Valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 7. feladatsor, megoldások

1. Alapfeladatok

1. Legyenek X és Y független kockadobások eredményei. Mennyi $X+Y$ és $X-Y$ kovarianciája? Függetlenek-e?

   Megoldás. A kovarianca bilinearlitását használva látjuk, hogy $\mathrm{cov}(X+Y, X-Y) = 0$. (És nem is kell használnunk X és Y függetleneségét.) Viszont $X+Y$ és $X-Y$ nem függetlenek, $X+Y = 12 \Rightarrow X-Y = 0$.

2. Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?

   Megoldás. Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget az fejek számára, vagyis az X valószínűségi változóra, melynek eloszlása binomiális eloszlás: és a várható értéke 50:

$$\mathbb{P}(44 \le X \le 56) = 1 - \mathbb{P}(|X-50| \ge 7) \ge 1 - \frac{D^2(X)}{7^2} = 1 - \frac{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{7^2} = 1 - \frac{25}{49} = 49\%.$$

   Hasonlóképpen, ha Y a fejek száma 1000 dobásból, akkor $n = 1000$ és $\mathbb{E}(Y) = 500$, így

$$\mathbb{P}(440 \le Y \le 560) = 1 - \mathbb{P}(|Y-500| \ge 61) \ge 1 - \frac{D^2(Y)}{61^2} = 1 - \frac{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{61^2} = 93,3\%.$$

   Vagyis ugyanolyan arányok közé esés valószínűségére jobb becslést tudunk mondani, ha több dobás van.

   Az Azuma-egyenlőtlenségből az első esetben 24%, második esetben 99%-os alsó becslés adódik. Ha a globális de Movire-Laplace-szal közelítünk, akkor 74% és 99.99% értéket kapunk.

3. Legyen $n \ge 1$ esetén $\xi_n \sim \mathrm{Poisson}(n)$ és $x \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}} < x\right)$ határértéket.

   Megoldás. Tudjuk korábbról, hogy ha X és Y függetlenek, Poisson-eloszlásúak, akkor $X + Y$ is Poisson-eloszlású, és paramétere a paraméterek összege. Ezért ha $Y_1, Y_2, \ldots$ független 1 paraméterű Poisson-eloszlásúak, ξ_n azonos eloszlású az $Y_1 + \ldots + Y_n$ összeggel. Azt is tudjuk továbbá, hogy Y_1 várható értéke és szórása is 1. Vagyis a kérdéses valószínűség így írható fel:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mathbb{E}(Y_1)}{D(Y_1)\sqrt{n}} < x\right).$$

   Mivel $Y_1, Y_2, \ldots$ függetlenek, azonos eloszlásúak, véges szórásúak, teljesítik a centrális határeloszlástétel feltételeit. A tétel alapján ennek a valószínűségnek a limesze $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\,dx$.

4. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}(x \ge 0)$, azaz $\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$, és 0 különben. Számítsuk ki és hasonlítsuk össze a $\mathbb{P}(X \ge t)$ és $\mathbb{P}(X \ge s+t | X \ge s)$ valószínűségeket, ahol s, t pozitív számok.

   Megoldás. A feltételes valószínűség definícióját és az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének alakját felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \ge s+t | X \ge s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \ge s+t\} \cap \{X \ge s\})}{\mathbb{P}(X \ge s)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X < s+t)}{1 - \mathbb{P}(X < s)} = \\ &= \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = \\ &= e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(X \ge t).\end{aligned}$$

   Ezt nevezik az exponenciális eloszlás **örökifjú tulajdonságának**.

5. Arizona egy kis falujában 201-en szavaztak az amerikai elnökválasztáson. Feltételezzük, hogy minden szavazat azonos valószínűséggel érkezik az egyes jelöltekre. A szavazatokat egyenként, sorban egymás után számolták meg. 103-an szavaztak Trumpra, és 98-as Harrisre. Mennyi a valószínűsége, hogy az első három szavazat mindegyikét Trump kapta?

   Megoldás

   Tekintsük ezt egy egyszerű szimmetrikus bolyongásnak, ahol Trump szavazatai a felfelé, Harris szavazatai a lefelé lépések. Tudjuk, hogy a bolyongás 201 lépés után az 5-ben ér véget. Az ilyen utak száma $\binom{201}{103}$.

   Ezek között kell meghatároznunk a három felfelé lépéssel kezdődő utak arányát, hiszen, mivel minden utat egyformán valószínűnek tételezünk fel, ez adja meg a feltételes valószínűséget. Ilyenkor a 3-ból kell 198 lépés alatt az 5-be jutni, az ilyen utak száma $\binom{198}{100}$ (további 100 felfelé lépés kell). Vagyis a kérdéses valószínűség:

   $$\frac{\binom{198}{100}}{\binom{201}{103}} = \frac{103 \cdot 102 \cdot 101}{201 \cdot 200 \cdot 199},$$

   ami azt is mutatja, hogy számolhatunkúgy is, hogy a 201 beérkezett szavazatot, amiből 103 Trumpra lett leadva, véletlen sorrendben dolgozzák fel.

6. Legyen $\nu_r = \inf\{n : S_n = r\}$ az első olyan időpont, amikor a bolyongás megérkezik az $r > 0$ szintre, M_n pedig az első n lépés során elért legnagyobb szint. Ekkor $n \geq 1$, $n \equiv r \mod 2$ esetén

   $$\mathbb{P}(\nu_r \leq n) = \mathbb{P}(M_n \geq r),$$

   továbbá

   $$\mathbb{P}(\nu_r = n) = \frac{r}{n}\mathbb{P}(S_n = r).$$

   Megoldás

   Az állítás első része könnyen látható: az r szintet pontosan akkor értük el n lépésen belül, ha az első n lépés során a maximum legalább r.

   A második rész bizonyításához: az r szint első elérése csak úgy következhet be az n. lépésben, ha $n-1$ lépés után a maximum $r-1$, a bolyongás is éppen itt tartózkodik, és felfelé lépünk. Ezt átalakíthatjuk úgy, hogy a maximumra alsó becslés legyen, hogy utána használhassuk a tükrözési elvet:

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(\nu_r = n) &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(M_{n-1} = r-1,\ S_{n-1} = r-1) = \\
   &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(M_{n-1} \geq r-1,\ S_{n-1} = r-1) - \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(M_{n-1} \geq r,\ S_{n-1} = r-1) = \\
   &= \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbb{P}(S_{n-1} = r-1) - \mathbb{P}(S_{n-1} = r+1)\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2^n}\left(\binom{n-1}{\frac{n-r}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n-r}{2}-1}\right) = \\
   &= \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{\frac{n-r}{2}} \cdot \left(\frac{n+r}{2n} - \frac{n-r}{2n}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{\frac{n-r}{2}} \cdot \frac{r}{n} \overset{(*)}{=} \frac{r}{n}\mathbb{P}(S_n = r).
   \end{aligned}$$

   A (*) lépésekben az S_n eloszlását használtuk (adott számú lépésből a felfelé menőket választjuk ki, innen adódik a binomiális együttható).

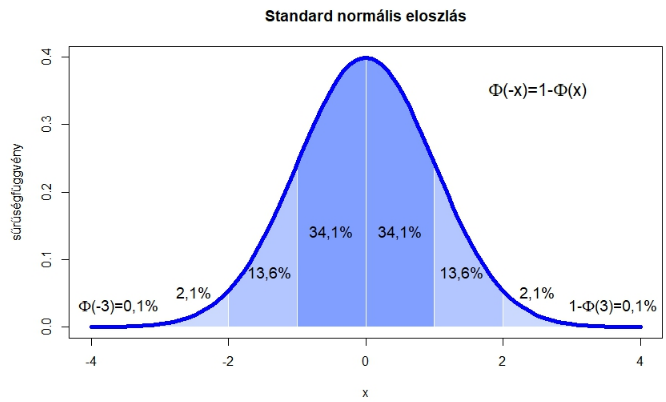
2. Gondolkodtató feladatok

1. Szeretnénk megállapítani, hogy hány dohányos él Budapesten. Ezért megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott budapesti lakost arról, hogy dohányoznak-e (visszatevéses mintavétellel). A Csebisev-egyenlőtlenség alapján milyen nagyra kell n-et választani, ha azt szeretnénk, hogy a kapott relatív gyakoriság legfeljebb 1 százalékot tévedjen (additív értelemben) legalább 95% valószínűséggel? És ha a de Moivre–Laplace-tétel *globális alakját* (illetve a centrális határeloszlástételt) használjuk? (A megoldásban használhatjuk a közelítést a határérték alapján, a hibataggal nem kell számolni.)

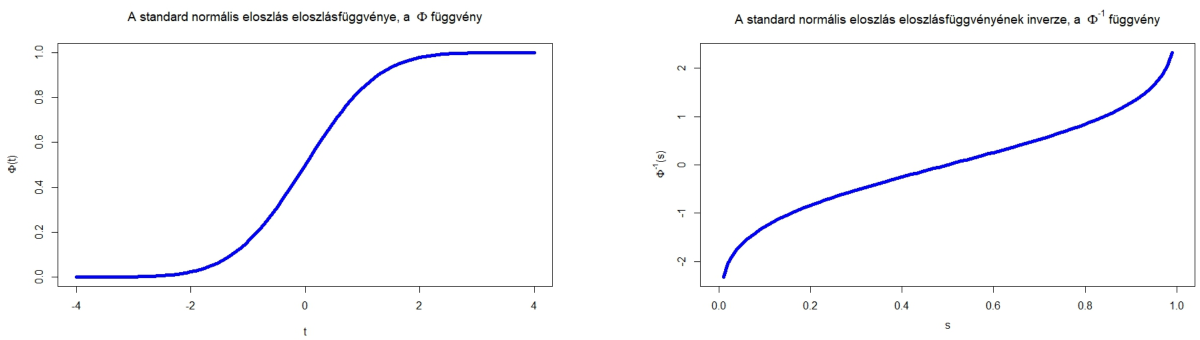
Megoldás. Tegyük fel, hogy minden megkérdezett egymástól függetlenül p valószínűséggel dohányzik ($p \in [0,1]$ ismeretlen). A megkérdezettek száma legyen n (ez ismert, sőt szabadon megválasztható). Itt feltettük, hogy mindenki válaszol, és igazat mond (vagyis nem megbízható válaszok esetén az eredmény sem megbízható), és mindenkit azonos valószínűséggel találunk meg. A függetlenséget viszonylag könnyű biztosítani, ha függetlenül választunk, és a válaszadók nem látják egymás válaszát.

A relatív gyakoriság: Y_n/n, azaz Y_n ember mondta, hogy dohányzik. Itt Y_n binomiális eloszlású, az Y_n/n várható értéke p. Vagyis a feltétel, amit teljesíteni kell: minden $p \in [0,1]$-re

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < 0,01\right) \geq 0,95 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq 0,05. \tag{1}$$



1. ábra. A φ függvény



2. ábra. A standard normális eloszlásfüggvény, azaz $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$ és Φ^{-1}

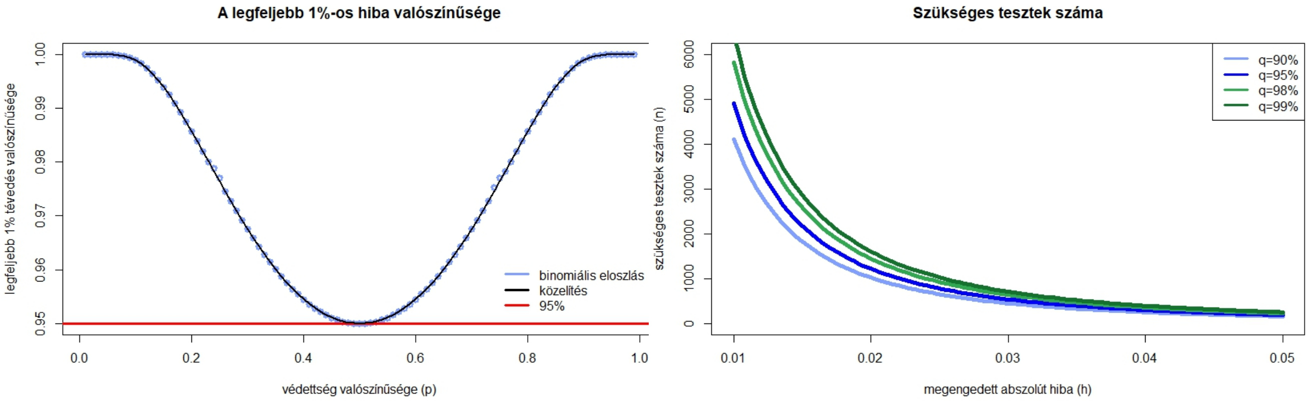
A globális de Moivre–Laplace-tételből a következőt tudjuk (hiszen $\sum_{j=1}^n X_j$ eloszlása binomiális eloszlás n renddel és p paraméterrel):

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{\sum_{j=1}^n X_j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\, dx.$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < 0,01\right) = \mathbb{P}\left(-0,01 \leq \frac{Y_n - np}{n} \leq 0,01\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(-\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$

Itt megjelent Y_n standardizáltja, használhatjuk a globális de Moivre–Laplace-tételt a binomiális eloszlású Y_n-re (bár a tételben a és b rögzített volt, itt pedig a határok is végtelenhez tartanak; a Berry–Esséen-tétel akkor lenne jól használható, ha például $0,1 < p < 0,9$-et tudnánk)

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - p\right| < 0,01\right) \approx \Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1,$$



3. ábra. A szükséges tesztek száma normális közelítéssel néhány megbízhatósági szint mellett a megengedett abszolút hiba függvényében (balra), illetve annak valószínűsége, hogy legfeljebb 1%-ot téved a becslés, a valós p védettségi arány függvényében, $n = 9604$ teszt esetén

a $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ azonosság alapján. Tehát az kell, hogy

$$2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 0,95$$

$$\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0,975$$

$$\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$$

Itt használtuk, hogy a Φ monoton növő. Ebből

$$n \geq 196^2 \cdot p(1-p) = 38416 \cdot p(1-p)$$

Ehhez pedig $p(1-p) \leq 1/4$ alapján elég, hogy

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,01}\right)^2 = 9604.$$

Vagyis $n = 9604$ embert elég megkérdezni. Számítógéppel ellenőrizve ez lényegében a pontos érték (3. ábra), bár talán 9602 is elég.

A másik módszerrel:

Csebisev-egyenlőtlenség véges szórású Y-ra és $t > 0$-ra:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq t) \leq \frac{D^2(Y)}{t^2}.$$

Itt $Y = \sum X_i$ binomiális eloszlású, várható értéke pn. Tehát a Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - p\right| \geq 0,01\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - pn\right| \geq 0,01n\right) \leq \frac{D^2(\sum X_i)}{0,01^2 n^2} = \frac{np(1-p)}{0,01^2 n^2} = \frac{p(1-p)}{0,01^2 n}.$$

Ezért elég, hogy minden p-re

$$\frac{p(1-p)}{n \cdot 0,01^2} \leq 0,05.$$

Mivel $p(1-p) \leq 1/4$ minden p-re, ehhez elég, hogy

$$n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,05} = 50000.$$

Ennek a példának egy részletesebb kifejtése:

https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2020-12/992-mennyit-teszteljunk-2-v3

https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2020-12/992-mennyit-teszteljunk-2-v3

2. Arizona egy kis falujában 201-en szavaztak az amerikai elnökválasztáson. Feltételezzük, hogy minden szavazat azonos valószínűséggel érkezik az egyes jelöltekre. A szavazatokat egyenként, sorban egymás után számolták meg. 103-an szavaztak Trumpra, és 98-as Harrisre. Mennyi a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálásnál végig Trump vezetett? Egyenlőséget sem engedünk meg menet közben.

   Megoldás

   A folyamathoz rendelünk egy egyszerű szimmetrikus bolyongást, mely felfelé lép, ha megszámolnak egy Trump-szavazatot, lefelé, ha megszámolnak egy Harris-szavazatot. Mivel előzetesen azt feltételeztük, hogy mindenki 1/2 valószínűséggel szavaz a két jelöltre, valóban egy egyszerű szimmetrikus bolyongást kapunk. A kérdés így fogalmazható meg: feltéve, hogy a bolyongás $103 - 98 = 5$-ben ér véget, mennyi a valószínűsége, hogy végig pozitív? Vagyis, a $0 \to 5$ utak között hány olyan van, ami végig pozitív?

   Ezt pedig átfogalmazhatjuk úgy, hogy az előző feladathoz hasonlót kapjunk. $X_0 = 0, X_1, X_2, \dots, X_{201}$ helyett tekintsük az $5 - X_{201}, 5 - X_{200}, \dots, 5 - X_1, 5 - X_0$ sorozatot. Ez 0-ból indul, 5-ben ér véget, és ha az X-ek mind pozitívak, akkor ez azt jelenti, hogy ez a folyamat először a 201. lépésben éri el az 5 szintet. Könnyen látható, hogy a módosított folyamat is egyszerű szimmetrikus bolyongás. Ezért a szavazásra vonatkozó kérdés pontos megfelelője ez lesz: feltéve, hogy egy egyszerű szimmetrikus bolyongás 201 lépés után az 5-ben ér véget, mennyi a valószínűsége, hogy korábban nem járt az 5-ben?

   Az előző feladatból rögtön következik, hogy ez a feltételes valószínűség 5/201. Mivel pedig a kérdés ekvivalens az eredetivel, 5/201 annak valószínűsége, hogy Trump végig vezetett a szavazatszámlálás során.

3. Gyakorló feladatok

1. Legyen $0 < q < 1$ esetén $\xi_q \sim \mathrm{Geo}(q)$ és $x > 0$. Számoljuk ki a $\lim_{q\to 0} \mathbb{P}(q\xi_q < x)$ limeszt. Vagyis: ha független kísérleteket végzünk, mindegyik q valószínűséggel sikerül, akkor ξ_q az első sikeres kísérlet bekövetkezésének sorszámát jelöli. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott

$$x \mapsto \lim_{q\to 0} \mathbb{P}(q\xi_q < x)$$

   függvény deriváltja sűrűségfüggvény (azaz nemnegatív és a valós egyenesen vett integrálja 1).

   Megoldás. Mivel ξ_q csak egész értékeket vehet fel, és azt is tudjuk, hogy akkor legalább k az értéke, ha az első $k-1$ kísérlet nem sikerült:

$$\mathbb{P}(q\xi_q < x) = 1 - \mathbb{P}\left(\xi_q \geq \left\lceil \frac{x}{q} \right\rceil\right) = 1 - (1-q)^{\lceil x/q \rceil - 1}.$$

   Itt

$$(1-q)^{x/q-1} \leq (1-q)^{\lceil x/q \rceil - 1} \leq (1-q)^{x/q}.$$

   Ha $q \to 0$, akkor az alsó és a felső becslés is e^{-x}-hez tart.

   Hasonlóképpen a Taylor-sorfejtés alapján

$$(1-q)^{\lceil x/q \rceil - 1} \geq \exp(-q(\lceil x/q \rceil - 1)) \to e^{-x} \qquad (q \to 0).$$

   A negatív x-re nyilvánvaló, hogy a $\mathbb{P}(q\xi_q < x)$ valószínűség limesze 0.

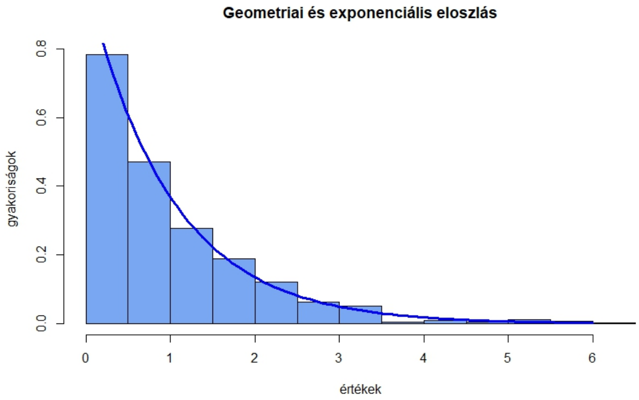
   Tehát a limesz pozitív x-re $1 - e^{-x}$ és különben 0.

   $\lim_{q\to 0} \mathbb{P}(q\xi_q < x) = \mathbb{P}(Y < x) = \int_0^x e^{-s}\, ds$, ahol Y exponenciális eloszlású.

   Ennek deriváltja 0, ha $x < 0$, és e^{-x} különben. Ezért azt kell ellenőriznünk, hogy a függvény majdnem mindenütt nemnegatív, és

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

   Mivel az integrandus primitív függvénye $-e^{-x}$, ez könnyen látható.



4. ábra. A $q\xi_q$ hisztogramja $q = 0,001$ esetén 1000 elemű mintából és az e^{-x} függvény

2. Legyen $n \geq 1$ esetén $\xi_n \sim \text{NegBin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ és $x \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n - 2n}{\sqrt{2n}} < x\right)$ limeszt. Vagyis: ha független kísérleteket végzünk, mindegyik 1/2 valószínűséggel sikerül, akkor ξ_n az n. sikeres kísérlet bekövetkezésének sorszámát jelöli.

   Megoldás. Legyen Y_j az, hogy a $j-1$. sikeres kísérlet után hányat kell várni a j.-re. Ekkor $\xi_n = \sum_{j=1}^n Y_j$.

   Ha $Y_1, Y_2, \ldots$ függetlenek, geometriai eloszlásúak 1/2 paraméterrel, akkor ξ_n eloszlása megegyezik $\sum_{j=1}^n Y_j$ eloszlásával, hiszen Y_j jelentheti azt, hogy a j. sikeres kísérletre mennyit kell várni a $j-1$. után. Azt is tudjuk, hogy $\mathbb{E}(Y_j) = 2$ és $D(Y_j) = \sqrt{(1-p)/p^2} = \sqrt{2}$. Ezért a kérdéses valószínűség így írható fel:
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mathbb{E}(Y_1)}{D(Y_1)\sqrt{n}} < x\right).$$
   Mivel $Y_1, Y_2, \ldots$ függetlenek, azonos eloszlásúak, véges szórásúak, teljesítik a centrális határeloszlástétel feltételeit. A tétel alapján ennek a valószínűségnek a limesze $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\, dx$.