Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 4. feladatsor

1. Alapfeladatok

1. Tegyük fel, hogy az, hogy Péter hány emailt, illetve hány facebook-üzenetet kap egy napon, egymástól független valószínűségi változók. Az emailek száma X, ennek várható értéke 5, a facebook-üzenetek száma Y, ennek várható értéke 8, és mindkét valószínűségi változó Poisson-eloszlású.
   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Péter összesen 10 üzenetet kap egy nap alatt a két felületen összesen?
   (b) Milyen eloszlású az egy nap alatt érkező összes üzenet száma, azaz $X+Y$?
   (c) Mennyi $X+Y$ várható értéke és szórása?
   (d) Feltéve, hogy Péter egy nap alatt összesen 10 üzenetet kapott, mennyi a valószínűsége, hogy ebből 5 érkezett emailen, és 5 facebookon?

2. Legyen N Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Jelölje X a fejek, Y az írások számát egy független, szabályos érmedobásokból álló sorozat első N dobása között. Független-e X és Y?

3. A rulettben 37 számozott mező van: 18 fekete, 18 piros, és a zöld 0. Lehet például fogadni a nyertes szám színére (piros vagy fekete), és ha nyerünk, megduplázzák a tétünket, ha veszítünk akkor a feltett összeget elveszítjük. Játszanátok-e?

4. Móricka leül a rulettasztalhoz, és a következőt játssza: feltesz egy aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal feláll az asztaltól, és abbahagyja. Ha veszít, akkor feltesz két aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ha veszít, feltesz 4 aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ugyanígy tovább, mindig duplázza a feltett összeget, egészen addig, amíg egyszer végül nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke? Hogyan egyeztethető ez össze az előző feladat eredményével?

5. Móricka a következő játékot játssza a bankkal. Ha fizet 1 aranyat, akkor dobhat egy dobókockával, és ha hatost dob, kap 6 aranyat. Érdemes játszania? Móriczka úgy dönt, hogy ha már itt van, játszik, méghozzá pontosan addig, amíg először nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke?

6. Egy bolha ugrál a számegyenesen, minden másodpercben 1/2 valószínűséggel jobbra illetve balra egyet (0-ból indul). A (-10) és 20 pontokban azonban szakadék található. Mekkora valószínűséggel fog a bolha a 20-nál található szakadékban elhalálozni?

2. Gondolkodtató feladatok

1. A síkot rácsozzuk be függőleges, egymástól 2 egység távolságra lévő egyenesekkel! Dobjunk a síkra véletlenszerűen egy egység hosszú tűt (szakaszt). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?
   (a) Próbáljuk ki egy doboz gyufával!
   (b) Fogalmazzuk át a feladatot várható érték problémává!
   (c) Hogyan változik az eredmény, hogyha egy fele akkora tűt dobunk a síkra?
   (d) Mi a helyzet, hogyha egy középen meghajlított, törtszakasz alakú tűt dobunk a síkra?
   (e) Milyen alakú tűt lenne jó a síkra dobni, hogy könnyű legyen kiszámolni a megoldást?

2. Egy bolha ugrál a számegyenesen, minden másodpercben 2/3 valószínűséggel jobbra illetve 1/3 valószínűséggel balra egyet (0-ból indul). A (-10) és 20 pontokban azonban szakadék található. Mekkora valószínűséggel fog a bolha a 20-nál található szakadékban elhalálozni? Mennyi a bolha várható élettartama?

3. Aladár fej-vagy-írást játszik a Bankkal. Eredetileg 10 arannyal indul, és addig játszik, amíg 30 aranya nem lesz, vagy elfogy minden pénze. Minden körben megválaszthatja, hogy mennyi aranyat akar feltenni, legfeljebb persze annyit, amennyi pénze éppen van. Mekkora eséllyel nyer, ha a lehető legjobb stratégiával játszik?

Tanulságok:

- Mik a Poisson eloszlás kényelmes tulajdonságai?
- Miért érdemes bizonyos feladatoknál a Markov láncos érvelések mellett igazságos játékos (martingálos) érveléseket is használni?

Beadható házi feladat október 14-ig: Házi feladat október 2., hétfő, 8:30-ig Egy biztosítónál azt figyelték meg, hogy száraz időjárású napokon a káresetek száma (egy gépjármű-biztosításnál) Poisson-eloszlású 100 paraméterrel, esős napokon szintén Poisson-eloszlású 200 paraméterrel. Azt is tudjuk, hogy januárban minden nap a többitől függetlenül $0,6$ valószínűséggel száraz, $0,4$ valószínűséggel esős.

Megnézték a tavalyi év első öt napját, így alakult a káresetek száma: $174, 203, 185, 199, 167$.

Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy a tavalyi év első öt napjának mindegyike esős volt? (Persze ennek utána is lehet nézni, de most képzeljük el, hogy ez az nem áll rendelkezésre, csak a feladatban szereplő információk alapján számoljunk.)

3. Gyakorló feladatok

1. Egy szövegben a sajtóhibák száma λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A lektor a hibákat egymástól függetlenül p valószínűséggel kijavítja, illetve $1-p$ valószínűséggel nem veszi őket észre.
   (a) Határozzuk meg a megmaradó hibák számának eloszlását.
   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó hibák száma páros?
2. Móricka a következő játékot játssza a bankkal. Ha fizet k aranyat, akkor dobhat egy dobókockával, és ha hatost dob, kap $6k$ aranyat. Móriczka úgy dönt, hogy ha már itt van, játszik, méghozzá a következő stratégia szerint: alapból minden körben 1 aranyat fizet, azonban ha egyszer nyer, akkor a következő körben a nyereményét is felteszi, vagyis 7 aranyat fizet. Pontosan addig játszik, amíg 7 aranyos tét mellett először nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke? Melyik korábbi feladatra kapunk ezzel új megoldást?