Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 4. feladatsor, megoldások

1. Alapfeladatok

1. Tegyük fel, hogy az, hogy Péter hány emailt, illetve hány facebook-üzenetet kap egy napon, egymástól független valószínűségi változók. Az emailek száma X, ennek várható értéke 5, a facebook-üzenetek száma Y, ennek várható értéke 8, és mindkét valószínűségi változó Poisson-eloszlású.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Péter összesen 10 üzenetet kap egy nap alatt a két felületen összesen?
   (b) Milyen eloszlású az egy nap alatt érkező összes üzenet száma, azaz $X+Y$?
   (c) Mennyi $X+Y$ várható értéke és szórása?
   (d) Feltéve, hogy Péter egy nap alatt összesen 10 üzenetet kapott, mennyi a valószínűsége, hogy ebből 5 érkezett emailen, és 5 facebookon?

   Megoldás. (a) Ez a (b) speciális esete, elég azt megoldani. (b) A teljes valószínűség tételét használjuk az $\{X=l\}, l=0,1,2,\ldots$ teljes eseményrendszerre, valamint azt, hogy X és Y függetlenek. Legyen $\lambda=5$ és $\mu=13$. Mivel a Poisson-eloszlás paramétere megegyezik a várható értékével, ezek egyben az X és Y paraméterei is. Ez alapján:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{P}(X+Y=k|X=l)\mathbb{P}(X=l)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(Y=k-l)\mathbb{P}(X=l)=\\ &=\sum_{l=0}^{k}\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!}\cdot e^{-\mu}\cdot\frac{\lambda^l}{l!}\cdot e^{-\lambda}=\\ &=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mu^{k-l}\cdot\lambda^l=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!},\end{aligned}$$

   ahol az utolsó lépésben a binomiális tételt használtuk. Vagyis $X+Y$ 13 paraméterű Poisson-eloszlású. Ezzel ezt bizonyítottuk be:

   1. Állítás. *Legyenek X és Y független λ, illetve μ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $X+Y$ eloszlása Poisson-eloszlás $\lambda+\mu$ paraméterrel.*

   Az (a)-ra visszatérve: a valószínűség $\frac{13^{10}}{10!}e^{-10}=8,19\%$. (c) Mivel $X+Y$ Poisson-eloszlású 13 paraméterrel, várható értéke 13, szórása $\sqrt{13}=3,61$. Általában az lesz igaz, hogy $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$ és $D(X+Y)=\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}$, ha X és Y függetlenek. (d) A feltételes valószínűség definíciója, illetve az X és Y függetlensége alapján, valamint felhasználva, hogy $X+Y$ Poisson-eloszlású 13 paraméterrel:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=5|X+Y=10) &= \frac{\mathbb{P}(X=5,X+Y=10)}{\mathbb{P}(X+Y=10)}=\frac{\mathbb{P}(X=5)\cdot\mathbb{P}(Y=5)}{\mathbb{P}(X+Y=10)}=\\ &=\frac{\frac{5^5}{5!}\cdot e^{-5}\cdot\frac{8^5}{5!}\cdot e^{-8}}{\frac{13^{10}}{10!}\cdot e^{-13}}=\binom{10}{5}\left(\frac{5}{13}\right)^5\left(\frac{8}{13}\right)^5=18,7\%.\end{aligned}$$

   Általában, amikor Poisson-eloszlásúak és függetlenek a tagok, akkor a feltételes eloszlás binomiális.

2. Legyen N Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Jelölje X a fejek, Y az írások számát egy független, szabályos érmedobásokból álló sorozat első N dobása között. Független-e X és Y?

   Megoldás. Először vegyük észre, hogy tetszőleges $k,l\geq 0$ egészekre

$$\mathbb{P}(X=k,Y=l)=\mathbb{P}(N=k+l)\cdot\binom{k+l}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+l}=\frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}e^{-(k+l)}\binom{k+l}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+l}.$$

Ezt átalakíthatjuk így:

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-k} \cdot \frac{(\lambda/2)^l}{l!} e^{-l}. \tag{1}$$

Másrészt

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-k} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^l}{l!} e^{-l} \right) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-k}.$$

Kihasználtuk, hogy a szumma értéke 1, ami például abból látszik, hogy ezek pont egy $\lambda/2$ paraméterű Poisson eloszlás valószínűségei.

Ugyanezt kiszámolhatjuk Y-ra is, és ez alapján $\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$-re is (1) jobb oldalát kapjuk, tehát X és Y függetlenek, mindeketten Poisson-eloszlásúak, $\lambda/2$ paraméterrel.

Az előző két feladat azt az intuíciónkat erősíti meg, hogy két független, de különböző színű Poisson pontfolyamat uniója ugyanaz, mintha először az úniójukat generálnánk (az intenzitásokat összeadva), majd független (az intenzitásokkal súlyozott) pénzfeldobásokkal döntenénk el a pontok színét.

3. A rulettben 37 számozott mező van: 18 fekete, 18 piros, és a zöld 0. Lehet például fogadni a nyertes szám színére (piros vagy fekete), és ha nyerünk, megduplázzák a tétünket, ha veszítünk akkor a feltett összeget elveszítjük. Játszanátok-e?

   Megoldás. A nyereményünk várható értéke

   $$\frac{18}{37} \cdot (+1) + \frac{19}{37}(-1) = -\frac{1}{37} < 0.$$

   Tehát nem érdemes játszani. A kaszinók (a fogyasztás mellett) ebből az 1/37-edből élnek.

4. Móricka leül a rulettasztalhoz, és a következőt játssza: feltesz egy aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal feláll az asztaltól, és abbahagyja. Ha veszít, akkor feltesz két aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ha veszít, feltesz 4 aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ugyanígy tovább, mindig duplázza a feltett összeget, egészen addig, amíg egyszer végül nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke? Hogyan egyeztethető ez össze az előző feladat eredményével?

   Megoldás. Vegyük észre, hogy amikor Móricka nyer épp eggyel több aranyat nyer, mint amennyit eddig feltett. Vagyis ha valaha nyer, akkor 1-et nyer. Viszont annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb nyer 1, ezt egy korábbi feladatból tudjuk. Tehát a nyereményének a várható értéke 1.

   Ez látszólag ellentmond annak, hogy a rulett negatív várható értékű játék. Ennek ellenére a mindkét megoldás helyes. Móricka stratégiájával a valóságban az a baj, hogy ha csak véges sok pénze van, akkor nem tudja vég nélkül duplázni a tétet. Ugyan nagy valószínűséggel sok kör alatt nyer egy picit, de egy kis valószínűséggel bukja az összes pénzét, így valóban negatív lesz a várható értéke. Általában a kaszinók minimum és maximum tétje nincs olyan messze egymástól, hogy sokszor lehessen duplázni.

5. Móricka a következő játékot játssza a bankkal. Ha fizet 1 aranyat, akkor dobhat egy dobókockával, és ha hatost dob, kap 6 aranyat. Érdemes játszania? Móriczka úgy dönt, hogy ha már itt van, játszik, méghozzá pontosan addig, amíg először nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke?

   Megoldás. Móricka várható nyereménye egy játék során $(1/6) \cdot (6 - 1) + (5/6) \cdot (-1) = 0$, tehát a játék sem nem nyereséges, sem nem veszteséges. Vagyis ha 0 pénzzel indul, akkor az első kör után várhatóan megint 0 pénze lesz. És a második kör után? Akkor is várhatóan 0, és így tovább minden körben. Tehát a megállás pillanatában is, amikor először nyert, a vagyonának várható értéke 0.

   Ebben az a pláne, hogy tudjuk, hogy most kapott pontosan 6 aranyat, korábban semennyit. A vagyona 6 minusz a lejátszott körök száma. Ha ennek a várható értéke 0, akkor az azt jelenti, hogy az első hatos dobásra várhatóan 6 dobásra van szükség. Vagyis kaptunk egy új megoldást a korábbi feladatra!

   Első észrevétel. Biztos, hogy jó ez a gondolatmenet? Abból, hogy az n-edik kör után 0 a várható értéke Móricka nyereményének, következik az, hogy a megállás pillanatában is 0 a nyeremény várható értéke? Persze, hogy nem, tudunk is ellenpéldát mondani: az előző, tétduplázós stratégia. (Ha szeretnénk módosíthatjuk úgy, hogy 0 várható értékű legyen, nyerjen 1/2 valószínűséggel.) A duplázós stratégia esetén a megállás pillanatában a nyeremény (konkrét, nem csak várható) értéke 1, ami nem 0.

Mégis, ebben az esetben jó a válasz, hiszen ezzel meg tudjuk oldani a geometriai eloszlás várható értékét, és az arra kapott megoldást két-három másik módszerrel is kiszámoltuk. Mi a különbség a két jelenség között? Van egy intuitív következtetésünk: ha minden időpontban 0 a várható érték, akkor a megállás pillanatában is. Miért működik az egyik, és miért nem a másik esetben? A válasz az, hogy az egyik esetben a tétek korlátosak, ekkor működik a következtetésünk. A másik esetben nőnek, ráadásul nagyon gyorsan, ekkor nem működik a következtetésünk. Lásd még: Doob opcionális matringál megállítási tétele.

Második észrevétel. Ez a gondolatmenet egy új módszert ad várható érték feladatok megoldására. Egy olyan játékot, aminél a nyeremény várható értéke 0 *igazságos játéknak*, vagy egyetemi matekban *martingálnak* hívunk. Ha egy várható érték feladathoz ki tudunk találni egy igazságos játékot, akkor az jó eséllyel segít megoldani.

6. Egy bolha ugrál a számegyenesen, minden másodpercben 1/2 valószínűséggel jobbra illetve balra egyet (0-ból indul). A (-10) és 20 pontokban azonban szakadék található. Mekkora valószínűséggel fog a bolha a 20-nál található szakadékban elhalálozni?

   Martingálos megoldás. A bolha helyzete egy igazságos játék, hiszen minden ugrás után várhatóan a 0-ban lesz. Tehát a halála pillanatában is a várható helyzete 0. Ha p valószínűséggel a 20-ban végzi, akkor $(1-p)$-vel a (-10)-ben, és tudjuk, hogy a várható helyzete 0:

$$p \cdot 20 + (1-p) \cdot (-10) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{3}.$$

   Markov láncos megoldás. Markov lánccal is meg lehet csinálni, lényegében számolás nélkül. Jelölje p_i annak a valószínűségét, hogy a bolha az i-ből indulva a 20-ban végzi. Ekkor minden p_i a szomszédok átlaga, tehát p_i számtani sorozat, ami lineárisan nő $p_{-10} = 0$ és $p_{20} = 1$ között. Vagyis $p_0 = (1/3)$.

2. Gondolkodtató feladatok

1. A síkot rácsozzuk be függőleges, egymástól 2 egység távolságra lévő egyenesekkel! Dobjunk a síkra véletlenszerűen egy egység hosszú tűt (szakaszt). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

   (a) Próbáljuk ki egy doboz gyufával!
   (b) Fogalmazzuk át a feladatot várható érték problémává!
   (c) Hogyan változik az eredmény, hogyha egy fele akkora tűt dobunk a síkra?
   (d) Mi a helyzet, hogyha egy középen meghajlított, törtszakasz alakú tűt dobunk a síkra?
   (e) Milyen alakú tűt lenne jó a síkra dobni, hogy könnyű legyen kiszámolni a megoldást?

   Megoldás. Majd később, még nem beszéltük meg.

2. Egy bolha ugrál a számegyenesen, minden másodpercben 2/3 valószínűséggel jobbra illetve 1/3 valószínűséggel balra egyet (0-ból indul). A (-10) és 20 pontokban azonban szakadék található. Mekkora valószínűséggel fog a bolha a 20-nál található szakadékban elhalálozni? Mennyi a bolha várható élettartama?

   Megoldás. Majd később, még nem beszéltük meg.

3. Aladár fej-vagy-írást játszik a Bankkal. Eredetileg 10 arannyal indul, és addig játszik, amíg 30 aranya nem lesz, vagy elfogy minden pénze. Minden körben megválaszthatja, hogy mennyi aranyat akar feltenni, legfeljebb persze annyit, amennyi pénze éppen van. Mekkora eséllyel nyer, ha a lehető legjobb stratégiával játszik?

   Megoldás. Ez a feladat pont ugyanaz, mint bolhás feladat, azzal a különbséggel, hogy itt nem feltétlen egyet lépünk jobbra vagy balra. Ez viszont a matringálos megoldáson nem változtat, hiszen csak azt használtuk, hogy minden lépés várható értéke 0 (hogy igazságos legyen a játék), és hogy a lépések mérete korlátos (hogy használhassuk a Doob tételt). Vagyis nincs jó stratégia, mindenképpen (1/3) valószínűséggel nyer Aladár. **Tanulság:** véges méretű vagyon mellett a kaszinókban nincs jó vagy rossz stratégia.

3. Gyakorló feladatok

1. Egy szövegben a sajtóhibák száma λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A lektor a hibákat egymástól függetlenül p valószínűséggel kijavítja, illetve $1-p$ valószínűséggel nem veszi őket észre.

   (a) Határozzuk meg a megmaradó hibák számának eloszlását.
   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó hibák száma páros?

   Megoldás.

   (a) Jelölje N az sajtóhibák számát, ekkor $N \sim Poisson(\lambda)$. Továbbá legyen X a megmaradó hibák száma. Ekkor a 2. feladathoz hasonlóan $X \sim Poisson(\lambda(1-p))$.

   Ebből következik, hogy a megmaradó hibák számának várható értéke $(1-p)\lambda$, eredetileg pedig λ volt a hibák várható száma.

   (b) Az eloszlás ismeretében könnyen meghatározhatjuk annak a valószínűségét, hogy X páros.

$$\mathbb{P}(X \text{ páros}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda(1-p)} = \frac{1 - e^{-2\lambda(1-p)}}{2} = \cosh((1-p)\lambda) \cdot e^{-\lambda(1-p)},$$

   felismerve a hiperbolikus koszinusz Taylor-sorát, vagy levonva a váltott előjelű hatványsort.

2. Móricka a következő játékot játssza a bankkal. Ha fizet k aranyat, akkor dobhat egy dobókockával, és ha hatost dob, kap $6k$ aranyat. Móriczka úgy dönt, hogy ha már itt van, játszik, méghozzá a következő stratégia szerint: alapból minden körben 1 aranyat fizet, azonban ha egyszer nyer, akkor a következő körben a nyereményét is felteszi, vagyis 7 aranyat fizet. Pontosan addig játszik, amíg 7 aranyos tét mellett először nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke? Melyik korábbi feladatra kapunk ezzel új megoldást?

   Megoldás. A tétek korltosan, így a nyeremény várható értéke (Doob tétele miatt) 0. Mivel minden körben 1 új aranyat fizet (közbülső nyereményeit felteszi és elbukja), és a végén 42 arany nyereménnyel távozik, azt kapjuk, hogy várhatóan 42 kört játszott. Ez egy új megoldás a két egymás utáni hatos dobás idejének várható értékére.