

1. Alapfeladatok

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból
 - (a) van legalább egy hatos?
 - (b) van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?
2. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A vérvizsgálat beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, míg az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.
 - (a) Egy véletlenszerűen választott embernél k -szor függetlenül elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt minden alkalommal betegséget jelez? Mennyi ez $k = 1$ -re, $k = 2$ -re és $k = 3$ -ra? (b) Valakinél k alkalommal végezték el a vizsgálatot, egymástól függetlenül. Feltéve, hogy minden alkalommal betegséget jelzett a teszt, mennyi a valószínűsége, hogy az illető beteg?
3. Véletlenszerűen kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Egy adott x valós számra mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$?
4. Anna és Béla megbeszélték, hogy délután találkoznak a ELTE aulájában, de az időpontot nem beszélték meg. Mindketten 1 és 2 óra között érkeznek (egyenletesen) véletlenszerű időpontban, és mindketten 15 percet várnak a másikra. (Ha az addig nem érkezik meg, akkor hazamennek.) Mekkora a valószínűsége, hogy tényleg találkoznak?
5. Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,
 - (a) több a páros, mint a páratlan?
 - (b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvők?
6. (*Osztzkodási probléma*) Hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 5 : 3-as állásnál félbeszakadt a 6 győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy bármelyik játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet az egyes játszmákban, a többi eredménytől függetlenül.

2. Gondolkodtató feladatok

1. Egy állásra n pályázó közül szeretnénk a legjobbat kiválasztani. A pályázók véletlenszerű sorrendben bemutatkoznak, és rögtön el kell döntenünk, hogy felvesszük-e a jelöltet, aki éppen bemutatkozott. Alkossunk stratégiát amivel a lehető legnagyobb valószínűséggel vesszük fel a legjobb pályázót!
2. 100 utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy 100 fős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elvesztette a beszállókártyáját, így véletlenszerűen választ egy helyet, melyre leül. A többi utas egyesével száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helye már foglalt, akkor a még szabad ülések közül véletlenszerűen választ. Mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó utas a saját helyére ül le?
3. Egy gömbfelületen egymástól függetlenül, véletlenszerűen választunk 4 pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott tetraéder tartalmazza a gömb középpontját?

Tanulságok:

- Mi a teendő, ha egy valószínűségszámítás (vagy kombinatorika) feladatban a „legalább” (vagy „legfeljebb”) szót olvassuk?
- Hogyan kezeljük geometriai valószínűségszámítás feladatokban függetlenül választott pontokat?
- Mi a különbség a kombinatorika (geometria) és a valószínűségszámítás között?
- Tudtok olyan valószínűségszámítás feladatot mondani, ami nem olyan, mint a fentiek?

Beadható házi feladat: Anna délelőtt azt mondta Beának, hogy megnézi a Barbie és az Oppenheimer filmek valamelyikét, még nem döntötte el, hogy melyiket, mind a kettőre 50% valószínűséggel esik a választása. Bea mindkét filmet látta, és jól ismeri Annát, ezek alapján azt gondolja, hogy a Barbie 30% valószínűséggel, az Oppenheimer 80% valószínűséggel tetszik Annának.

Bea este kap egy üzenetet Annától, amiben csak annyi szerepel, hogy "szuper volt a film". Ez alapján (Bea "modelljében") mennyi a feltételes valószínűsége, hogy Anna a Barbie-t nézte meg?

3. Gyakorló feladatok

1. (*Monty Hall-probléma*) Egy televíziós játékban 3 ajtó közül választhat a játékos, az egyik mögé ajándék van rejtve. A játékos választása után a műsorvezető kinyit egy másik ajtót és megmutatja, hogy ott nincs ajándék. Felajánlja a játékosnak, hogy változtathat. Érdemes-e változtatni?
Szimuláció: <https://www.randomservices.org/random/apps/MontyHallGame.html>
2. Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban van két ember, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Tegyük fel, hogy minden év 365 napos, és mindenki a többiektől függetlenül minden nap ugyanannyi valószínűséggel születik.) Szimuláció: <https://www.randomservices.org/random/apps/BirthdayExperiment.html>
3. A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?
4. Mennyi a valószínűsége, hogy a lottón kihúzott öt szám közötti páronkénti különbségek mindegyike legalább öt? A lottón 1 – 90-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül, feltesszük, hogy minden számötös egyformán valószínű.

4. Elmélet

1. Definíció (Feltételes valószínűség). Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{ha } P(B) \neq 0.$$

2. Definíció (Események függetlensége). A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva.)

3. Definíció (Teljes eseményrendszer). $A B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha mindig pontosan egy következik be belőlük. Formálisan: $\forall i \neq j$ -re $B_i \cap B_j = \emptyset$, és $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

4. Tétel (Teljes valószínűség tétele). Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, és legyen $P(B_j) > 0$ minden j -re. Ekkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

5. Tétel (Bayes tétel). Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, és legyen $P(B_j) > 0$ minden j -re. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$