Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 7. feladatsor

1. Alapfeladatok

1. Legyenek X és Y független kockadobások eredményei. Mennyi $X+Y$ és $X-Y$ kovarianciája? Függetlenek-e?
2. Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?
3. Legyen $n \geq 1$ esetén $\xi_n \sim \text{Poisson}(n)$ és $x \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}} < x\right)$ határértéket.
4. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}(x \geq 0)$, azaz $\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$, és 0 különben. Számítsuk ki és hasonlítsuk össze a $\mathbb{P}(X \geq t)$ és $\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s)$ valószínűségeket, ahol s, t pozitív számok.
5. Arizona egy kis falujában 201-en szavaztak az amerikai elnökválasztáson. Feltételezzük, hogy minden szavazat azonos valószínűséggel érkezik az egyes jelöltekre. A szavazatokat egyenként, sorban egymás után számolták meg. 103-an szavaztak Trumpra, és 98-as Harrisre. Mennyi a valószínűsége, hogy az első három szavazat mindegyikét Trump kapta?
6. Legyen S_n egyszerű szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n, és $\nu_r = \inf\{n : S_n = r\}$ az első olyan időpont, amikor a bolyongás megérkezik az $r > 0$ szintre, M_n pedig az első n lépés során elért legnagyobb szint. Ekkor $n \geq 1,\ n \equiv r \mod 2$ esetén
$$\mathbb{P}(\nu_r \leq n) = \mathbb{P}(M_n \geq r).$$
Bizonyítsuk be, hogy
$$\mathbb{P}(\nu_r = n) = \frac{r}{n}\mathbb{P}(S_n = r).$$

2. Gondolkodtató feladatok

1. Szeretnénk megállapítani, hogy hány dohányos él Budapesten. Ezért megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott budapesti lakost arról, hogy dohányoznak-e (visszatevéses mintavétellel). A Csebisev-egyenlőtlenség alapján milyen nagyra kell n-et választani, ha azt szeretnénk, hogy a kapott relatív gyakoriság legfeljebb 1 százalékot tévedjen (additív értelemben) legalább 95% valószínűséggel? És ha a de Moivre–Laplace-tétel *globális alakját* (illetve a centrális határeloszlástételt) használjuk? (A megoldásban használhatjuk a közelítést a határérték alapján, a hibataggal nem kell számolni.)
2. Arizona egy kis falujában 201-en szavaztak az amerikai elnökválasztáson. Feltételezzük, hogy minden szavazat azonos valószínűséggel érkezik az egyes jelöltekre. A szavazatokat egyenként, sorban egymás után számolták meg. 103-an szavaztak Trumpra, és 98-as Harrisre. Mennyi a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálásnál végig Trump vezetett? Egyenlőséget sem engedünk meg menet közben.

Házi feladat december 2-áig. Egy fesztivál 10000 résztvevője közül mindenki a többiektől függetlenül 1/4 valószínűséggel hallgatja meg az esti fő koncertet. A globális de Moivre–Laplace-tétel alapján közelítve milyen c számra igaz, hogy annak valószínűsége, hogy nem lesz c-nél több ember a koncerten, 98%?

Házi feladat december 2-áig. Számoljuk ki az alábbi határértéket:
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}.$$

3. Gyakorló feladatok

1. Legyen $n \geq 1$ esetén $\xi_n \sim \mathrm{NegBin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ és $x \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n - 2n}{\sqrt{2n}} < x\right)$ limeszt. Vagyis: ha független kísérleteket végzünk, mindegyik $1/2$ valószínűséggel sikerül, akkor ξ_n az n. sikeres kísérlet bekövetkezésének sorszámát jelöli.

2. Legyen $0 < q < 1$ esetén $\xi_q \sim \mathrm{Geo}(q)$ és $x > 0$. Számoljuk ki a $\lim_{q\to 0} \mathbb{P}(q\xi_q < x)$ limeszt. Vagyis: ha független kísérleteket végzünk, mindegyik q valószínűséggel sikerül, akkor ξ_q az első sikeres kísérlet bekövetkezésének sorszámát jelöli. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott

$$x \mapsto \lim_{q\to 0} \mathbb{P}(q\xi_q < x)$$

függvény deriváltja sűrűségfüggvény (azaz nemnegatív és a valós egyenesen vett integrálja 1).