KONVEX TESTEKHEZ HOZZÁRENDELT TESTEK

ifj. Makai Endre

Abstract. In this talk we investigate three bodies associated to a convex body: the intersection body, the cross-section body and the projection body. We will review some of their properties, investigate the inclusion relations among them, as well as the sharpness of these relations, and certain inclusion relations in the converse direction.

§0 Definíciók

1. Definíció. Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ ($= d$-dimenziós euklideszi tér) részhalmaz konvex test, ha konvex, kompakt, és belseje, int$K$ nem üres.

2. Definíció. A) (Lutwak) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, és 0, az origó legyen int$K$-ban. Ekkor legyen $M(K)$ ($= K$ metszet teste) a $\{\lambda u \mid u \in S^{d-1},\ 0 \leq \lambda \leq V_{d-1}(K \cap u^{\perp})\}$ halmaz, ahol S^{d-1} a 0 körüli egységgömb felszíne, V_{d-1} a $(d-1)$-térfogatot jelöli, és $u^{\perp}$ a 0-n áthaladó, u-ra ortogonális hipersík. (Azaz $M(K)$ az a 0 körüli csillagtartomány, amelynek határpontjait úgy kapjuk, hogy az u irányba felmérjük K-nak az u-ra ortogonális lineáris altérrel való metszetének $(d-1)$-térfogatát.)

B) (Martini) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test. Ekkor legyen $M_{max}(K)$ ($= K$ maximális metszet teste) a $\{\lambda u \mid u \in S^{d-1},\ 0 \leq \lambda \leq \max_{x \in \mathbb{R}^d} V_{d-1}(K \cap (u^{\perp} + x))\}$ halmaz. (Azaz $M_{max}(K)$ az a 0 körüli csillagtartomány, amelynek határpontjait úgy kapjuk, hogy az u irányba felmérjük K-nak az u-ra ortogonális affin alterekkel való legnagyobb $(d-1)$-térfogatú metszetének $(d-1)$-térfogatát. Megjegyezzük, hogy ennek részben fizikai motivációja is van: a fémek ú.n. Fermi felületének könnyű megmérni az M_{max} testjét. A Fermi felület a fémrácsban levő szabad elektronok alkotta "elektrongáz" által a sebességtérben elfoglalt térrész határa, elvben 0 Kelvin fokon. Ekkor az elektronok együttes energiaminimumra törekednek, de a Pauli kizárási elv miatt egy helyet csak egy elektron foglalhat el a sebességtérben, így egy gömbhöz többé-kevésbé hasonló térrész jön létre. Mivel a fémkristályok nem lehetnek gömbszimmetrikusak, a Fermi felületek sem lesznek gömbalakúak.)

C) (Minkowski) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test. Ekkor legyen $P(K)$ ($= K$ projekcióteste) a $\bigcap_{u \in S^{d-1}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid |\langle x, u\rangle| \leq V_{d-1}(\mathrm{proj}_{u^{\perp}} K)\}$ halmaz, ami persze konvex test, ahol $\langle x, u\rangle$ az x és u vektorok skaláris szorzata, és $\mathrm{proj}_{u^{\perp}}$ az $u^{\perp}$-ra való ortogonális projekciót jelöli. (Azaz $P(K)$ olyan párhuzamos síksávok metszete, amelyek határoló síkjai olyan távolságra vannak 0-tól, mint K-nak $u^{\perp}$-ra vett ortogonális projekciójának $(d-1)$-térfogata.) Továbbá $P(K)$-nak a definícióbeli előállítása párhuzamos síksávok metszeteként pontos abban az értelemben, hogy egyetlen fenti síksávot sem lehet kisebbel helyettesíteni, anélkül, hogy a metszetük kisebbé ne válna.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Példa. (Croft) Legyen $d = 2$, és K egy 2 élű szabályos háromszög, 0 középponttal, és egy vízszintes oldallal. Ekkor $M(K)$ egy vízszintes oldallal rendelkező, $\sqrt{3}$ oldalú szabályos hatszögből származik oly módon, hogy annak csúcsait megtartjuk, míg oldalait a végpontjaik megtartásával úgy deformáljuk, hogy hat konkáv hiperbolaív által határolt, 0 körüli csillagtartományt kapunk. Továbbá $M_{max}(K)$ és $P(K)$ ekkor egybeesnek, és megegyeznek egy olyan 2 élű szabályos hatszöggel, amelynek van egy függőleges oldala, és amelynek oldalközéppontjai $M(K)$ csúcsai. (Vegyük észre, hogy K-nak bármilyen irányú maximális húrja K-nak egy csúcsán halad át, és K-nak bármilyen egyenesre való vetülete megegyezik K valamelyik oldalának az egyenesre való vetületével.)

§1 Milyenek ezek a testek?

1. Tétel. A) *(Bolker) A* $\{P(K) \mid K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex test*$\}$ *halmaz megegyezik azon d-dimenziós lineáris normált terek egységgömbjeinek halmazával, amelyeknek duális tere izometrikus altere az* $L^1[0,1]$ *térnek.*

B) *(Croft)* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex testre* $M(K)$ *általában nem konvex, de (Busemann) ha* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex test* 0*-ra szimmetrikus, akkor* $M(K) = M_{max}(K)$ *konvex (és a* K *egységgömbű lineáris normált térben az izoperimetrikus probléma megoldásának polárisa, ahol a térfogat a d-dimenziós Lebesgue mérték, és a felszín a bármilyen metrikus térben legtermészetesebb módon értelmezett* $(d-1)$*-Hausdorff mérték).*

C) *(Brehm-Meyer) Legyen* $d \geq 2$ *egész szám. Ekkor pontosan akkor lesz minden* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex test esetére* $M_{max}(K)$ *konvex, ha* $d \leq 3$*.*

§2 Milyen relációk vannak ezek között a testek között?

2. Tétel. *(Petty-Martini) Legyen* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex test, és legyen* $0 \in intK$*. Ekkor* $M(K) \subset M_{max}(K) \subset P(K)$*;*
($d = 2$*-re Hammer,* $d \geq 3$*-ra Makai-Martini-Ódor) az első tartalmazásban egyenlőség pontosan akkor áll, ha* K 0*-ra szimmetrikus;*
(Martini) a második tartalmazásban egyenlőség pontosan akkor áll, ha $d \leq 2$ *vagy* K *ellipszoid.*

§3 Egyedi K testekre javíthatók-e a fenti tartalmazási relációk?

3. Tétel. A) *(Gardner-Martini) Legyen* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex test, és legyen* $0 \in intK$*. Ekkor* $bdM(K) \cap bdM_{max}(K)) \neq \emptyset$*, ahol* bdX *egy* X *halmaz határát jelöli. Azaz, létezik* $u \in S^{d-1}$*, amelyre minden* $x \in \mathbb{R}^d$ *esetén fennáll* $V_{d-1}(K \cap u^{\perp}) \geq V_{d-1}(K \cap (u^{\perp} + x))$*.*

Példa. Ha K gömb, amelynek középpontja $c \neq 0$, akkor a fenti egyenlőtlenség nem csak egyetlen $u \in S^{d-1}$-ra áll fenn minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén, hanem $S^{d-1} \cap c^{\perp}$ minden u pontjára, amely halmaz egy fő-S^{d-2} az S^{d-1}-en.

Sejtés. A tételben fent említett maximalitási tulajdonságú $u \in S^{d-1}$-ek halmazának Hausdorff dimenziója legalább $d-2$, és $(d-2)$-Hausdorff-mértéke legalább $V_{d-2}(S^{d-2})$.

A') *(Makai-Martini) A fenti sejtés egy gyengébb formában igaz, sőt, $(d-1)$-dimenziós metszetek helyett m-dimenziós metszetekre fennáll*

A") *($m = 1$-re Hammer, $m \geq 2$-re Makai-Martini) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, és legyen $1 \leq m \leq d-1$ egész szám. Ekkor létezik $L_m \subset \mathbb{R}^d$ lineáris m-altér, amelyre minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén fennáll $V_m(K \cap L_m) \geq V_m(K \cap (L_m + x))$, ahol $V_m(X)$ jelöli egy m-dimenziós affin altérben fekvő halmaz m-dimenziós Lebesgue mértékét. Továbbá az itt említett maximalitási tulajdonságú L_m lineáris alterek halmaza nemcsak hogy nem üres, hanem a fentihez hasonló értelemben elég nagy halmazt alkotnak (a Hausdorff dimenzióval kapcsolatban).*

B) *(Makai-Martini) Legyen $d \geq 3$ egész szám. Ekkor "majdnem minden" $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre fennáll $M_{max}(K) \subset intP(K)$ (pontosabban ez fennáll konvex testeknek a Hausdorff metrika szerint egy sűrű nyílt halmazán).*

Emlékeztetünk rá, hogy a 2. Tétel szerint $d \leq 2$ esetén $M_{max}(K) = P(K)$.

Továbbá a 2. Tételben szereplő ellipszoid karakterizáció ($d \geq 3$-ra), mármint hogy $M_{max}(K) = P(K)$, és majdnem minden konvex testnek ettől teljesen eltérő viselkedése, mármint hogy $M_{max}(K) \subset \mathrm{int}P(K)$, kapcsolatban van a következő tétellel (sőt a 3. Tétel **B)** részének bizonyítása többé-kevésbé az alábbi tételből következik).

Tétel. A) *(Blaschke) Legyen $d \geq 3$ egész szám. Ekkor egy $d \geq 3$ dimenziós lineáris normált tér egységgömbje ellipszoid pontosan akkor, ha minden ($(d-1)$-dimenziós) lineáris altérre létezik P lineáris projekció az altérre (azaz $P^2 = P$, és a P képtere az adott altér), amely kontrakció. (Mint az euklideszi térben az ortogonális projekció.)*

B) *(Gruber) Az $\mathbb{R}^d$ térben "majdnem minden" normára semmilyen $2 \leq m \leq d-1$ dimenziós lineáris altérre sincs kontraktív lineáris projekció.*

§4 Vannak-e fordított irányú tartalmazások ezen testek konstansszorosai között?

Példa. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ egy 2 élű szabályos háromszög, amelynek van egy vízszintes oldala, és amelyre $0 \in \mathrm{int}K$, de 0 nagyon közel van K-nak a vízszintes oldalával szemközti csúcsához. Ekkor $u \in S^1$ függőleges vektor esetén tetszőleges rögzített pozitív ε esetén lehetséges $V_{d-1}(K \cap u^\perp) < \varepsilon \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^d} V_{d-1}(K \cap (u^\perp + x))$, azaz $M_{max}(K) \not\subset \varepsilon^{-1} \cdot M(K)$.

4. Tétel. A) *(Makai-Martini) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test. Ekkor létezik egy $c \in intK$ pont, amelyre fennáll $M_{max}(K) \subset \left(\frac{d+1}{d}\right)^{d-1} \cdot M(K-c)$, azaz minden $u \in S^{d-1}$-re fennáll*

$$max_{x \in \mathbb{R}^d} V_{d-1}(K \cap (u^\perp + x)) \leq \left(\frac{d+1}{d}\right)^{d-1} \cdot V_{d-1}(K \cap (u^\perp + c)).$$

Továbbá ez az egyenlőtlenség éles, pl. K egy szabályos szimplex esetén, amikor c a súlypont, $u \in S^{d-1}$ egy hiperlaphoz tartozó magasság irányába mutató vektor, és a maximális $(d-1)$-térfogatú, u-ra ortogonális hipersíkkal való metszet a tekintett hiperlap.

Sőt, $(d-1)$-dimenziós metszetek helyett m-dimenziós metszetekre fennáll az alábbi általánosabb

A') *(Fradelizi) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, és legyen $1 \leq m \leq d-1$ egész szám. Legyen továbbá c a K test súlypontja. Ekkor minden $L_m \subset \mathbb{R}^d$ lineáris m-altérre fennáll*

$$max_{x \in \mathbb{R}^d} V_m(K \cap (L_m + x)) \leq \left(\frac{d+1}{m+1} \right)^m \cdot V_m(K \cap (L_m + c)).$$

Továbbá ez az általánosabb egyenlőtlenség is éles, szintén pl. K egy szabályos szimplex esetén, amikor L_m K-nak egy m-lapjával párhuzamos, és a maximális m-térfogatú, vele párhuzamos metszet K-nak a tekintett m-lapja.

B) *(Makai-Martini) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test. Ekkor*

$$P(K) \subset [2\pi d(1 + o(1))]^{d/2} \cdot M_{max}(K),$$

ahol a o jel $d \to \infty$-re értendő.

B') *(Makai-Martini) A* **B)** *állításnak szintén van $1 \leq m \leq d-1$ dimenziós projekciókra, és a párhuzamos affin m-síkokkal való metszetek között a maximális m-térfogatúakra vonatkozó általánosítása. (K-nak, ill. alkalmas m-metszetének alkalmas m-altérre való projekciói térfogatainak összehasonlítása, pontosabban, hogy a második szám nem lehet sokkal kisebb az elsőnél).*

Irodalom

(Az alábbiakban csak a szerzőnek a fenti előadással kapcsolatos publikációit adjuk meg, amelyek viszont bőséges további utalásokat tartalmaznak.)

(1) E. Makai, Jr., H. Martini, The cross-section body, plane sections of convex bodies, and approximation of convex bodies, I,. Geom. Ded., 63 (1996), 267-296.
(2) E. Makai, Jr., H. Martini, The cross-section body, plane sections of convex bodies, and approximation of convex bodies, II. Geom. Ded., közlésre elfogadva.
(3) E. Makai, Jr., H. Martini, On bodies associated with a given convex body, Canad. Math. Bull., 39 (1996), 448-459.
(4) E. Makai, Jr., H. Martini, T. Ódor, Maximal sections and centrally symmetric bodies, előkészületben
(5) E. Makai, Jr., H. Martini, előkészületben

MTA Matematikai Kutató Intézete, H-1364 Budapest, Pf. 127
E-mail address: makai@math-inst.hu