

1. Alapfeladatok

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?

Megoldás. A : van legalább egy hatos; B : különböző számokat dobtunk.

Összes lehetőség: 6^3 , a dobókocka szabályossága és a szimmetria miatt ezek egyformán valószínűek, alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűségi mezőre vonatkozó összefüggést.

Bár ez nem volt kérdés, mivel 5^3 olyan lehetőség van, amiben nincs hatos:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = 42,1\%.$$

Másrészt annak valószínűsége, hogy minden dobás különböző, azaz eltér az előzőektől:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{120}{6^3} = 55,5\%.$$

Továbbá a B -n belül azok a rossz esetek, amikor hatos sincs, a számok pedig egymástól is eltérnek:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{60}{6^3} = 27,8\%.$$

Összességében az A -nak B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{60}{6^3}}{\frac{120}{6^3}} = \frac{1}{2} = 50\% > \mathbb{P}(A) = 42,1\%.$$

Másik lehetőség: ugyanannyi olyan eset van, amiben van hatos, mint amiben nincs, ebből is következik, hogy $1/2$ a feltételes valószínűség.

2. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A vérvizsgálat beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, míg az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.

(a) Egy véletlenszerűen választott embernél k -szor függetlenül elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt minden alkalommal betegséget jelez? Mennyi ez $k = 1$ -re, $k = 2$ -re és $k = 3$ -ra?

(b) Valakinél k alkalommal végezték el a vizsgálatot, egymástól függetlenül. Feltéve, hogy minden alkalommal betegséget jelzett a teszt, mennyi a valószínűsége, hogy az illető beteg?

Megoldás. Legyen A az az esemény, hogy a teszt mind a k alkalommal betegséget jelez, B pedig az az esemény, hogy az illető beteg. Ekkor B és a komplementere olyan teljes eseményrendszer, amiben minden eseménynek pozitív a valószínűsége. Tehát alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,95^k \cdot 0,02 + 0,01^k \cdot 0,98.$$

Ennek értéke $k = 1$ -re 2,8%, $k = 2$ -re 1,8%, és $k = 3$ -ra 1,7%.

(b) Valakinél k alkalommal végezték el a vizsgálatot, egymástól függetlenül. Feltéve, hogy minden alkalommal betegséget jelzett a teszt, mennyi a valószínűsége, hogy az illető beteg?

Az előző jelölésekkel Bayes tételét is alkalmazhatjuk, hiszen A -nak is pozitív a valószínűsége, a többi feltétel pedig továbbra is teljesül. Így

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{0,95^k \cdot 0,02}{0,95^k \cdot 0,02 + 0,01^k \cdot 0,98}.$$

Ennek értéke $k = 1$ -re 66%, $k = 2$ -re 99,5% és $k = 3$ -ra 99,99%.

3. Véletlenszerűen kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Egy adott x valós számra mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$?

Megoldás. Mivel X a nagyobb rész hosszát jelöli, ezért $\frac{1}{2} \leq X < 1$, tehát a keresett valószínűség a következőképpen adható meg:

$$\mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2x - 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

Ugyanis a szimmetria miatt feltehetjük, hogy az osztópont az $(1/2, 1)$ intervallumba esik, ezen belül pedig a nagyobb rész hossza pontosan akkor lesz x -nél kisebb, ha az osztópont $1/2$ és x közé esik, vagyis egy $x - 1/2$ hosszú intervallum lesz megfelelő egy $1/2$ hosszú intervallumon belül, és feltéve, hogy a pontot egyenletes eloszlás szerint választottuk, a valószínűségeket az intervallum hosszával arányosan számíthatjuk ki. Másképpen: akkor lesz $X < x$, ha az osztópont $1 - x$ és x közé esik, vagyis egy $2x - 1$ hosszú intervallum megfelelő a teljes 1 hosszú intervallumból.

Hasonlóképpen, mivel Y a kisebb rész hosszát jelöli, ezért $0 < Y \leq \frac{1}{2}$, vagyis:

$$\mathbb{P}(Y < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

4. Anna és Béla megbeszélték, hogy délután találkoznak a ELTE aulájában, de az időpontot nem beszéltek meg. Mindketten 1 és 2 óra között érkeznek (egyenletesen) véletlenszerű időpontban, és mindketten 15 percet várnak a másikra. (Ha az addig nem érkezik meg, akkor hazamennek.) Mekkora a valószínűsége, hogy tényleg találkoznak?

Megoldás. Anna és Béla érkezését ábrázoljuk az egységnégyzetben, a koordináták felelnek meg az érkezési időpontnak. (Úgy skálázunk, hogy 1 óra legyen az intervallum.) Mivel függetlenül érkeznek, ezért a négyzetben a pont egyenletes valószínűséggel érkezik mindenhol. A kedvező esetek (amikor találkoznak) azok, amikor a koordináták különbsége legfeljebb $1/4$. Ezek a négyzet azon pontjai, melyek az $y = x - 1/4$ és $y = x + 1/4$ egyenesek közé esnek. Ennek a résznek a területe, így a keresett valószínűség is $7/16$.

5. Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,

- (a) több a páros, mint a páratlan?
(b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvők?

Megoldás. (a) Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám van, és a számok szerepe ugyanolyan, annak valószínűsége, hogy több a páros, mint a páratlan, ugyanannyi, mint annak valószínűsége, hogy több a páratlan, mint a páros. Mivel öt számot húzunk, az nem lehet, hogy ugyanannyi páros legyen, mint páratlan. Ezért a kérdéses valószínűség $1/2$.

(b) Bármilyen is az öt kihúzott szám, $5! = 120$ -féle sorrendben lehet őket kihúzni, és minden sorrend egyformán valószínű a szimmetria miatt. A 120-féle lehetséges sorrend közül egy az, amikor a húzás sorrendjében növekvők. Ezért a kérdéses valószínűség

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0,83\%.$$

Másképpen, ha sorrenddel számolunk, minden számötlőhöz egy jó sorrend tartozik, ezért:

$$\frac{\binom{90}{5}}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{5!}$$

6. (*Osztózkodási probléma*) Hogyan osztózzon a téten két játékos, ha 5 : 3-as állásnál félbeszakadt a 6 győzelemig tartó mérkőzésük? Tegyük fel, hogy bármelyik játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet az egyes játszmákban, a többi eredménytől függetlenül.

Megoldás. A második játékos pontosan akkor nyer, ha a következő három játszma mindegyikét ő nyeri, hiszen az első már csak egy nyertes játszmára van a győzelemtől. Mivel a játszmák függetlenek, ennek valószínűsége $1/8$, vagyis a valószínűségek szorzata (minden körben $1/2$).

A nyerési valószínűségek arányában elosztva a tétet tehát 7 : 1 a megfelelő arány.

2. Gondolkodtató feladatok

1. Egy állásra n pályázó közül szeretnénk a legjobbat kiválasztani. A pályázók véletlenszerű sorrendben bemutatkoznak, és rögtön el kell döntenünk, hogy felvesszük-e a jelöltet, aki éppen bemutatkozott. Alkossunk stratégiát amivel a lehető legnagyobb valószínűséggel vesszük fel a legjobb pályázót!

Megoldás. Vizsgáljuk meg azt a stratégiát, hogy az első k pályázót biztosan nem alkalmazzuk, majd ezután az első olyat kiválasztjuk, aki mindegyik előzőnél jobb. Mekkora a valószínűsége, hogy a legjobb pályázót vesszük fel? Mekkora annak érdemes k -t választani, ha n nagy?

Bontsuk szét a sorrendeket aszerint, hogy hányadikként érkezik a legjobb pályázó. Másképpen, legyen B_j az az esemény, hogy a legjobb pályázó j -ként érkezik ($j = 1, 2, \dots, n$). Legyen A az az esemény, hogy a legjobb pályázót választjuk. Világos, hogy $j = 1, 2, \dots, k$ esetén

$$\mathbb{P}(A|B_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

hiszen az első k közül nem választunk. Ha pedig $j = k + 1, \dots, n$, akkor a következő igaz: pontosan akkor választjuk a legjobbat, ha az első $j - 1$ pályázó közül a legjobb az első k között érkezett. Ilyenkor ugyanis a $k + 1, \dots, j - 1$ közül nem választunk senkit, hiszen az első k közül már láttunk jobbat, ha pedig ez a pályázó nem az első k -ban jön, akkor legkésőbb akkor, amikor ő megérkezik, felvesszünk valakit. Tehát

$$\mathbb{P}(A|B_j) = \frac{k}{j-1} \quad (j = k + 1, \dots, n),$$

hiszen ennyi annak valószínűsége, hogy az első $j - 1$ pályázó közül a legjobb az első k -ban érkezik. $A \{B_j\}_{j=1}^n$ teljes eseményrendszer, ezek közül pontosan az egyik következik be, és mindegyiknek $1/n > 0$ a valószínűsége. Így alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|B_j) \mathbb{P}(B_j) = \sum_{j=k+1}^n \frac{k}{j-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Erre zárt képletet nem tudunk adni, de a második kérdésre tudunk közelítő választ adni.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=k+1}^n \frac{k}{j-1} \cdot \frac{1}{n} \approx \frac{k}{n} \int_k^n \frac{1}{x} dx = \frac{k}{n} (\log n - \log k) = -\frac{k}{n} \log \frac{k}{n}.$$

(Itt $\log$ az e alapú logaritmust jelöli.) Ha most $k/n = x$, akkor azt az x -et keressük, amire ez a valószínűség a legnagyobb.

Deriválással:

$$(-x \log x)' = -\log x - 1.$$

Mivel ez pontosan akkor pozitív $x \in [0, 1]$ esetén, ha $-\log x - 1 > 0$, azaz $x < 1/e$, ennek a kifejezésnek $x = 1/e$ esetén van maximuma. Tehát körülbelül n/e jelöltet érdemes meghallgatni, és utána az első, minden korábbinál jobbat választani, ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk a legjobb jelöltet választani.

2. 100 utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy 100 fős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elvesztette a beszállókártyáját, így véletlenszerűen választ egy helyet, melyre leül. A többi utas egyesével száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helye már foglalt, akkor a még szabad ülések közül véletlenszerűen választ. Mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó utas a saját helyére ül le?

Első megoldás: jelölje p_n a keresett valószínűséget $n \geq 2$ utas esetén. Figyeljük meg, hogy $p_2 = 1$, és ha az első utas a k -adik helyre ül le ($k \neq 1, n$), akkor a hátralévő utasok pont az $n - k + 1$ emberre vonatkozó feladatot játsszák le (a k -adik embert az első helyére képzelve). Így

$$p_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{n} \cdot p_{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot p_2 + \frac{1}{n} \cdot 0.$$

Ebből indukcióval $p_n = 1/2$ adódik minden n -re.

Második megoldás: amikor az első utas, vagy bármely későbbi utas, akinek foglalt a helye, beszáll, azonos valószínűséggel ül az első utas helyére (mely esetben a végén a 100. utas jó helyre fog ülni), és a 100. utas helyére (mely esetben a 100. utas nem a saját helyén fog ülni). Minden más esetben a döntés csak elodázódik. Vagyis a keresett valószínűség $1/2$.

Harmadik megoldás: A válasz nyilván nem függ attól, hogy pontosan hanyadik helyen ül az első és a 100. utas. Játsszuk le a folyamatot két párhuzamos univerzumban úgy, hogy az utasok pontosan ugyanoda ülnek le, de az első és a 100. utas helye a két univerzumban meg van cserélve. Mindkét univerzumban a feladatnak a helyes lefolyása valósul meg, és az egyikben a 100. utas akkor és csak akkor ül a saját helyére, ha a másikban nem. Ha a keresett valószínűség p , akkor az előző érvelés a $p + p = 1$ egyenletet adja, így $p = 1/2$.

3. Egy gömbfelületen egymástól függetlenül, véletlenszerűen választunk 4 pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott tetraéder tartalmazza a gömb középpontját?

Megoldás. Helyezzük el a pontokat úgy, hogy először csak az átmérőjüket sorsoljuk ki, majd egy szabályos pénzérmével döntsük el, hogy az átmérő melyik végpontját választjuk. A 4 átmérő 1 valószínűséggel különböző, és gömbi értelemben független lesz. Meggondolandó, hogy bármely átmérőkiosztás esetén a 16 lehetséges érmedobás közül pontosan 2 lesz kedvező (ezek egymás komplementerei).

3. Gyakorló feladatok

1. (*Monty Hall-probléma*) Egy televíziós játékban 3 ajtó közül választhat a játékos, az egyik mögé ajándék van rejtve. A játékos választása után a műsorvezető kinyit egy másik ajtót és megmutatja, hogy ott nincs ajándék. Felajánlja a játékosnak, hogy változtathat. Érdemes-e változtatni?

Szimuláció: <https://www.randomservices.org/random/apps/MontyHallGame.html>

Megoldás.

$$\mathbb{P}(\text{első ajtó mögött van az ajándék} | \text{második ajtó mögött kecske}) = \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1, 3\})} = \frac{1}{2}.$$

$$\Omega = \{1, 2, 3\}$$

a három lehetőség aszerint, hogy melyik mögött van az autó

Mi az egyest választottuk (különben átpermutáljuk), a második mögött kecske van: $\Omega' = \{1, 3\}$

B : az az esemény, hogy amikor először választottunk, az ajándékot rejtő ajtót választottuk

A : nyerünk

Változtatás esetén:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})$$

Érdemes változtatni.

Első stratégia: nincs változtatás. Ebben az esetben a játékos először $1/3$ valószínűséggel mutatott az ajándékot tartalmazó ajtóra, tehát összességében is $1/3$ valószínűséggel nyeri meg a játékot.

Második stratégia: változtatás. Vegyük észre, hogy ha a játékos először egy üres ajtóra mutat, akkor mindenképpen nyer: a másik két ajtó közül kinyitják az üreset, így a változtatás után ő biztosan az ajándékot rejtő ajtót fogja választani. Ha a játékos először az ajándékot rejtő ajtóra mutatott, akkor viszont, mivel változtat, biztosan nem nyer.

Legyen A az az esemény, hogy a játékos nyer, B az az esemény, hogy az első alkalommal az ajándékot rejtő ajtóra mutatott. A $\{B, \overline{B}\}$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszerre (metszetük üres, uniójuk Ω) alkalmazva a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) = 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3 = 2/3 > 1/3.$$

2. Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban van két ember, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Tegyük fel, hogy minden év 365 napos, és mindenki a többiektől függetlenül minden nap ugyanannyi valószínűséggel születik.) Szimuláció: <https://www.randomservices.org/random/apps/BirthdayExperiment.html>

Megoldás. Az összes eset száma 365^4 , és a feltétel szerint ezek egyformán valószínűek. A rossz esetek száma $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362$, ennyiféleképpen történhet meg, hogy mindenki különböző napon születik. Vagyis a kérdéses valószínűség

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362}{365^4} = 1,6\%.$$

3. A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

Megoldás. A kérdés ekvivalens azzal, hogy 10 embert kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két csatárt választottunk ki. A kettéosztásnál ugyanis nem különböztetjük meg a „kiválasztott” és „maradék” sportolókat, de minden kettéosztásból kétféleképpen tudunk „kiválasztott” csoportot létrehozni, vagyis a kedvező és összes eset száma is megduplázódik, a valószínűség ugyanaz lesz.

Tíz embert kiválasztani $\binom{20}{10}$ -féleképpen lehetséges. Ebből olyan eset, amikor a kiválasztottak között pontosan két csatár van, $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8}$ van, hiszen meg kell mondanunk, hogy melyik két csatár kerül ide, meg kell mondani, hogy a többi 16 játékos közül ki az a nyolc, aki bekerül, és a csatárok választása bárhogyan kombinálható a többiek választásával, ezért lehet szorozni a kettőt. Összesen tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8}}{\binom{20}{10}} = 41,8\%.$$

4. Mennyi a valószínűsége, hogy a lottón kihúzott öt szám közötti páronkénti különbségek mindegyike legalább öt? A lottón 1 – 90-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül, feltesszük, hogy minden számötös egyformán valószínű.

Megoldás. Az összes eset számötös száma $\binom{90}{5}$ (a sorrend nem számít, csak az, hogy melyik öt számot húztuk), a feltétel szerint ezek egyformán valószínűek. Ha van egy jó számötös: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ nagyság szerint növekvő sorba rendezve, akkor ehhez hozzá tudjuk rendelni az $(x_1, x_2 - 4, x_3 - 8, x_4 - 12, x_5 - 16)$ számötöst, és mivel minden különbség a szomszédos számok között legalább 5 volt, ezzel öt olyan számötös kaptunk, amik 1 és $90 - 16 = 74$ között vannak, különbözőek és nagyság szerint növekednek. Ez a hozzárendelés valójában egy bijekció: ha veszünk öt különböző számot 1 és 74 között, melyek nagyság szerint növekednek, akkor a másodikhoz 4-et, a harmadikhoz 8-at, a negyedikhez 12-t, az ötödikhez 16-ot hozzáadva kapunk öt, az eredeti feltételnek megfelelő számot 1 és 90 között, és semmit nem kapunk meg kétszer. Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{74}{5}}{\binom{90}{5}} = 36,7\%.$$