-edik karakternél kezdődik, és a $11(k+1)$-ediknél ér véget, valamely k-ra. Ez erősebb, mint hogy valahol a papíron van „abrakadabra”.

2. Móriczka a telefonja mellett ül, és nagyon várja, hogy felhívja valaki. Unalmában azon gondolkozik, hogy hogyan modellezhetné az élményt, de az iskolában sajnos csak kombinatorikus valószínűségszámítást tanult. Azt megfigyelte, hogy naponta átlagosan 5 telefonhívást kap, és az az intuitív érzése, hogy minden pillanatban ugyannyira valószínű, hogy felhívják, függetlenül attól, hogy mikor volt az előző hívás. Segítsünk neki matematikai modellt alkotni!

   Megoldás. Első kb 5 perc innen: https://www.youtube.com/watch?v=rBIQmwaoZfs. Aztán lehet ezt olvasgatni.

3. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre 1/2-nél nagyobb annak az esélye, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb bekövetkezik, mint a másik. Hasonlítsuk össze az IIF, IFF, FII és FFI sorozatokat!

   Megoldás.

   FFI esélye az IFF ellen: 1/4.

   IFF esélye az IIF ellen: 1/3.

   IIF esélye az FII ellen: 1/4.

   FII esélye az FFI ellen: 1/3. A szimmetria miatt valójában csak két különböző esetet kell megnéznünk, a másik két esetben ugyanígy működik a számolás. Nézzük FFI és IFF összehasonlítását. Ha dobtunk egy I-t, akkor biztosan IFF jön előbb, hiszen amikor először megjelenik két FF, akkor már előtte egy I lesz. Ha az első két dobás FI, akkor ugyanez a helyzet. Ha az első két dobás FF, akkor biztosan az FFI nyer, akkor, amikor az első I megjelenik. Ezért az FFI pontosan akkor nyer, ha az első két dobás FF, ennek 1/4 a valószínűsége. Nézzük IFF és IIF összehasonlítását. Az alábbi állapotokat különböztethetjük meg az eddigi dobássorozat vége szerint. Vegyük észre, hogy az elején dobott fejek nem számítanak, a játék valójában akkor indul, amikor az első I megjelenik, így az első F-eket nem is vesszük külön állapotnak. Vegyük észre azt is, hogy az II állapotból biztosan az IIF nyer, akkor, amikor ezután az első F megjelenik.

   $$I, IF, \mathbf{IFF}, \mathbf{II}.$$

   Legyen p_a annak valószínűsége, hogy az a állapotból az IFF jelenik meg előbb, mint IIF. Ekkor a teljes valószínűség tétele alapján, arra a teljes eseményrendszerre, hogy a következő dobás fej, illetve írás (ezek komplementerek, ezért teljes eseményrendszert alkotnak), az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:

   $$\begin{aligned} p_I &= \frac{1}{2}p_{IF} + \frac{1}{2}p_{II} = \frac{1}{2}p_{IF}; \\ p_{FF} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{FF}; \\ p_{IF} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_I; \end{aligned}$$

   Az egyenletrendszert megoldva kapjuk a fenti megoldást.

3. Gyakorló feladatok

1. Egy csokoládégyárban minden doboz desszertbe 12-féle reklámcédula közül egyet-egyet tesznek. Aki összegyűjti és beküldi mind a 12-félét, jutalmat kap. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

éppen k dobozzal kell vásárolnunk ahhoz, hogy mindegyik fajta cédulából legyen legalább egy példányunk?

Megoldás. Annak valószínűségét, hogy k doboz már elég, vagyis k doboz vásárlása esetén egyik fajta sem hiányzik, a 3. feladathoz hasonlóan számolhatjuk (A_j lehet az az esemény, hogy a j. fajta cédula hiányzik):

$$\mathbb{P}(k \text{ doboz elég }) = 1 - \sum_{j=1}^{12} (-1)^{j+1} \binom{12}{j} \frac{(12-j)^k}{12^k}.$$

Annak valószínűsége, hogy pontosan k doboz kell, ezután így írható fel:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ doboz kell}) = \mathbb{P}(k \text{ doboz elég }) - \mathbb{P}(k-1 \text{ doboz elég }) =$$
$$= \sum_{j=1}^{12} (-1)^{j+1} \binom{10}{j} \frac{(12-j)^{k-1}}{10^{k-1}} - \sum_{j=1}^{12} (-1)^{j+1} \binom{10}{j} \frac{(12-j)^k}{10^k}.$$

2. Feldobunk egy szabályos dobókockát n-szer. Várhatóan hány darab hatos lesz a dobott számok között? Mennyi a valószínűsége, hogy a hatosok száma pontosan 10?

   Megoldás. A dobott hatosok száma, amit X-szel jelölünk, binomiális eloszlású. Ez alapján a hatosok számának várható értéke:
$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{n}{6}.$$
   Annak valószínűsége, hogy pontosan 10 darab hatos lesz:
$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{n}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-10}.$$

3. Van egy csomag virágmagunk, amelyről azt tudjuk, hogy elültetve őket, mindegyik egymástól függetlenül 10% eséllyel kikel, 90% eséllyel pedig nem. Hány magot ültessünk a cserépbe, ha azt szeretnénk, hogy pontosan egy virágmag keljen ki? Azaz, hány mag elültetése esetén a legnagyobb az esélye annak, hogy pontosan egy virág kel ki? Ebben az esetben mennyi a kikelő virágok számának várható értéke?

   Megoldás. A kikelő virágok száma binomiális eloszlású n renddel és $p = 0,1$ paraméterrel. Így a pontosan egy virág kihajtásának valószínűsége:
$$p_n = n \cdot 0,1 \cdot 0,9^{n-1}.$$
   Írjuk fel két szomszédos valószínűség hányadosát:
$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(n+1) \cdot 0,1 \cdot 0,9^n}{n \cdot 0,1 \cdot 0,9^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot 0,9.$$
   Ez azt jelenti, hogy $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1$ pontosan akkor teljesül, ha $n \leq 9$, és $n = 9$-re egyenlőség van. Ebből következik, hogy $n = 9$ és $n = 10$ esetén ugyanannyi a valószínűség, és ez adja a maximumot.

   A várható érték binomiális eloszlás esetén: $\mathbb{E}(X) = np = 10 \cdot 0,1 = 1$.

4. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: három urnába tesznek 2-2 golyót, az elsőbe két kéket, a másodikba egy kéket és egy pirosat, a harmadikba két pirosat. A játékos húz egy golyót, megnézi, majd tippelnie kell a másik golyó színére. Ha eltalálja, 4 aranyat kap, ha nem találja el, 6-ot fizet. Játszanátok-e?

   Megoldás: Először is kiszámoljuk, hogy mekkora eséllyel tudunk nyerni, ez egy feltételes valószínűség feladat. Ha mindig a húzott golyóval azonos színre tippelünk, akkor 2/3 valószínűséggel fogunk nyerni.

   Miből derül ki, hogy érdemes-e játszani? Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét! Ez persze $(2/3) \cdot 4 + (1/3) \cdot (-6) = 2/3$. Mivel ez pozitív, átlagosan körönként 2/3 aranyat nyerni fogunk, tehát érdemes játszani.