

1. Alapfeladatok

1. Tegyük fel, hogy az, hogy Péter hány emailt, illetve hány facebook-üzenetet kap egy napon, egymástól független valószínűségi változók. Az emailek száma X , ennek várható értéke 5, a facebook-üzenetek száma Y , ennek várható értéke 8, és mindkét valószínűségi változó Poisson-eloszlású.

- Mennyi a valószínűsége, hogy Péter összesen 10 üzenetet kap egy nap alatt a két felületen összesen?
- Milyen eloszlású az egy nap alatt érkező összes üzenet száma, azaz $X + Y$?
- Mennyi $X + Y$ várható értéke és szórása?
- Feltéve, hogy Péter egy nap alatt összesen 10 üzenetet kapott, mennyi a valószínűsége, hogy ebből 5 érkezett emailen, és 5 facebookon?

Megoldás. (a) Ez a (b) speciális esete, elég azt megoldani. (b) A teljes valószínűség tételét használjuk az $\{X = l\}, l = 0, 1, 2, \dots$ teljes eseményrendszerre, valamint azt, hogy X és Y függetlenek. Legyen $\lambda = 5$ és $\mu = 13$. Mivel a Poisson-eloszlás paramétere megegyezik a várható értékével, ezek egyben az X és Y paraméterei is. Ez alapján:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y = k | X = l) \mathbb{P}(X = l) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(Y = k - l) \mathbb{P}(X = l) = \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\lambda^l}{l!} \cdot e^{-\lambda} = \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \mu^{k-l} \cdot \lambda^l = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!},\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben a binomiális tételt használtuk. Vagyis $X + Y$ 13 paraméterű Poisson-eloszlású. Ezzel ezt bizonyítottuk be:

1. Állítás. Legyenek X és Y független λ , illetve μ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $X + Y$ eloszlása Poisson-eloszlás $\lambda + \mu$ paraméterrel.

Az (a)-ra visszatérve: a valószínűség $\frac{13^{10}}{10!} e^{-10} = 8,19\%$. (c) Mivel $X + Y$ Poisson-eloszlású 13 paraméterrel, várható értéke 13, szórása $\sqrt{13} = 3,61$. Általában az lesz igaz, hogy $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ és $D(X + Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}$, ha X és Y függetlenek. (d) A feltételes valószínűség definíciója, illetve az X és Y függetlensége alapján, valamint felhasználva, hogy $X + Y$ Poisson-eloszlású 13 paraméterrel:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 5 | X + Y = 10) &= \frac{\mathbb{P}(X = 5, X + Y = 10)}{\mathbb{P}(X + Y = 10)} = \frac{\mathbb{P}(X = 5) \cdot \mathbb{P}(Y = 5)}{\mathbb{P}(X + Y = 10)} = \\ &= \frac{\frac{5^5}{5!} \cdot e^{-5} \cdot \frac{8^5}{5!} \cdot e^{-8}}{\frac{13^{10}}{10!} \cdot e^{-13}} = \binom{10}{5} \left(\frac{5}{13}\right)^5 \left(\frac{8}{13}\right)^5 = 18,7\%.\end{aligned}$$

Általában, amikor Poisson-eloszlásúak és függetlenek a tagok, akkor a feltételes eloszlás binomiális.

2. Legyen N Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Jelölje X a fejek, Y az írások számát egy független, szabályos érmédobásokból álló sorozat első N dobása között. Független-e X és Y ?

Megoldás. Először vegyük észre, hogy tetszőleges $k, l \geq 0$ egészekre

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(N = k + l) \cdot \binom{k+l}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} = \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} e^{-(k+l)} \binom{k+l}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l}.$$

Ezt átalakíthatjuk így:

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-k} \cdot \frac{(\lambda/2)^l}{l!} e^{-l}. \quad (1)$$

Másrészt

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-k} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^l}{l!} e^{-l} \right) = \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-k}.$$

Kihasználtuk, hogy a szumma értéke 1, ami például abból látszik, hogy ezek pont egy $\lambda/2$ paraméterű Poisson eloszlás valószínűségei.

Ugyanezt kiszámolhatjuk Y -ra is, és ez alapján $\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$ -re is (1) jobb oldalát kapjuk, tehát X és Y függetlenek, mindeketten Poisson-eloszlásúak, $\lambda/2$ paraméterrel.

Az előző két feladat azt az intuíciónkat erősíti meg, hogy két független, de különböző színű Poisson pontfolyamat uniója ugyanaz, mintha először az únójukat generálnánk (az intenzitásokat összeadva), majd független (az intenzitásokkal súlyozott) pénzfeldobásokkal döntenénk el a pontok színét.

3. A rulettben 37 számozott mező van: 18 fekete, 18 piros, és a zöld 0. Lehet például fogadni a nyertes szám színére (piros vagy fekete), és ha nyerünk, megduplázzák a tétünket, ha veszítünk akkor a feltett összeget elveszítjük. Játsszanatok-e?

Megoldás. A nyereményünk várható értéke

$$\frac{18}{37} \cdot (+1) + \frac{19}{37}(-1) = -\frac{1}{37} < 0.$$

Tehát nem érdemes játszani. A kaszinók (a fogyasztás mellett) ebből az $1/37$ -edből élnek.

4. Móricka leül a rulettasztalhoz, és a következőt játssza: feltesz egy aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal feláll az asztaltól, és abbahagyja. Ha veszít, akkor feltesz két aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ha veszít, feltesz 4 aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ugyanígy tovább, mindig duplázza a feltett összeget, egészen addig, amíg egyszer végül nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke? Hogyan egyeztethető ez össze az előző feladat eredményével?

Megoldás. Vegyük észre, hogy amikor Móricka nyer épp eggyel több aranyat nyer, mint amennyit eddig feltett. Vagyis ha valaha nyer, akkor 1-et nyer. Viszont annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb nyer 1, ezt egy korábbi feladatból tudjuk. Tehát a nyereményének a várható értéke 1.

Ez látszólag ellentmond annak, hogy a rulett negatív várható értékű játék. Ennek ellenére a mindkét megoldás helyes. Móricka stratégiájával a valóságban az a baj, hogy ha csak véges sok pénze van, akkor nem tudja vég nélkül duplázni a tétet. Ugyan nagy valószínűséggel sok kör alatt nyer egy picit, de egy kis valószínűséggel bukja az összes pénzét, így valóban negatív lesz a várható értéke. Általában a kaszinók minimum és maximum tétje nincs olyan messze egymástól, hogy sokszor lehessen duplázni.