

Bevezetés a valószínűségszámításba gyakorlat, 2023.

5. feladatsor

Feladatok:

1. A síkot rácsozzuk be függőleges, egymástól 2 egység távolságra lévő egyenesekkel! Dobjunk a síkra véletlenszerűen egy egység hosszú tűt (szakaszt). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?
 - (a) Próbáljuk ki gyufával!
 - (b) Fogalmazzuk át a feladatot várható érték problémává!
 - (c) Hogyan változik az eredmény, hogyha egy fele akkora tűt dobunk a síkra?
 - (d) Mi a helyzet, hogyha egy középen megtört tűt dobunk a síkra?
 - (e) Milyen alakú tűt lenne jó a síkra dobni, hogy könnyű legyen kiszámolni a megoldást?
2. A rulettben 37 számozott mező van: 18 fekete, 18 piros, és a zöld 0. Lehet például fogadni a nyertes szám színére (piros vagy fekete), és ha nyerünk, megduplázzák a tétünket, ha veszítünk akkor a feltett összeget elveszítjük. Játsszanátok-e?
3. Móriczka leül a rulett asztalhoz, és a következőt játssza: feltesz egy aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal feláll az asztaltól, és abbahagyja. Ha veszít, akkor feltesz két aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ha veszít, feltesz 4 aranyat a pirosra, és ha nyer, azonnal kiszáll. Ugyanígy tovább, mindig duplázza a feltett összeget, egészen addig, amíg egyszer végül nyer. Mennyi a nyereményének várható értéke? Hogyan egyeztethető ez össze a korábbi feladat eredményével?

Exponenciális eloszlás, Poisson pontfolyamat

4. (Exponenciális eloszlás.) Hogyan modellezhetjük egy radioaktív atommag elbomlásának idejét? Azt megfigyeltük sok atom nézegetése alapján, hogy ez az idő tetszőlegesen kicsi és tetszőlegesen nagy is lehet. És azt is, hogy ha egy atom 1 perc alatt még nem bomlott el, akkor ebből még nem tudunk semmit következtetni a jövőbeli várható élettartamára.
 - (a) Mit jelent pontosan a fent leírt „örökifjú” tulajdonság?
 - (b) Hogyan lehetne diszkrétizálni a feladatot?
 - (c) Mi történik, ha a diszkrétizált feladatnak a határértékét vesszük?
5. (Poisson pontfolyamat.) Hogyan modellezhetnénk egy telefonközpontba érkező hívások időpontjait (mint véletlen pontthalmazt az egyenesen)? Milyen feltevésekkel élhetnénk? Gondoljuk végig az előző feladatbeli lépéseket ebben az esetben is.