Bevezetés a valószínűségszámításba gyakorlat, 2023.

8. feladatsor

Feladatok:

1. Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?

   Ezen más is gondolkozott már:

   - Csebisev: `https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev%27s_inequality`
   - Berry-Esséen: `https://en.wikipedia.org/wiki/Berry-Esseen_theorem`
   - Hoeffding: `https://en.wikipedia.org/wiki/Hoeffding%27s_inequality`

   Nézzük meg, hogy melyikből kapunk jobb becslést!

2. Adjunk példát olyan $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változókból álló sorozatra, melyre $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, egy megfelelő ξ valószínűségi változóra, de $\xi_n \to \xi$ nem teljesül sztochasztikus értelemben.

3. A $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak értelmezve és $\xi_n \to c$ eloszlásban, ahol c konstans. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to c$ sztochasztikusan.

4. Legyenek az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók függetlenek. Milyen értelemben konvergensek az alábbi sorozatok, és mi a limeszük?

   (a) X_i független p paraméterű indikátorváltozó; $Y_n = (X_1^5 + \dots + X_n^5)/n$.

   (b) X_i az i. szabályos kockadobás eredménye; $Y_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$; illetve $Z_n = (X_1^2 + \dots + X_n^2)/n$.

   (c) X_i exponenciális eloszlású 2 paraméterrel (azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 2e^{-2x}$, ha $(x > 0)$);

   $$Y_n = \frac{e^{X_1} + \dots + e^{X_n}}{n}, \text{ illetve } Z_n = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}.$$

5. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen x^{-5}, ha $x > c$, és 0 különben.

   (a) Határozzuk meg c értékét.

   (b) Feltéve, hogy $X > 2c$, mennyi a valószínűsége, hogy $X > 3c$?

   (c) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ az X-szel azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Határozzuk meg az

   $$\frac{X_1^3 + X_2^3 + \dots + X_n^3}{n}$$

   limeszét sztochasztikus, illetve 1 valószínűségű értelemben, ha ezek a limeszek léteznek $n \to \infty$ esetén.