

1. Alapfeladatok

1. Mennyi egy (szabályos) kockadobás várható értéke?
2. Fej vagy írást játszunk, és mindig a fejre tippelünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy soha sem fogunk nyerni?
3. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Egymástól függetlenül mindenki választ a 10 emelet közül egyet (mindegyiket azonos valószínűséggel), ahol kiszáll. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden emeleten kiszáll valaki?
4. Egy kockával addig dobálunk, amíg hatost nem dobunk. Várhatóan hányadik dobásra kapunk hatost?
5. Péternek 6 szürke, 5 fekete és 3 fehér pólója van. Egy utazás előtt taláломra kiválaszt hat különböző pólót, minden lehetőséget azonos valószínűséggel választva.
 - (a) Milyen eloszlású a kiválasztott szürke pólók száma?
 - (b) Mennyi a kiválasztott szürke pólók számának várható értéke?
 - (c) Mennyi a valószínűsége, hogy minden színből ugyanannyi darabot visz magával az utazásra?
6. Mi egy egység hosszú intervallum egy véletlenszerűen választott pontjának várható „helye”? Fogalmazzuk meg a kérdést várható érték problémaként!

2. Gondolkodtató feladatok

1. Egy majom ül egy írógép előtt, és véletlenszerűen nyomkodja a gombokat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a (végtelen hosszú) papíron előbb-utóbb megjelenik az „abrakadabra” szó?
2. Móriczka a telefonja mellett ül, és nagyon várja, hogy felhívja valaki. Unalmában azon gondolkodik, hogy hogyan modellezhetné az élményt, de az iskolában sajnos csak kombinatorikus valószínűségszámítást tanult. Azt megfigyelte, hogy naponta *átlagosan* 5 telefonhívást kap, és az az intuitív érzése, hogy minden pillanatban ugyanannyira valószínű, hogy felhívják, függetlenül attól, hogy mikor volt az előző hívás. Segítsünk neki matematikai modellt alkotni!
3. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre $1/2$ -nél nagyobb annak az esélye, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb bekövetkezik, mint a másik. Hasonlítsuk össze az *III*F, *II*FF, *F*II és *F*II sorozatokat!

Tanulságok:

- Miért kell a (hátdoldalon felsorolt) kombinatorikai alapfogalmakat megtanulni?
- Ha még nem tanultunk folytonos jelenségekről, hogyan tudjuk őket (legalább is megpróbálni) modellezni?

Beadható házi feladat. Egy biztosítónál azt figyelték meg, hogy száraz időjárású napokon a káresetek száma (egy gépjármű-biztosításnál) Poisson-eloszlású 100 paraméterrel, esős napokon szintén Poisson-eloszlású, de ekkor 200 paraméterrel. Azt is tudjuk, hogy januárban minden nap a többitől függetlenül 0,6 valószínűséggel száraz, 0,4 valószínűséggel esős.

Megnézték a tavalyi év első öt napját, így alakult a káresetek száma: 174, 203, 185, 199, 167.

Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy a tavalyi év első öt napjának mindegyike esős volt? (Persze ennek utána is lehet nézni, de most képzeljük el, hogy ez az információ nem áll rendelkezésre, csak a feladatban szereplő információk alapján számoljunk.)

3. Gyakorló feladatok

1. Egy csokoládégyárban minden doboz desszertbe 12-féle reklámcédula közül egyet-egyet tesznek. Aki összegyűjti és beküldi mind a 12-félét, jutalmat kap. Mennyi a valószínűsége annak, hogy éppen k dobozzal kell vásárolnunk ahhoz, hogy mindegyik fajta cédulából legyen legalább egy példányunk?
2. Feldobunk egy szabályos dobókockát n -szer. Várhatóan hány darab hatos lesz a dobott számok között? Mennyi a valószínűsége, hogy a hatosok száma pontosan 10?
3. Van egy csomag virágmagunk, amelyről azt tudjuk, hogy elültetve őket, mindegyik egymástól függetlenül 10% eséllyel kikel, 90% eséllyel pedig nem. Hány magot ültessünk a cserépbe, ha azt szeretnénk, hogy pontosan egy virágmag keljen ki? Azaz, hány mag elültetése esetén a legnagyobb az esélye annak, hogy pontosan egy virág kel ki? Ebben az esetben mennyi a kikelő virágok számának várható értéke?
4. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: három urnába tesznek 2-2 golyót, az elsőbe két kéket, a másodikba egy kéket és egy pirosat, a harmadikba két pirosat. A játékos húz egy golyót, megnézi, majd tippelnie kell a másik golyó színére. Ha eltalálja, 4 aranyat kap, ha nem találja el, 6-ot fizet. Játékszánatok-e?

4. Elmélet

Kombinatorika emlékeztető

1. **Definíció (Ismétlés nélküli permutáció).** n (különböző) elem összes lehetséges sorrendje.

$$n!.$$

2. **Definíció (Ismétléses permutáció).** n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül $k_1, \dots, k_r$ darab megegyezik.

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r}.$$

3. **Definíció (Ismétlés nélküli kombináció).** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

4. **Definíció (Ismétléses kombináció).** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), de van visszatevés.

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

5. **Definíció (Ismétlés nélküli variáció).** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

6. **Definíció (Ismétléses variáció).** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.

$$n^k.$$