Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 6. feladatsor

1. Alapfeladatok

1. Egy 32 lapos magyar kártyapakliból a 4 ász és a 4 király van a kezünkben. Ebből választunk 2 lapot visszatevés nélkül. Jelölje X a kapott piros színű, Y pedig a kapott zöld színű lapok számát.

   (a) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.

   (b) Számoljuk ki X és Y várható értékét, szórásnégyzetét, valamint X és Y korrelációs együtthatóját.

2. Egy cukrászdában kétféle terméket árulnak. Tegyük fel, hogy a fagylaltot kérők száma (ez legyen X), Poisson-eloszlású 50 paraméterrel, a süteményt kérők száma Poisson-eloszlású 150 paraméterrel (ez legyen Y), és hogy X és Y függetlenek. A fagylalt ára 300 forint, a süteményé 500.

   (a) Mennyi a napi bevétel várható értéke, illetve szórása?

   (b) Számítsuk ki X-nek és napi bevételnek a korrelációs együtthatóját.

3. Mihez és hogyan konvergál független szabályos kockadobások mértani közepe?

4. ξ_j-k független 3 paraméterű Poisson eloszlású változók. Mihez és hogyan konvergál

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}?$$

5. Adjunk példát olyan (X_n) valószínűségi változókból álló sorozatra, mely

   (a) 1 valószínűséggel konvergens, de L^p-ben nem konvergens;

   (b) L^p-ben konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens.

6. Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $X_n - X \to 0$ eloszlásban? Itt X, illetve (X_n) ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók sorozata.

7. Mutassunk arra példát, hogy X_n, X azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $X_n \to X$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

2. Gondolkodtató feladatok

1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók úgy, hogy minden n-re $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$ és $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(X_n) = 0$ minden n-re, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = -1$$

   teljesül 1 valószínűséggel.

2. Adjunk példát olyan (X_n) valószínűségi változókból álló sorozatra, mely sztochasztikusan konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens (ebből következik, hogy nem 1 valószínűséggel konvergens).

3. Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X-hez.

Házi feladat november 18-ig. Legyen az X_n valószínűségi változó Poisson-eloszlású, melynek várható értéke $1/\sqrt{n}$. Igaz-e, hogy az (X_n) sorozat sztochasztikusan konvergens, ha $n \to \infty$? Ha igen, mi a limesze?

3. Gyakorló feladatok

1. Egy osztályba 16 fiú és 20 lány jár. Tegyük fel, hogy minden tanítási napon egymástól függetlenül a fiúk $0,04$, a lányok $0,05$ valószínűséggel hiányoznak. Legyen X a jövő hétfőn hiányzó fiúk, Y pedig a jövő hétfőn hiányzó lányok száma.

   (a) Számítsuk ki az összes jövő hétfői hiányzó, vagyis $X+Y$ várható értékét.
   (b) Számítsuk ki X, Y és $X+Y$ szórását.
   (c) Mennyi X és Y kovarianciája?
   (d) Mennyi X és $X+Y$ kovarianciája?
   (e) Mennyi X és $X+Y$ korrelációs együtthatója?

2. Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, X várható értéke 4, Y várható értéke pedig 10.

   (a) Mennyi $X+Y$ várható értéke?
   (b) Mennyi $X+Y$ szórása?
   (c) Mennyi X és $X+Y$ korrelációs együtthatója?
   (d) Mennyi $2X+3Y$ és $X-Y$ kovarianciája?
   (e) Mennyi $2X-Y$ szórása?