

# Bevezetés a valószínűségszámításba gyakorlat, 2023.

## 1. feladatsor – kombinatorikus valószínűségi mező

### Feladatok:

- Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktablóra úgy, hogy ne üssék egymást?
- Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?
- Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tők) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy
  - pontosan egy piros színű lapot húztunk?
  - legalább egy piros színű lapot húztunk?
- Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha
  - egyformák a párok?
  - különbözőek a párok?
- Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?
- Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?
- A ötöslottóhúzásnál 1 - 90-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy
  - egy szelvényel játszva öttalálatosunk lesz;
  - egy szelvényel játszva legalább négyesünk lesz;
  - minden kihúzott szám páros; (Hogy viszonylik ez a visszatevéses esethez?)
  - a kihúzott számok között több a páros, mint a páratlan;
  - a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvőek!
- Melyik módszerrel nagyobb a telitalálat esélye, ha egy héten játszunk meg két különböző számötöst vagy ha kétszer egymás után ugyanazt?
- X. úr szenvedélyes lottózó, 50 éven át minden héten heti 10 lottó szelvényel játszott, úgy, hogy minden héten csupa különböző számot jelölt meg (összesen tehát ötvenet a kilencvenből). Milyen esélye volt arra, hogy valaha is telitalálatot érjen el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább egy négyes találatot elér, ha minden héten egy szelvényel játszik?
- Ha egy kockával négyszer dobunk, akkor előnyös arra fogadni, hogy a négy dobásból lesz legalább egy hatos. Ha két kockával huszonnégyszer dobunk akkor hátrányos arra fogadni, hogy lesz legalább egy dupla hatos, holott  $4/6 = 24/36$ -dal (vagyis a dobások számának és a kedvező kimenetel esélyének szorzata megegyezik). Magyarázzuk meg a jelenséget! (A fogadás kedvező ill. hátrányos aszerint, hogy a nyeres esélye meghaladja-e az  $1/2$ -et.)
- A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen taláalomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

### Tanulságok:

- Mi a teendő, ha egy valószínűségszámítás (vagy kombinatorika) feladatban a „legalább” (vagy „legfeljebb”) szót olvassuk?
- Mi a különbség a kombinatorika és a valószínűségszámítás között?
- Miért kell a (háttoldalon felsorolt) kombinatorikai alapfogalmakat megtanulni?
- Tudtok olyan valószínűségszámítás feladatot mondani, ami nem olyan, mint a fentiek? (Nem illeszkedik a kombinatorikus valószínűségi mező fogalmához.)

## Elmélet:

**1. Definíció** (Ismétlés nélküli permutáció).  $n$  (különböző) elem összes lehetséges sorrendje.

$$n!$$

**2. Definíció** (Ismétléses permutáció).  $n$  elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül  $k_1, \dots, k_r$  darab megegyezik.

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r}.$$

**3. Definíció** (Ismétlés nélküli kombináció).  $n$  (különböző) elemből  $k$  darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

**4. Definíció** (Ismétléses kombináció).  $n$  (különböző) elemből  $k$  darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), de van visszatevés.

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

**5. Definíció** (Ismétlés nélküli variáció).  $n$  (különböző) elemből  $k$  darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

**6. Definíció** (Ismétléses variáció).  $n$  (különböző) elemből  $k$  darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.

$$n^k.$$

**7. Definíció** (Kombinatorikus valószínűségi mező).  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  kombinatorikus valószínűségi mező, ha

- $\Omega$  nemüres, véges halmaz;
- $\mathcal{A}$  az  $\Omega$  részhalmazainak halmaza.  $\mathcal{A}$  elemei az események;
- $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  valószínűség,  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .