Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 5. feladatsor

1. Alapfeladatok

1. Legyen X sűrűségfüggvénye $\dfrac{c}{x^4}$ ha $x > 1$, és 0 különben.
   a) Mennyi c értéke?
   b) Számítsuk ki X momentumait minden olyan $k \geq 1$-re, melyre ez véges.
   c) Mennyi X szórása?
2. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x + y)$, ha $x, y \in (0, \pi/2)$, és 0 máshol. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját, illetve korrelációs együtthatóját.
3. Egy szabályos kockával 100-szor dobunk. Jelölje X az első 50 dobás során kapott 6-osok számát, Y pedig az utolsó 75 dobás során dobott páros számok számát. Számoljuk ki $Y - X$ szórásnégyzetét.
4. Legyenek $1 < k < m < n$ egészek. Tegyük fel, hogy $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, azonos eloszlásúak és véges szórásúak. Számoljuk ki $X_1 + \cdots + X_m$ és $X_k + \cdots + X_n$ korrelációs együtthatóját.
5. Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet 6 várható értékű 2 szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet legfeljebb 10 fok? Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 8 és 10 fok közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 0 és 12 fok közé esik?
6. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

2. Gondolkodtató feladatok

1. Jelölje ϑ_r az r hosszú ciklusok számát az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy véletlen permutációjában. Számítsuk ki ϑ_r várható értékét és szórásnégyzetét.
2. Legyenek X_1, $X_2, \ldots$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $i \geq 1$-re $0 < D^2(X_i) < \infty$ és minden $1 \leq i < j$ esetén X_i és X_j korrelációs együtthatója r. (Ahol az $-1 \leq r \leq 1$ szám nem függ i-től és j-től.) Mutassuk meg, hogy $r \geq 0$.
3. Adjunk példát három olyan valószínűségi változóra, amiknek páronként ugyanannyi a korrelációjuk, és ez a közös érték negatív.

Beadható házi feladat november 11-ig: Négy ember beteszi a ruhatárba a táskáját, a ruhatáros azonban mindenkinek véletlenszerűen ad vissza egyet (tehát a négy táska minden lehetséges kiosztása egyformán valószínű). Legyen X az olyan emberek száma, akik valaki más táskáját kapták. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!

3. Gyakorló feladatok

1. Legyen X egyenletes eloszlású az $[1, 4]$ intervallumon. Számítsuk ki $(X - 1)^2$ várható értékét!
2. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ c \cdot x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

   Mennyi c értéke? Mennyi annak valószínűsége, hogy X értéke $1/4$ és $1/2$ közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy $1/2$ és $3/4$ közé esik? Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

3. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $c(x+y)$, ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$, és 0 különben. Határozzuk meg c értékét, az együttes eloszlásfüggvényt, X sűrűségfüggvényét, valamint X és Y korrelációs együtthatóját.

4. Legyenek A és B tetszőleges események.

   (a) Számoljuk ki $\mathbb{I}_A$ és $\mathbb{I}_B$ korrelációs együtthatóját (itt $\mathbb{I}$ az indikátort jelöli).

   (b) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{I}_A$ és $\mathbb{I}_B$ pontosan akkor korrelálatlan, ha A és B függetlenek.

5. Tegyük fel, hogy Anna busszal és metróval megy a munkahelyére. A buszozás időtartama normális eloszlású 20 várható értékkel és 2 szórással, a metrózás időtartama normális eloszlású 15 várható értékkel és 1 szórással.

   (a) Mennyi annak valószínűsége, hogy Anna utazása legfeljebb 40 percig tart?

   (b) Mikor kell elindulnia otthonról, hogy legalább 95% valószínűséggel odaérjen 9-re a munkahelyére?

   (c) Számítsuk ki a buszozással töltött idő és a teljes utazás idejének korrelációs együtthatóját.

   Felhasználhatjuk, hogy független normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású.