Bevezetés a valószínűségszámításba gyakorlat, 2023.

2. feladatsor – feltételes valószínűség, geometriai valószínűség, Poincaré-formula

Feladatok:

1. Van n darab különböző dobozunk, melyekben elhelyezünk n golyót (egy dobozba akárhány golyó kerülhet, és minden lehetőség egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy nem lesz üres doboz?
2. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?
3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?
4. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy eltalálja a helyes választ, ekkor $\frac{1}{3}$). Mennyi a valószínűsége, hogy helyesen válaszol? Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?
5. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A betegség kimutatására szolgáló teszt beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, ugyanakkor az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.
   (a) Egy véletlenszerűen választott embernél elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt betegséget jelez?
   (b) Tamásnál elvégezték a tesztet, az eredmény szerint beteg. Mennyi a feltételes valószínűsége, hogy valóban beteg?
   (c) Megismételték a vizsgálatot. Az újabb tesztnél ismét betegséget jelzett a teszt. A két eredmény alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy Tamás beteg? Itt feltehetjük, hogy a két vizsgálat egymástól függetlenül ad pozitív eredményt.
6. Kettétörünk egy 1 méter hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát (méterben mérve) és Y a rövidebbét. Mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$ értéke? (*Hint: oldjuk meg a feladatot néhány jól megválasztott, konkrét x értékre!*)
7. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két véletlenszerűen választott pontjával három részre osztunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkezett szakaszokból szerkeszthető háromszög? (*Hint: hogyan kezelhetünk két egymástól független, véletlen pontot? Vesd össze: két egymástól független kockadobás lehetséges kimeneteleit hogyan szoktuk rendezni?*)
8. Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya? (*Hint: kérdezzünk könnyebbet!*)

Házi feladatok:

1. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?
2. Egy dobozban egy jó és egy rossz kábel van. A jó 95% valószínűséggel, a rossz 30% valószínűséggel működik minden kipróbálásnál függetlenül. Találomra kivesszük valamelyik kábelt (mindkettőt azonos valószínűséggel választva). Tízszer kipróbáltuk, ebből nyolcszor működött, kétszer nem. Mennyi a valószínűsége, hogy a jó kábelt vettük ki a dobozból?
3. Ákos feldob egy érmét ötvenszer, Bálint ötvenegyszer. Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint több fejet dob, mint Ákos?
4. Egy gömbfelületen egymástól függetlenül, véletlenszerűen választunk 4 pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott tetraéder tartalmazza a gömb középpontját? (*Hint: kérdezzünk könnyebbet!*)

Tanulságok:

- Mikor mondhatjuk azt, hogy egy valószínűségszámítás feladat „meg van adva"?
- Mi a teendő, ha nem tudjuk egyből megoldani az 1, 8, H1, H3 sorszámú feladatokat?
- Mi a teendő, ha nem tudjuk egyből megoldani a 4, 6 sorszámú feladatokat?
- Meddig tudunk elemi módszerekkel kezelni geometriai valószínűségszámítás feladatokat?

Elmélet:

1. Definíció (Feltételes valószínűség)**.** Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{ha } P(B) \neq 0.$$

2. Definíció (Események függetlensége)**.** A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. ($A$ esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva.)

3. Definíció (Teljes eseményrendszer)**.** A $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha mindig pontosan egy következik be belőlük. Pontosabban:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j-$re;
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

4. Tétel (Teljes valószínűség tétele)**.** *Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, és legyen $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

5. Tétel (Bayes tétel)**.** *Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, és legyen $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

6. Tétel (Poincaré- vagy szita formula)**.** *Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események. Ekkor*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \right).$$