

1. Alapfeladatok

- Egy 32 lapos magyar kártyapakliból a 4 ász és a 4 király van a kezünkben. Ebből választunk 2 lapot visszatevés nélkül. Jelölje X a kapott piros színű, Y pedig a kapott zöld színű lapok számát.
 - Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.
 - Számoljuk ki X és Y várható értékét, szórásnégyzetét, valamint X és Y korrelációs együtthatóját.
- Egy cukrászdában kétféle terméket árulnak. Tegyük fel, hogy a fagyaltot kérők száma (ez legyen X), Poisson-eloszlású 50 paraméterrel, a süteményt kérők száma Poisson-eloszlású 150 paraméterrel (ez legyen Y), és hogy X és Y függetlenek. A fagyalt ára 300 forint, a süteményé 500.
 - Mennyi a napi bevétel várható értéke, illetve szórása?
 - Számítsuk ki X -nek és napi bevételnek a korrelációs együtthatóját.
- Mihez és hogyan konvergál független szabályos kockadobások mértani közepe?
- ξ_j -k független 3 paraméterű Poisson eloszlású változók. Mihez és hogyan konvergál

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}?$$

- Adjunk példát olyan (X_n) valószínűségi változókból álló sorozatra, mely
 - 1 valószínűséggel konvergens, de L^p -ben nem konvergens;
 - L^p -ben konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens.
- Tegyük fel, hogy $X_n \rightarrow X$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $X_n - X \rightarrow 0$ eloszlásban? Itt X , illetve (X_n) ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók sorozata.
- Mutassunk arra példát, hogy X_n, X azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $X_n \rightarrow X$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

2. Gondolkodtató feladatok

- Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók úgy, hogy minden n -re $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$ és $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(X_n) = 0$ minden n -re, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = -1$$

teljesül 1 valószínűséggel.

- Adjunk példát olyan (X_n) valószínűségi változókból álló sorozatra, mely sztochasztikusan konvergens, de 1 valószínűséggel nem konvergens (ebből következik, hogy nem 1 valószínűséggel konvergens).
- Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X -hez.

Házi feladat november 18-ig. Legyen az X_n valószínűségi változó Poisson-eloszlású, melynek várható értéke $1/\sqrt{n}$. Igaz-e, hogy az (X_n) sorozat sztochasztikusan konvergens, ha $n \rightarrow \infty$? Ha igen, mi a limesze?

3. Gyakorló feladatok

1. Egy osztályba 16 fiú és 20 lány jár. Tegyük fel, hogy minden tanítási napon egymástól függetlenül a fiúk 0,04, a lányok 0,05 valószínűséggel hiányoznak. Legyen X a jövő hétfőn hiányzó fiúk, Y pedig a jövő hétfőn hiányzó lányok száma.
 - (a) Számítsuk ki az összes jövő hétfői hiányzó, vagyis $X + Y$ várható értékét.
 - (b) Számítsuk ki X , Y és $X + Y$ szórását.
 - (c) Mennyi X és Y kovarianciája?
 - (d) Mennyi X és $X + Y$ kovarianciája?
 - (e) Mennyi X és $X + Y$ korrelációs együtthatója?
2. Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, X várható értéke 4, Y várható értéke pedig 10.
 - (a) Mennyi $X + Y$ várható értéke?
 - (b) Mennyi $X + Y$ szórása?
 - (c) Mennyi X és $X + Y$ korrelációs együtthatója?
 - (d) Mennyi $2X + 3Y$ és $X - Y$ kovarianciája?
 - (e) Mennyi $2X - Y$ szórása?