**Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 6. feladatsor, megoldások**

# 1. Alapfeladatok

1. Egy 32 lapos magyar kártyapakliból a 4 ász és a 4 király van a kezünkben. Ebből választunk 2 lapot visszatevés nélkül. Jelölje $X$ a kapott piros színű, $Y$ pedig a kapott zöld színű lapok számát.

   (a) Adjuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlását.

   (b) Számoljuk ki $X$ és $Y$ várható értékét, szórásnégyzetét, valamint $X$ és $Y$ korrelációs együtthatóját.

   **Megoldás.** Az együttes eloszlást az alábbi táblázattal adhatjuk meg:

| $X/Y$ | 0 | 1 | 2 | összesen |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{6}{\binom{8}{2}}$ | $\frac{8}{\binom{8}{2}}$ | $\frac{1}{\binom{8}{2}}$ | $\frac{15}{\binom{8}{2}}$ |
| 1 | $\frac{8}{\binom{8}{2}}$ | $\frac{4}{\binom{8}{2}}$ | 0 | $\frac{12}{\binom{8}{2}}$ |
| 2 | $\frac{1}{\binom{8}{2}}$ | 0 | 0 | $\frac{15}{\binom{1}{2}}$ |
| összesen | $\frac{15}{\binom{8}{2}}$ | $\frac{12}{\binom{8}{2}}$ | $\frac{1}{\binom{8}{2}}$ | 1 |

   Az $X$ hipergeometrikus eloszlású, $N = 8, M = 2, n = 2$ paraméterekkel, várható értéke és szórása ebből is kiszámítható. Nézzük meg definíció alapján is:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{12}{\binom{8}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{2 \cdot 2}{8} = n\frac{M}{N}.$$

   Illetve

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{12}{\binom{8}{2}} + 2^2 \cdot \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

   Ebből:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{4}{7} - \frac{1}{4} = \frac{9}{28} = 0,312.$$

   A zöld és piros színek szimmetriája miatt $Y$ várható értéke és szórásnégyzete ugyanannyi.

   Most számítsuk ki a korrelációs együtthatót.

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} kl\mathbb{P}(X = k, Y = l) = 1 \cdot \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}.$$

   Ebből a korrelációs együttható:

$$R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{\frac{1}{28} - \frac{1}{4}}{\frac{9}{28}} = -\frac{6}{9} = -0,66.$$

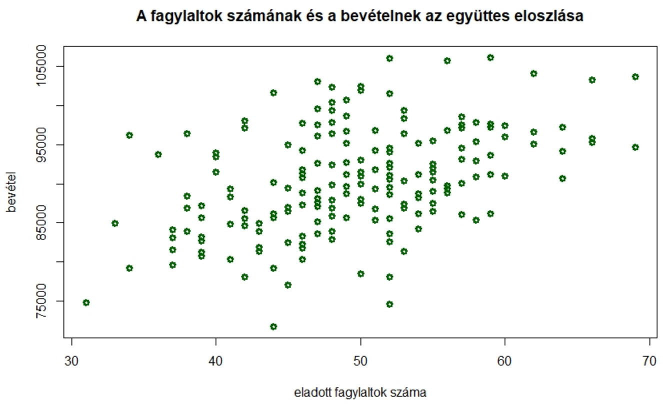
   A korrelációs együttható közepes (gyenge közepes) lineáris jellegű összefüggést mutat, ami negatív: minél nagyobb $X$, annál kisebb $Y$ (ami a feladat jellegéből is természetesen adódik).

2. Egy cukrászdában kétféle terméket árulnak. Tegyük fel, hogy a fagylaltot kérők száma (ez legyen $X$), Poisson-eloszlású 50 paraméterrel, a süteményt kérők száma Poisson-eloszlású 150 paraméterrel (ez legyen $Y$), és hogy $X$ és $Y$ függetlenek. A fagylalt ára 300 forint, a süteményé 500.

   (a) Mennyi a napi bevétel várható értéke, illetve szórása?

   (b) Számítsuk ki $X$-nek és napi bevételnek a korrelációs együtthatóját.

   **Megoldás.**




1. ábra. Az X és 300X+500Y együttes eloszlása 200 kísérletből

(a) Használjuk fel a várható érték linearitását, illetve azt, hogy a Poisson eloszlás paramétere a várható értékkel egyezik meg. $E(300 \cdot X + 500 \cdot Y) = 300 \cdot E(X) + 500 \cdot E(Y) = 300 \cdot 50 + 500 \cdot 150 = 90000$
Mivel $X$ és $Y$ függetlenek, és $D^2(X) = 50$, $D^2(Y) = 150$, ezért $D^2(300 \cdot X + 500 \cdot Y) = 300^2 D^2(X) + 500^2 D^2(Y) = 42000000 \Rightarrow D(300 \cdot X + 500 \cdot Y) = \sqrt{42000000} \approx 6480,74$

(b) A kovariancia tulajdonságai, illetve $X$ és $Y$ függetlensége miatt $cov(X, 300 \cdot X + 500 \cdot Y) = 300 \cdot cov(X, X) + 500 \cdot cov(X, Y) = 300 \cdot D^2(X) + 0 = 300 \cdot 50$. Tehát a korrelációs együttható: $R(X, 300 \cdot X + 500 \cdot Y) = \dfrac{cov(X, 300 \cdot X + 500 \cdot Y)}{D(X) \cdot D(300 \cdot X + 500 \cdot Y)} = \dfrac{300 \cdot 50}{\sqrt{50} \cdot 6480,74} \approx 0,327$

```
fagyi=rpois(200, lambda=50)
suti=rpois(200, lambda=150)
bevetel=300*fagyi+500*suti
eladas=fagyi+suti
plot(bevetel~fagyi, lwd="3", col="darkgreen", main="A fagylaltok számának és a bevételnek
az együttes eloszlása", xlab="eladott fagylaltok száma", ylab="bevétel")
```

3. Mihez és hogyan konvergál független szabályos kockadobások mértani közepe?

**Megoldás.** Emlékeztető: ha $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1)$$

teljesül 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Ez a **nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye**.

A mértani közép, ha $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ a dobások:

$$\sqrt[n]{X_1 X_2 \ldots X_n}$$

Legyen $X_i$ : $i$-edik kockadobás és $Y_n = \sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$.Ekkor

$$Y_n = e^{\ln(Y_n)} = e^{\frac{1}{n}(\ln(X_1)+\cdots+\ln(X_n))} \longrightarrow e^{\mathbb{E}(\ln(X_1))}$$

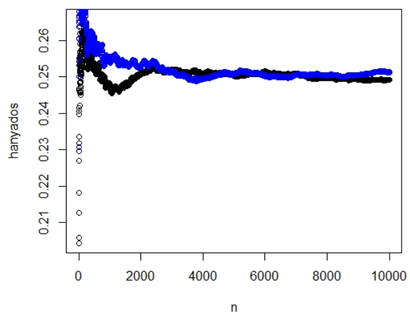
1 valószínűséggel.

Itt $\ln X_1, \ln X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, a várható értékük véges, erre alkalmazhatjuk a nagy számok erős törvényét.

$$\mathbb{E}(\ln(X_1)) = \frac{1}{6}(\ln(1) + \cdots + \ln(6)) = \frac{\ln 6!}{6}$$

Ezután azt használtuk, hogy az exponenciális függvény folytonos.

Mindebből $Y_n \longrightarrow \sqrt[6]{6!}$.




2. ábra. A $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)$ hányados $n$ függvényében két független sorsolásból

4. $\xi_j$-k független 3 paraméterű Poisson eloszlású változók. Mihez és hogyan konvergál
$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}?$$

   **Megoldás.**
$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} = \frac{(\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)/n} \longrightarrow \frac{E\xi_1}{E\xi_1^2} = \frac{3}{3+3^2} = \frac{1}{4}$$
   A számlálóban a nagy számok erős törvényét alkalmazva (teljesülnek a feltételek) a limesz 1 valószínűséggel 3.

   A $\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots$ is függetlenek. Az is látható (mivel $\xi$ és $\xi^2$ között most egy bijekció van), hogy azonos eloszlásúak. Véges várható értékűek, hiszen a Poisson-eloszlás szórása is véges. A nevezőben is alkalmazhatjuk a nagy számok erős törvényét. A limesz 1 valószínűségi értelemben
$$\mathbb{E}(\xi_1^2) = D^2(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_1)^2 = \lambda + \lambda^2 = 3 + 9 = 12.$$
   Azt használjuk, hogy két 0 valószínűségű esemény uniója is 0 valószínűségű (a szitaformula felső becslést ad), ezért annak valószínűsége is 1, hogy a számláló és nevező is a megadott értékekhez konvergál.

5. Adjunk példát olyan $(X_n)$ valószínűségi változókból álló sorozatra, mely

   (a) 1 valószínűséggel konvergens, de $L^p$-ben nem konvergens;
   (b) $L^p$-ben konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens.

   **Megoldás.** A valószínűségi mező mindkét esetben legyen a $[0,1]$ intervallum a Borel-halmazokkal és rajta a Lebesgue-mértékkel.

   (a) $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $X_n(\omega) = 2^n \cdot \mathbb{I}_{\{\omega < 1/n\}}$.
   (b) A valószínűségi változókat, melyek tehát $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények, csoportokban definiáljuk, az egyes csoportok mérete $2, 4, 8, 16, \ldots$, azaz a 2-hatványok. A $k$. csoporthoz bontsuk fel a $[0,1]$ intervallumot $2^k$ egyforma hosszú intervallumra (minden pontot pontosan egyszer fedve le), és a $k$. csoporton belül a $j$. valószínűségi változó legyen a $j$. kis intervallum indikátora (1 az intervallumon belül, 0 azon kívül).

   Minden $\omega \in [0,1]$ szám (elemi esemény) minden $k$-ra valamelyik kis intervallumba esik, így minden $k$-ra az adott $2^k$ nagyságú csoport tagjai közül egy esetben 1, a többi esetben 0 lesz az érték, vagyis $X_n(\omega)$. Ebből következik, hogy $X_n(\omega)$ végtelen sokszor veszi fel az 1 és a 0 értékeket is, tehát nem konvergens. Így a sorozat 0 valószínűséggel konvergens. Viszont a különbség $L^p$ normában 0-hoz tart.

6. Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $X_n - X \to 0$ eloszlásban? Itt $X$, illetve $(X_n)$ ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók sorozata.

   **Megoldás.**

   Nem. Két független kockadobás ($Y$, és $Z$) azonos eloszlású, de a külnbségük nem konstans nulla. Legyen tehát $X_n = Y$ minden $n$-re, és $X = Z$, ez ellenpélda.

7. Mutassunk arra példát, hogy $X_n, X$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $X_n \to X$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

   **Megoldás.**

   Ugyanaz a példa, mint az előző feladaban. A különbség konstans pozitív valószínséggel nagyobb, mint 1.

## 2. Gondolkodtató feladatok

1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók úgy, hogy minden $n$-re $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$ és $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(X_n) = 0$ minden $n$-re, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = -1$$

   teljesül 1 valószínűséggel.

   **Megoldás.** A várható érték kiszámítása:

$$\mathbb{E}(X_n) = (n^2 - 1) \cdot \frac{1}{n^2} + (-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

   Másrészt $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) < \infty$, így a Borel–Cantelli-lemma alapján 1 valószínűséggel ezek közül az események közül csak véges sok teljesül. Tehát 1 valószínűséggel van egy $n_0$ (ami függ $\omega$-tól), hogy minden $n \geq n_0$-ra $X_n = -1$. Ha van ilyen $n_0$, akkor világos, hogy az átlag $-1$-hez tart. Tehát az átlag 1 valószínűséggel $-1$-hez tart.

2. Adjunk példát olyan $(X_n)$ valószínűségi változókból álló sorozatra, mely sztochasztikusan konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens (ebből következik, hogy nem 1 valószínűséggel konvergens).

   **Megoldás.** Ugyanaz, mint az 5/b résznél. Minden $0 < \varepsilon < 1$-ra $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \to 0$, hiszen ez a valószínűség éppen annak az intervallumnak a hossza, amelynek $X_n$ az indikátora, ez pedig a $k$. csoportban $1/2^k$ volt, így 0-hoz tart.

   Tehát a megadott sorozat sztochasztikusan tart a 0-hoz (és $L^1$-ben is), de nem konvergál 1 valószínűséggel.

   Másik példa: független, nullához tartó, de végtelen összegű valószínűségű események indikátorainak a sorozata (a Borel–Cantelli-lemma használható arra, hogy belássuk, hogy ezek közül 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik).

3. Bizonyítsuk be, hogy az $(X_n)$ valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az $X$ valószínűségi változóhoz, ha minden $(X_{n_k})$ részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál $X$-hez.

   **Megoldás.** Tegyük fel, hogy minden részsorozatnak van 1 valószínűséggel konvergens részsorozata. Tegyük fel, hogy nem igaz a sztochasztikus konvergencia, vagyis valamely $\varepsilon > 0$-ra

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \delta > 0.$$

   Ez azt jelenti, hogy van egy olyan részsorozat, ami mentén

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) = \delta > 0.$$

   Ebből a részsorozatból válasszunk ki egy 1 valószínűséggel konvergens részsorozatot. Mivel az 1 valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ez a részsorozat sztochasztikusan is konvergál, ez viszont ellentmond ennek a legutóbbi feltételnek. Ellentmondásra jutottunk, vagyis a sorozat sztochasztikusan konvergál.

   Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ sztochasztikusan, és $(X_{n_k})$ egy részsorozat. Kellene: ennek egy 1 valószínűséggel konvergens részsorozata.

   Tudjuk: minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) \to 0.$$

Az $(X_{n_k})$ is sztochasztikusan konvergál. Ezért találhatunk olyan részsorozatot, hogy minden $j$-re

$$\mathbb{P}\left(|X_j^* - X| > \frac{1}{j}\right) \le \frac{1}{2^j}.$$

Ezeknek az összege véges, a Borel–Cantelli-lemma szerint 0 valószínűséggel következik be végtelen sok. Ez elég, mert ha ebből csak véges sok következik be, akkor egy küszöbtől kezdve ez már nem igaz egyetlen $j$-re sem. Ha minden elég nagy $j$-re legfeljebb $1/j$ a különbség, az viszont már elég.

Vagy másképpen: elég nagy $n$-től kezdve már az unió valószínűsége is kisebb $\varepsilon$-nál.

A sztochasztikus konvergencia miatt minden $j \ge 1$-re van olyan $N(j)$, hogy $n \ge N(j)$ esetén

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{1}{j^2}\right) \le \frac{1}{j^2},$$

ugyanis $\varepsilon = \frac{1}{j^2}$ esetén a bal oldalon álló valószínűség 0-hoz tart. Az $(X_{n_k})$-ból válasszunk egy olyan részsorozatot, hogy a $j$. tagra $n_{k_j} \ge N(j)$ legyen, amiből következik, hogy

$$\mathbb{P}\left(|X_{n_{k_j}} - X| > \frac{1}{j^2}\right) \le \frac{1}{j^2}.$$

Ezeknek az eseményeknek a valószínűségeinek véges az összege, így a Borel–Cantelli-lemma szerint közülük 1 valószínűséggel csak véges sok következik be. Ha viszont ezek közül csak véges sok következik be, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra csak véges sok olyan $j$ lesz, amire $|X_{n_{k_j}} - X| > \varepsilon$, vagyis ebből következik, hogy $X_{n_{k_j}} \to X$. Ezzel megkaptuk az 1 valószínűségű konvergenciát.

## 3. Gyakorló feladatok

1. Egy osztályba 16 fiú és 20 lány jár. Tegyük fel, hogy minden tanítási napon egymástól függetlenül a fiúk $0,04$, a lányok $0,05$ valószínűséggel hiányoznak. Legyen $X$ a jövő hétfőn hiányzó fiúk, $Y$ pedig a jövő hétfőn hiányzó lányok száma.

   ($a$) Számítsuk ki az összes jövő hétfői hiányzó, vagyis $X + Y$ várható értékét.

   ($b$) Számítsuk ki $X$, $Y$ és $X + Y$ szórását.

   ($c$) Mennyi $X$ és $Y$ kovarianciája?

   ($d$) Mennyi $X$ és $X + Y$ kovarianciája?

   ($e$) Mennyi $X$ és $X + Y$ korrelációs együtthatója?

   **Megoldás.**

   (a) $X$ és $Y$ is binomiális eloszlású, így

   $$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 16 \cdot 0,04 + 20 \cdot 0,05 = 1,64.$$

   Itt még nem is használtuk, hogy $X$ és $Y$ függetlenek.

   (b) Binomiális eloszlásnál a szórásnégyzet $np(1 - p)$, így a függetlenség miatt

   $$D(X) = \sqrt{16 \cdot 0,04 \cdot 0,96} = 0,784; \quad D(Y) = \sqrt{20 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 0,975;$$

   $$D(X + Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = 1,251.$$

   (c) Mivel $X$ és $Y$ függetlenek, kovarianciájuk 0.

   (d) A kovariancia bilineáris tulajdonsága és $X, Y$ függetlensége alapján

   $$\text{cov}(X, X + Y) = \text{cov}(X, X) + \text{cov}(X, Y) = D^2(X) + 0 = D^2(X) = 0,615.$$

   $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

(e) Az előzőek és a korrelációs együttható definíciója alapján

$$R(X, X+Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, X+Y)}{D(X)D(X+Y)} = \frac{0,614}{0,784 \cdot 1,251} = 0,626.$$

A korrelációs együttható mindig a $[-1, 1]$ intervallumba esik. Ez egy közepes erősségű, pozitív irányú (pozitív az előjel, minél nagyobb $X$, tipikusan annál nagyobb $X+Y$ is), lineáris összefüggésre utal.

2. Legyenek $X$ és $Y$ független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, $X$ várható értéke 4, $Y$ várható értéke pedig 10.

   ($a$) Mennyi $X+Y$ várható értéke?

   ($b$) Mennyi $X+Y$ szórása?

   ($c$) Mennyi $X$ és $X+Y$ korrelációs együtthatója?

   ($d$) Mennyi $2X+3Y$ és $X-Y$ kovarianciája?

   ($e$) Mennyi $2X-Y$ szórása?

   **Megoldás.**

   (a) A várható érték additivitás alapján $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 14$.

   (b) Itt $X+Y$ is Poisson-eloszlású, paramétere a két paraméter összege, azaz 14. Ezért $D(X+Y) = \sqrt{14} = 3,74$.

   (c) Az előző feladathoz hasonlóan

$$R(X, X+Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, X+Y)}{D(X)D(X+Y)} = \frac{D^2(X)}{D(X)D(X+Y)} = \frac{4}{2 \cdot \sqrt{14}} = 0,53.$$

   (d) A kovariancia bilineáris tulajdonsága alapján és $X, Y$ függetlensége miatt

$$\mathrm{cov}(2X+3Y, X-Y) = \mathrm{cov}(2X, X) + \mathrm{cov}(2X, -Y) + \mathrm{cov}(3Y, X) + \mathrm{cov}(3Y, -Y) = 2D^2(X) - 3D^2(Y) = -22.$$

   (e)

$$D(2X-Y) = \sqrt{4D^2(X) + D^2(-Y)} = \sqrt{4D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{26} = 5,1.$$