AKADÉMIAI DOKTORI ÉRTEKEZÉS

NÉMETI ISTVÁN

BUDAPEST

1986

D O K T O R I   É R T E K E Z É S

Szabadalgebrák és eldönthetőség az algebrai logikában

NÉMETI ISTVÁN

BUDAPEST

1986

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

0.1. Előzmények, elhelyezés a világirodalomban.

Amit ma relációalgebra (vagy cilindrikus algebra) néven tartunk számon, azt a múlt század második felében relációkalkulus(-ok) néven vizsgálták, ld. pl. De Morgan[D1864], Peirce[P1870],[P1882], Macfarlane[Mc1880], [Mc1882], Schröder[Sr1890], Murphy[Mu1882]. A relációkalkulusokat vagy relációalgebrákat a Boole algebrák bővítéseként vezette be De Morgan a múlt század közepén. A relációalgebra elemei ugyanúgy halmazok, mint a Boole algebra elemei, de most nem strukturálatlan "pontok" halmazáról van szó, hanem rendezett párok halmazáról. Tehát a relációalgebra elemei binér relációk. Ennek megfelelően a szokásos Boole műveleteken túlmenően a relációalgebrák elemein értelmezve van még a relációkompozíció ";" jelű binér művelete és a relációinverz "$\smile$" jelű művelete. A Boole algebrákhoz hasonlóan a nevezetes relációkalkulusok bármelyikét egy véges axiómarendszer rögzítésével adják meg. A legerősebb nevezetes relációkalkulust RA -val jelöljük. (RA esetében pl. a Boole axiómákhoz hozzávett új axiómák egyike a ";" asszociativitását posztulálja.) Gyengébbnek nevezünk egy relációkalkulust egy másiknál, ha kevesebb állítást lehet bizonyítani az axiómáiból. (Pl. ha RA -ból elhagyjuk a ";" relációkompozíció asszociativitását posztuláló axiómát, megkapjuk az NA nevű nevezetes gyengébb relációkalkulust.) A múlt században Peirce és Schröder azt vizsgálta, hogy a különböző relációkalkulusokban kifejezhető-e minden olyan állítás (binér relációkról), melyet ma elsőrendű logikai mondatnak (zárt formula) neveznénk. Röviden tehát a <u>Peirce-Schröder probléma</u> azt kérdezi, hogy (binér) relációk minden elsőrendű tulajdonsága kifejezhető-e a különböző relációkalkulusokban. Schröder[Sr1890] (3. kötet, 551. old.) pozitív megoldást publikált a problémára, de Löwenheim[L15](450. old.) kimutatta, hogy Schröder bizonyítása hibás. Sőt, Löwenheim[L15] azt is bizonyította, hogy egy bizonyos értelemben a válasz negatív. Tarski[T41] általánosította Löwenheim eredményét, amennyiben kimutatta, hogy a Löwenheimi értelemben a negatív válasz <u>minden</u> relációkalkulusra igaz. 1943-44 folyamán Tarski (ld. [T45sz],[T53]) azt is észrevette, hogy egy kicsit más értelemben pozitív válasz adható, legalábbis a legerősebb (vizsgált) relációkalkulusra, azaz RA -ra. Arról van szó, hogy bár nagy általánosságban az RA relációkalkulus gyengébb az elsőrendű logikánál, mégis, ha erősebb matematikai elméletek (pl. aritmetika, halmazelmélet, valós számok aritmetikája) formalizálása a célunk, akkor RA és az elsőrendű logika egyformán erős, kifejezőerejük azonos. Tehát ezekben az esetekben az elsőrendű logika visszavezethető RA -ra.*/ A Peirce-Schröder problémának azonban nyitva maradt az a része, hogy RA helyett a gyengébb relációkalkulusokra is visszavezethető-e az elsőrendű logika (a Tarski-féle feltételek mellett). (Ez ekvivalensnek bizonyult azzal a kérdéssel, hogy a halmazelmélet visszavezethető-e az illető relációkalkulusokra, ld. pl. Löwenheim[L40].) Tarski, későbbi vizsgálatai alapján, illetve a fenti "RA -ra visszavezető" tételeinek alkalmazása során egyre nagyobb fontosságot tulajdonított a (gyengébb relációkalkulusokra vonatkozó) nyitvamaradó problémának. Ennek okait kicsit később megpróbáljuk (legalábbis részben) érinteni. A nyitvamaradó problémáról lényegesebb részeredményeket bizonyított (Tarskin kívül) pl. McKinsey, Henkin, Monk, Maddux, Givant. E vizsgálatok hatására nyerte el a Peirce-Schröder probléma nyitvamaradó része a Tarski-Givant [TG] könyvbeli végleges**/ formáját. Ez tulajdonképpen több összefüggő probléma, melyek közül kiemelnénk talán azt a két kérdést, hogy a halmazelmélet felépíthető-e az RA -nál gyengébb un. SA relációkalkulusban és felépíthető-e az SA -nál is gyengébb NA nevűben. A probléma megoldását jelen dolgozat nyújtja (az összes olyan relációkalkulusra, mely [TG]-ben vagy Tarski iskolájának más munkáiban szerepel).

Nézzük kicsit közelebbről, hogy miért érdekelte a századelő logikusait a Peirce-Schröder probléma, és általában a reláció- ill. cilindrikus algebrák elmélete, ld. pl. Schweitzer[Sw09], Behmann[Bh22], Tarski[T30],[T31], Kuratowski-Tarski[KT31], Löwenheim[L13],[L15],[L40], Quine[Q36], McKinsey [McKi40]. Ahhoz, hogy a választ erre a kérdésre meg tudjuk adni, először át kell tekintenünk néhány történelmi kérdést a szemantikaelmélet kialakulásával kapcsolatban. A fenti kérdésre tehát néhány oldallal később kapjuk meg a választ.

---

*/Későbbi jelöléseinkkel az lenne összhangban, ha EqRA -ra való visszavezetésről beszélnénk (hiszen RA azonosságlogikájáról van szó). A rövidség érdekében ezzel itt nem törődünk.

**/A [TG] könyv 1975 előtti változatai kicsit másképp exponálják a problémát, pl. a jelen dolgozatban NA -val jelölt relációkalkulusról többet kérdeznek. McNulty[McN85] és Maddux[Ma85a] szerint Tarski 1960 körüli szemináriumain a probléma már nagy súllyal és a [TG] korai változataiban leírt alakban szerepelt. Ld. még [Ma85b].

Tarski a harmincas években a logika eldönthetőségi és (visszavezethetőségi, másszóval) interpretálhatósági kérdéseit szoros egységben vizsgálta*/. E két (Tarskinál) egymásbafonódó területnek felel meg jelen dolgozat III. (eldönthetőség) és II. (interpretálhatóság) fejezete. A most említett két téma közül az interpretálhatósági témához tartozott Tarskinál a szemantika és az algebrai logika is. Nézzük meg, miért jelentette interpretálhatóság, szemantika és algebrai logika Tarskinál ugyanazt a problémakört. Az utóbbi kettő kapcsolatát, kicsit leegyszerűsítve, a következőképpen lehetne összefoglalni. A cilindrikus- és reláció-algebrákat (tehát az algebrai logikát) Tarski a szemantikaelmélet kidolgozásához hozta létre és szemantikaelméleti vizsgálódásai kapcsán tanulmányozta; ennek során azonban olyan eredményeket kapott, melyek szerint a cilindrikus- és reláció-algebra elmélet önmagában is fontos a logika számára. Most rátérünk annak kifejtésére, hogy ez pontosabban hogyan értendő.

Az egzakt szemantikaelméletet (jelentéstan) ma Fregétől és Tarskitól származtatják, ahol Tarski az, aki az elmélet végleges, matematikailag kézzelfogható alakját megteremtette.**/ (Maga a "szemantika" elnevezés is Tarskitól származik.) A most tárgyalt időszakban Tarski sok energiát fordított formalizmusok adekvát szemantikájának keresésére ([T30a],[T32], ld. még [T35]). A szemantikát viszont egyfajta interpretáció alakjában kereste. (A modellelmélet nyilvánvalóan egy interpretációja az elsőrendű logikának.) Szempont volt még a szemantikakeresésnél az, hogy ez az interpretáció valamilyen értelemben elegáns és lehetőleg "természetes" legyen. A korábbi (egyszerűbb logikai rendszerekkel kapcsolatos) tapasztalatok alapján ésszerűnek látszott az ilyen (szemantika szerepére jelölt) interpretációkat algebrai alakban keresni, pl. az elsőrendű logika formula-algebrájának minden cilindrikus homomorfizmusa egy interpretációt jelent. (És valóban, az elsőrendű modellelmélet Tarski-féle alapfogalmai, mint pl. "igazság valamely kiértékelés mellett", könnyen azonosíthatók a cilindrikus halmazalgebra definiciójának "kulcs-részeivel".) A cilindri-

*/Az interpretációs (másnéven redukciós) módszert ma is használják eldönthetetlenség bizonyítására.

**/A felületes szemlélő azt gondolhatná, hogy Tarskinak a matematikai körökön (sőt általában a logikai körökön is) messze túlterjedő világhíre kizárólag szemantikaelméletének (jelentéstanának) köszönhető és semmi köze sincs mondjuk Tarski cilindrikus- és reláció-algebrai tevékenységéhez. Látni fogjuk, hogy ez nincs így.

kus algebrák (a továbbiakban CA-k) alakjában Tarski olyan szemantikát talált az elsőrendű logikához, mely tartalmazza a szokásos modellelméletet, de annál hajlékonyabb (az I.4.3 fejezetben írunk arról, hogy a nem-reprezentálható CA-kat hogyan használják un. nemsztenderd modellként olyan, pl. bizonyításelméleti kérdések vizsgálatára, melyek a szokásos modellekkel nem vizsgálhatók). Az algebrai logika szemantikai szerepéről megemlítenénk még egyrészt, hogy több szerző szerint az un. Fregei kompozicionalitási elv érvényesülését Tarski egyszerűen azzal biztosította, hogy algebrai logikai alakban kereste a szemantikát (ilyen szemantikákra ez az elv mindig teljesül, ld. pl. [AS],[ANS84]) másrészt, hogy több fontosnak tartott logikának ma is csak algebrai logikai szemantikája létezik.*/

Az elsőrendű logika interpretálására Tarski két algebratipust talált kiemelkedően alkalmasnak: a cilindrikus algebrákat (CA-kat) és a relációalgebrákat (RA-kat). A kutatás tehát két irányra szakadt, és Tarski élete végéig mindkét irány folytatását egyformán fontosnak tartotta. A CA-k előnye, hogy a lehető legközvetlenebb formában interpretálják a logikát (a halmaz CA-knak felel meg a szokásos modellelméleti interpretáció), természetes módon adódnak a logikából és tükrözik azt stb.**/ Azt mondhatnánk, hogy a CA-k az elsőrendű logikára elegánsan "rá vannak szabva". És pontosan ez az erősség képezi hátrányukat is az RA -kkal szemben: Az RA-k előnye, hogy matematikailag hagyományosabban vizsgált struktúrák (múlt század második felében már erősen vizsgálták őket), a konzervatívabb ízlésű matematikusok érdeklődésére jobban számíthatnak, bizonyos klasszikus matematikai értelemben talán elegánsabbak. Talán ezekkel a jegyekkel függ össze az, hogy az RA interpretáció magára az elsőrendű logikára is új fényt vet, annak kiépítéséhez, formalizmusához, fejlesztéséhez újszerű távlatokat nyitott. Tarski az RA -interpretáció alapján az elsőrendű logika (és így a matematika alapjai) felépítésére olyan alternatív utat talált, melyet (bár semmi esetre sem akart az eredeti szokásos út fölé emelni) az eredetivel párhuzamos módon folytonosan vizsgálandónak tartott. Ezzel az alternatív úttal Tarski iskoláján kívül is sokan foglalkoznak ma már (pl. kombinátor logika, kategóriaelméleti logika). Ezen alternatív útnak itt három jellemzőjét említenénk.

---

*/Ide értve az un. protoalgebrai logikákat is (speciálisan az "algebra + filter" szemantikákat is). Fentiekkel kapcsolatban ld. még [GG84]10. old. és Levin[Lv82]21. old. **/A logika CA interpretációjáról a dolgozat különböző pontjain részletesen írunk.

1) Az egyik jellemző a kvantorok (kvantifikált individuumváltozók) száműzése a logikából. (Ez egy olyan törekvéshez kapcsolódik, mely a matematika régi, Peirce és Frege előtti formalizmusához próbál visszanyulni.*/) Tehát az elsőrendű logika szintaxisának radikálisan újszerű, tömörebb és bizonyos értelemben elegánsabb felépítéséről van szó, melyben nincsenek kvantorok (sőt bizonyos változatoknál individuumváltozók sincsenek). Ez az egyik célja a kombinátor logika**/ (pl. Curry-Feys[CF58], Curry-Hindley-Seldin[CHS72])-nak is és a kategóriaelméleti logika Lawvere[Lw72] jelentős részének is (pl. Bénabou munkásságának), de ezzel a céllal foglalkozik pl. Bernays[Be59], Craig[Cr74], Quine[Q60],[Q71] is (ld. pl. Levin[Lv82] 42_7-43^2 old. és 58. oldalon 15-ös jegyzet, vagy [TG]0.11_7-0.14_{12} old.). Tarski iskolájának ilyenirányú munkássága a most megjelenő [TG] könyvben kulminál, mely fentiek szerint a logika egy ma igencsak aktív, kiterjedten művelt és divatos területére ad "Berkeley-centrikus" betekintést.

2) Másik jellemző(-je az alternatív útnak), hogy a (logikai vizsgálat tárgyát képező) elméletek itt jól kezelhető algebrai objektumok (adott esetben RA-k). Ezek sok esetben könnyen áttekinthetők, szemléletesek és jól rajzolhatók (ami valóban már többször hasznosnak bizonyult). Különösen erősen hangsúlyozzák ezt a jellemzőt a most tárgyalt (RA-k révén felmerült) alternatív út kategóriaelméleti változatának irodalmában. A kategóriaelméleti logikában (pl. a Lawvere-féle algebrai elméletek és továbbfejlesztéseiknél Manes[Mn75],[Lw67]) ugyanez úgy jelenik meg, hogy az elméletek (struktúrával ellátott) kis kategóriák, a modellek és interpretációk pedig funktorok (RA esetben ez homomorfizmust jelent).***/ Különösen hangsúlyozza a rajzolhatóságot a francia iskola, pl. Guitart-Lair[GL80], Guitart[G81].

3) A harmadik jellemző az elsőrendű logika felépítését vagy bevezetését érinti. Hagyományosan, mikor az ítéletkalkulus után az elsőrendű logika

---

*/Érdekesség lehet, hogy míg Peirce volt az, aki a kvantorokat először bevezette (Peirce[P1885], Fregétől függetlenül, vele párhuzamosan); az őáltala fellendített RA-elmélet tette ezeket először nélkülözhetővé is.

**/Combinatory logic.

***/A kategóriaelméleti logika nincs túl messze a most tárgyalt Tarski-féle RA-alapú algebrai logikától: Minden RA kategória a ";" relációkompozícióra nézve, és megfordítva az un. logikai kategóriák a morfizmuskompozíción (;) kívül el vannak látva további műveletekkel ("enriched categories"), melyek kapcsolatba hozhatók RA többi (; -n kívüli) műveleteivel. E kétirányú kapcsolat alapján a tételek és definiciók elég jól lefordíthatók, pl. szabad kategória $\mapsto$ szabad RA.

bevezetésére rátérünk, az ítéletkalkulust mint kész struktúrát "el kell dobni", és az elsőrendű logikát "teljesen elölről" kell felépíteni, hiszen utóbbinak legkisebb építőkövei az individuumváltozók. Az alternatív útnál viszont (mint már jeleztük), nem kellenek individuumváltozók. Itt az ítéletkalkulusból egyenesen továbbépíthető az elsőrendű logika két új mondattani kapcsoló (formulafelépítési szabály), a ";" és "$^{\cup}$" hozzávételével a régiekhez. (Itt ";" ill "$^{\cup}$" a relációkompozíciónak ill. a reláció-inverznek felel meg intuitíven.) Természetesen a Boole-féle axiómákhoz hasonlóan az új kapcsolókról is fel kell vennünk logikai axiómákat. (Tehát megtartjuk az ítéletkalkulus eredeti nyelvét, de ha φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulák voltak, akkor most $(\varphi;\psi)$ és $\varphi^{\cup}$ is formulái lesznek az új nyelvnek. Ezután fel kell még írni néhány új axiómát és több változtatás nincs: kész az alternatív elsőrendű logika.) Jelen, harmadik jellemzőnek tehát lényeges része az, hogy az ítéletkalkuluson (lehetőleg) csak kicsit változtatva kapjuk az elsőrendű logikát. Ebből a szempontból, Tarskiban elég hamar felmerült a kétely, hogy RA alapú megoldása esetleg feleslegesen sokat vesz hozzá az ítéletkalkulushoz. (Ez tulajdonképpen a Peirce-Schröder probléma RA -nál gyengébb relációkalkulusokra vonatkozó részének megismétlése más szavakkal.)

A fent leírt három pont ma már a logikán belül három kutatási iránynak tekinthető. Mindhárom irány létezésének az az alapja, hogy a Peirce-Schröder probléma megoldása RA -ra pozitív. Ha rendelkezésre állna a Peirce-Schröder probléma pozitív megoldása RA -nál jóval gyengébb relációkalkulusokra is, akkor a fenti három kutatási irányt esetleg egészen más jelleggel (vagy más keretek között) is lehetne csinálni. Részben ez a válasz arra a (ii) oldalon felvetett kérdésre, hogy miért volt népszerű a Peirce-Schröder probléma (RA-nál gyengébb relációkalkulusokra vonatkozó változata). Jelen válaszon kívül még további motivációt nyújtott az, hogy mint az alábbiakban illusztráljuk majd, az un. L_n logikákra való alkalmazáshoz szükség volt a Peirce-Schröder probléma nyitvamaradó részének megválaszolására is.

Tarski és munkatársai kiválasztották RA három nevezetes gyengítését, ezek az RA -nál gyengébb SA , az SA -nál gyengébb WA , és az annál is gyengébb NA relációkalkulus. Mindhárom gyengítés a ";" (relációkompozíció) asszociativitását posztuláló axióma helyettesítését jelenti egy gyengébb változattal (NA esetében teljes elhagyását). Kitűzték célul, hogy erre a három gyengítésre kellene megoldani a Peirce-Schröder problémát. Nézzük meg kicsit közelebbről, hogy miért pont ezeket a gyengítéseket választották. Az RA -interpretáció fenti 1)-3) pontban vázolt újszerű vonzatainak vizsgálata után Tarski megpróbálta az eredményeket alkalmazni magára a szokásos L_ω elsőrendű logikára (tehát úgy, hogy a megfogalmazandó új állításban most kizárólag csak L_ω hagyományos fogalmai szerepeljenek). Egy tisztán L_ω -ra vonatkozó eredményben RA helyett L_ω valamelyik <u>természetes szeletéről</u> kellene beszélni, mondjuk azt lehetne állítani, hogy ebben a szeletben (RA-hoz hasonlóan) már felépíthető a teljes L_ω. Tarski végre is hajtotta ezt az alkalmazást (erről szól pl. a [TG] könyv), de az eredménnyel nem volt elégedett, mert nem sikerült L_ω valamilyen tényleg szép természetes szeletét helyettesíteni RA helyébe. Tarski, McKinsey, Henkin, Maddux és mások sokat vizsgálták e negatív jelenség okait. Azt találták, hogy szép (L_ω -beli) alkalmazáshoz RA helyett a gyengébb SA , WA , vagy NA relációkalkulusokra kellene megoldani a Peirce-Schröder problémát. Tehát a vizsgálat eredményeként jött ki az SA , WA , NA választás (és ezért hangsúlyozza pont ezekre az esetekre a Peirce-Schröder problémát az irodalom). Most röviden vázoljuk, hogy mindez (pl. SA kiválasztása) konkrétabban hogyan, milyen jellegű meggondolásokon ill. eredményeken keresztül történt.

Természetes szelete L_ω -nak pl. az L_n $(n\in\omega)$ n-változós logika (mely csak az első n változójelet használja). Ha RA -nak L_ω -beli megfelelőjét keressük, akkor ezek az L_n logikák bizonyulnak legalkalmasabb jelöltnek (a szokásos nevezetes szeletek közül) erre a célra. A legkülönbözőbb technikai eredmények mind abba az irányba mutatnak, hogy az lenne "szép", ha RA és L_3 ekvivalens lenne (másszóval L_3 kívánkozik RA természetes megfelelőjeként), pl. minden RA -term tekinthető L_3-formulának és minden zárt L_3-formula tekinthető RA-termnek. Ugyanez L_4-re már nagyon <u>nem</u> igaz (pl. $\exists v_0 v_1 v_2 v_3 [v_0 R v_3 \wedge v_1 R v_3 \wedge v_2 R v_3]$ már nem fejezhető ki RA-termek segítségével, ld. pl. jelen dolgozat 39. old.). Tehát ha RA és L_3 ekvivalens lenne, akkor Tarski L_ω és RA kapcsolatára vonatkozó tételei nagyon természetes jelentéssel bírnának tisztán L_ω -n belül (pl. bizonyításelméleti szempontból). Sajnos azonban McKinsey bizonyította, hogy RA és L_3 nem ekvivalensek: L_3 lényegesen gyengébb, mint RA . Fuhrken, Monk, Henkin (pl. [H73]) és Maddux későbbi eredményei azt jelezték, hogy a távolság elég nagy. Ugyanakkor L_4 már nem használható jól mint RA természetes megfelelője (pl. a fenti okok miatt). Ezért Tarski és Maddux előállították RA -nak azt a gyengítését, mely pontosan ekvivalens L_3-al. Ez nem más mint SA . Ezután megállapították, hogy ha SA -ban meg lehetne ismételni azt, amit Tarski RA -ban csinált L_ω-val, akkor a most körvonalazott probléma a lehető legszebben megoldódna (összefoglalva, arról a problémáról van szó, hogy L_ω -t szeretnénk L_3-ban interpretálni annak ellenére, hogy L_3 lényegesen gyengébb mint RA). Jelen dolgozat II. fejezetében látni fogjuk, hogy pontosan úgy, ahogy azt Tarski csinálta, sem SA -ban, sem más L_3 -al ekvivalens algebrafajtában (pl. CA_3-ban) nem lehet L_ω -t felépíteni, de kicsit másképp mégiscsak lehet. Tehát az RA tipusú algebraizálás tisztán L_ω -beli alkalmazásának problémájára kapunk pozitív megoldást (de bizonyos értelemben negatívat is) a II. fejezetben. Melléktermékként megtudjuk, hogy a legkisebb n , melyre L_n-ben felépíthető L_ω , három. ([TG]-ben már tudták, hogy $2<n<5$.) Szintén három a legkisebb olyan n , melyre L_n rendelkezik a Gödel nem-teljességi tulajdonsággal (ezt ugyanabból a bizonyításból kapjuk). Mindkét L_3-ra vonatkozó bizonyításban a valódi nehézség abban rejlik, hogy itt L_3 szintaktikai (bizonyításelméleti) értelemben szerepel[*/].

Nézzük kicsit közelebbről a (Tarski csoportja által) kiválasztott SA , WA , és NA relációkalkulusokat (a választás indoklását is konkretizálva kicsit). RA és L_3 összehasonlításakor Tarski és munkatársai (a fent idézett szerzők) azt kapták, hogy az RA -axiómák közül egyedül a ";" relációkompozíció asszociativitása az, mely nem bizonyítható L_3 -ban. Az asszociativitás L_3-ban bizonyítható részére korlátozódva kapjuk SA -t, melyről bizonyítható, hogy ";" még mindig reprezentálható valódi relációkompozícióként (egy legnagyobb relációra leszorítva mindent). WA definíciójánál helyettesítjük az asszociativitást azzal a kikötéssel, hogy legyen ";" valódi relációkompozícióként reprezentálható (aránylag szabályos legnagyobb reláció mellett). NA úgy keletkezik, hogy teljesen elhagyjuk az

---

[*/] Ez azt jelenti, hogy pl. L_ω visszavezetésekor a $\varphi\in L_\omega$ formula $\kappa\varphi\in L_3$ megfelelőjéről nem elég azt kikötni, hogy a modellekben ugyanazt jelentse mint φ, hanem még az is kell, hogy az ($\models\varphi \Rightarrow L_3$-bizonyítható $\kappa\varphi$) implikáció is fennálljon (pontosabban a II.1 fejezetbeli ^{3}(*) állításról van szó). Az L_3-bizonyíthatóság viszont nagyon gyenge, sok olyan $\varphi\in L_3$ van, melyre $\models\varphi$ de φ nem L_3-bizonyítható. (Általában, az L_n logikákra nem igaz a teljességi tétel, sőt egy bizonyos értelemben nem is tehető igazzá, ld. Monk[M69].)

RA axiómák közül az asszociativitást. Látható, hogy RA, SA, WA, NA ebben a sorrendben egyre gyengébbek. [TG] azt kérdezi, hogy ezek közül melyikre vezethető vissza L_ω és melyikre nem. Jelen dolgozat II. fejezete szerint SA -ra visszavezethető, és jelen dolgozat III. fejezete szerint sem WA, sem NA -ra már nem vezethető vissza. Tekintve, hogy a(z SA-nál valamivel gyengébb) CA_3 algebraosztályra is sikerült bizonyítani a visszavezethetőségi tételt, a WA és NA -ra vonatkozó kérdés kicsit nehezített változataként felmerül, hogy CA_3 nevezetes gyengítéseire (pl. az un. NCA_3 és Crs_3 -ra) visszavezethető-e L_ω. Megintcsak jelen dolgozat III. fejezete szerint a válasz negatív, sőt semmilyen $\alpha \geq 3$ rendszámra az un. NCA_α vagy Crs_α gyengítésekre sem vezethető vissza L_ω. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy az NCA_α ill. Crs_α -ban érvényes azonosságok halmazáról belátjuk, hogy eldönthető.

0.2. A téma algebrai irodalmáról.

Az RA- és CA-elméletet nem érdemes elkülönítve vizsgálni, hiszen itt (algebrai szempontból) lényegében ugyanazokat a kérdéseket vizsgálják, csak különböző nyelven. E két nyelv egymásba való lefordíthatóságáról ld. pl. [HMT]§5.3, vagy részletesebben [Ma78],[TG].

A 0.1 §-ban már jeleztük, hogy a reláció- és cilindrikus algebrák irodalma a múlt század második felében már kiterjedt volt (De Morgan, Peirce, Schröder, stb.), hasonló szellemben folytatódott a századfordulón (pl. Lüroth[Lü04], Schweitzer[Sw09]) és a századelőn a logikusok részvétele erősödött (Löwenheim[L13],[L15],[L40], Bohmann[Bo22], Kuratowski-Tarski [KT31], Tarski[T31], Quine[Q36], McKinsey[McKi40]). Ezután az irodalom áttekinthetetlenül kiterjedté válik. Az ötvenes és hatvanas években különösen kiemelkednek (algebrai szempontból) pl. Tarski, Jónsson, Birkhoff, McKenzie, Monk, Schein munkái. Birkhoff[Bi48,67] "maradékos hálók"-ként vezeti be az RA-kat. Birkhoff azt írja, hogy a maradékos hálók elméletét Dilworth[Di39] dolgozta ki részletesen (Dedekind nyomán); és megmutatja, hogy a speciális RA műveletek term-definiálhatók a maradékképzés $x\backslash y$ és x/y műveletei segítségével. Az utolsó 15 évben megjelent több mint 260 CA (ill. RA) elméleti publikáció közül a magyar algebrista számára talán különösen érdekes lehet [HMT]I. rész (1971),[HMTAN],[HMT]II. rész (1985),[HMT86],[TG], McKenzie[McKe70], Henkin[H77],[H82], Monk[M77], Jónsson[J82],[J84]. Az utóbbi években Bjarni Jónsson tesz sokat a témáért.

0.3. A dolgozat tartalmáról.

A dolgozat a 0.1 §-ban vázolt Peirce-Schröder-Tarski problémakört nem a 0.1 §-ban használt RA (SA, WA) elméleti keretben (vagy nyelven), hanem ehelyett (az azt lényegében tartalmazó) CA-elméleti keretben vizsgálja[x/]. Ennek egyik oka az, hogy a CA-elméleti eredményekből könnyen megkaphatók RA-elméleti megfelelőik (ezt minden esetben meg is mutatjuk majd), de nem megfordítva.: Pl. a CA_3-beli interpretálhatóságból (II. fejezet) könnyen következik az SA -beli interpretálhatóság, de fordítva egyáltalán nem következik; továbbá az SA gyengítéseit képező NA,WA -ban való interpretálhatatlanság (III. fejezet) jóval könnyebben bizonyítható, mint CA_3 nevezetes gyengítéseiben (pl. Crs_3-ban) való interpretálhatatlanság.

Valamely K algebraosztály EqK azonosságelméletében való interpretálhatóság erősen függ EqK logikai tulajdonságaitól. EqK logikai tulajdonságai viszont szoros kapcsolatban vannak K szabadalgebráinak szerkezetével, különös tekintettel utóbbi atomjainak viselkedésére (ha K elemei hálószerűen rendezettek, mint a mi eseteinkben mindig). Pl. ha a szabadalgebra atomos, akkor a megfelelő logika nem rendelkezik a Gödel nem-teljességi tulajdonsággal, hiszen minden végesen axiomatizálható elmélet ilyenkor kiterjeszthető egy teljes, végesen axiomatizálható elméletté (bizonyos nagyon gyenge feltételek mellett ez a "megfelelő logika" azonosítható EqK -val).[xx/] Márpedig, ha EqK nem rendelkezik a Gödel nem-teljességi tulajdonsággal, akkor erős logikai rendszerek (melyekben pl. a matematika jelentős része felépíthető) nem interpretálhatók EqK -ban.[xxx/] Tehát a 0.1 §-ban exponált Peirce-Schröder-Tarski problémával szoros kapcsolatban van a szabad cilindrikus algebrák atomosságának kérdése. Ezért ezt a kérdést jelen dolgozat II. fejezete kiterjedten vizsgálja. CA_α jelöli az α-dimenziós CA-k osztályát (α tetszőleges rendszám). Szabad algebrákról bizonyítjuk, hogy:

[x/] Jelezni fogjuk azonban mindenütt, hogy az RA -elméleti eredmények hogyan adódnak a (dolgozatban hangsúlyosabban tárgyalt, valamivel erősebb) CA-elméletiekből.

[xx/] Ezért algebrai logikában a szabadalgebra atomjait centrális kérdéskörként szokás vizsgálni.

[xxx/] Az atomosság és a logikai tulajdonságok most vázolt kapcsolatát precízebben leírtuk Németi[N85d]-ben (ld. még jelen dolgozatban 40. old. is). De ez a kapcsolat az oka annak is, hogy D. Pigozzi (akinek doktori témája a CA-k és a logika kapcsolata volt) különös súllyal vizsgálta a CA-k atomjait (ill. atomosságát).

(1) Semelyik szabad CA_α sem atomos, ha $\alpha \geq 3$ ($\alpha < 3$ esetén ez nem igaz).

(2) A végesen generált szabad CA_α-k zérodimenziós része[*/] atomos pontosan akkor, ha α vagy végtelen, vagy kisebb mint három.

(3) Az n elemmel szabadon generált CA_α-nak van n -elemű (irredundáns) generátorrendszere, mely azonban nem szabad generátorrendszer, ha $\alpha \geq 3$ és $n < \omega$ ($\alpha < 3$ esetén ez nem igaz). Ez a [HMT] monográfiából a 2.7. Probléma megoldása. Fenti (1) pedig a [HMT]4.14. Probléma megoldása.

(4) Fenti (1) és (3) igaz RA -ra és SA -ra is. NCA_3, WA és NA -ra (3) nem igaz, (1)-ről pedig nem tudjuk, hogy igaz-e.

Szabadalgebrákkal kapcsolatos vizsgálatainkat, problémamegoldásainkat bővebben ismerteti a II.1 fejezet.

Fenti (1) bizonyítása során pozitív megoldást adunk a Peirce-Schröder-Tarski probléma CA_3 és SA eseteire. Hogy ez bővebben mit jelent, arról (a jelen bevezetés kiegészítését képező) II.1 fejezetben írunk (mely a II. fejezet bevezetése). Eközben bizonyításelméleti eredményeket is kapunk az L_n ($n \in \omega$) logikák szintaktikai tulajdonságairól. Így sikerül megoldást adni egy [TG]-ben felvetett (L_n-re vonatkozó) problémára[**/]. Az L_n kérdéskörről, az eredmények jellegéről, stb. szintén a II.1 fejezetben (mint jelen bevezetés kiegészítésében) írunk. Említettük 0.1 §-ban, hogy azzal a módszerrel, amellyel Tarski, Givant és Maddux próbálták, nem lehet az interpretálhatóságot RA -ról SA -ra általánosítani. Ezt bizonyítjuk a II. fejezetbeli 17. Tételben és 18. Megjegyzésben; valamint intuitív áttekintő jelleggel írunk erről a II.1 fejezet végén a (**) állítás után. Ezzel negatív megoldást kapunk egy [Ma85]-ben felvetett problémára.

Fentiek mind a dolgozat II. fejezetében találhatók. A dolgozat másik fő fejezete, a III. fejezet a II. fejezetben bizonyított pozitív eredmények érvényességi körét próbálja kitapintani. A II. fejezet a

---

[*/] Valamely $\mathfrak{A} \in CA_\alpha$-nak $Zd(\mathfrak{A})$ zérodimenziós részén $\mathfrak{A}$ azon elemeinek halmazát értjük, melyek intuitíve a zárt formuláknak felelnek meg, azaz melyek a Boole-műveletek kivételével minden más ($\mathfrak{A}$ -beli) műveletnek fixpontjai.

[**/] Az L_n logikákkal foglalkoznak (Tarskin kívül) pl. Poizat[Po82], Henkin [H67],[H73],[H83], Johnson[Jo73], Maddux[Ma83], Monk[M71].

Peirce-Schröder-Tarski probléma egy részét oldja meg csupán: pozitív válaszokat ad az EqSA, $EqCA_3$ és L_3 esetekre. Az idézett probléma azonban a nevezetes relációkalkulusok mindegyikére kiterjedt. Nyilván a fentieknél erősebb kalkulusokat nem érdemes nézni, de a többit, mint pl. WA, NA, NCA_α, Crs_α és L_n gyengítései már igen. Ezekkel foglalkozik a III. fejezet. Mint már jeleztük, NCA_α és Crs_α a CA_α-nak nevezetes gyengítései*/: NCA_α áll Ralph McKenzie Richard Thompson nevű tanítványa kutatómunkájának középpontjában, pl. erre az osztályra bizonyította (Henkin tanítványa, Diane Resek egy mély eredményének felhasználásával) az algebrai logika talán legjelentősebb újkeletű reprezentáció tételét (Thompson [Th81],[HMT]3.2.88). Tekintve, hogy Thompson NCA_α-ra építi átfogó és (Boris Schein változatához hasonló) általános algebrai logikáját (mely már nyújtott is átütő eredményeket), indokoltnak látszott jelen dolgozatban is kiemelt figyelmet fordítani NCA_α-ra (mint CA_α gyengítésére).

Crs_α (cylindric relativised set algebras) hangsúlyos vizsgálatát Henkin kezdeményezte (ld. pl. Henkin[H68]) a hatvanas években (és szorgalmazza a mai napig is), aki azt sejti, hogy Crs_α-ból CA_α minden eleme megkapható a (jelen dolgozat 23. oldalán ismertetett) un. "twisting" operációval (ez Henkin szerint megoldaná a reprezentációproblémát). A Crs_α osztály központi szerepet tölt be a [HMTAN] és [HMT]II. rész monográfiákban is.

Tekintve, hogy (mint már jeleztük) a dolgozat a Peirce-Schröder-Tarski problémakört elsődlegesen CA-elméleti keretben (és nem mondjuk RA-elméleti vagy L_n-elméletiben) vizsgálja, a gyengített kalkulusokra vonatkozó negatív eredményeket is elsősorban CA_α nevezetes gyengítéseire, tehát NCA_α és Crs_α-ra (valamint ezek erősítésére) bizonyítjuk, és ezért kevésbé részletesen írjuk le a bizonyításokat az SA valamint L_n gyengítéseire. Indokolja ezt a választást az is, hogy NCA_α és Crs_α-ról jóval nehezebb negatív eredményeket bizonyítani, mint NA és WA-ról (erősebb módszert kell NCA_α eldönthetőségéhez kidolgozni stb); NCA_α és Crs_α mint relációkalkulusok erősebbnek tűnnek WA-nál (bár nem érik el SA erejét). A III. fejezet vizsgál olyan Crs_α és CA_α közé eső osz-

---

*/ Crs_α nem egészen gyengítés. Továbbá, az un. dimenzióelmélet miatt (pl. [HMT]Thm.2.6.16(i), jelen dolgozat III.10.10. Lemma és III.12(i) Megjegyzés (160. old.)), a $D_\alpha = (Crs_\alpha \cap NCA_\alpha)$ $(\alpha=3,4,\ldots,\omega)$ sorozat tekinthető egy olyan hierarhiának (vagy finomszerkezetnek), mely CA_3 bizonyos gyengítéseiből áll.

tályokat is, melyek úgy viszonyulnak WA -hoz (vagy annak erősítéseihez), ahogy NCA_α és CA_α viszonyul NA és SA -hoz. Ilyen osztályok a III.9. Definicióban (143. old.)-ban bevezetett G_α és D_α .

[TG] felveti azt a (bizonyításelméleti) problémát is, hogy L_3 mely gyengítéseiben interpretálható még L_ω. Tehát arról van szó, hogy hagyjunk el axiómákat L_3 logikai axiómarendszeréből, és az így kapott gyengébb rendszerben próbáljuk interpretálni L_ω-t. NCA_α-ra vonatkozó algebrai eredményeink természetes logikai megfelelőjét előállítva választ kapunk erre a problémára.: A III. fejezetben bizonyítjuk, hogy ha elhagyjuk a kvantorok felcserélhetőségének $(\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi)$ axiómáját, akkor már mindegyik L_n, sőt maga L_ω is, eldönthetővé válik, tehát nyilván nem interpretálható benne semminemű erős rendszer. Ennek előzményeként, CA_α fent említett gyengítéseiről bizonyítjuk, hogy $EqNCA_\alpha$ és $EqCrs_\alpha$ (minden α-ra) eldönthető, tehát ezekre sem terjednek ki a II. fejezet eredményei. Sőt (a CA-hoz már nagyon közelálló) G_α és D_α azonosságelmélete is eldönthető a III.10. Tétel szerint*/. A váltás tehát valahol CA_3 és G_3 között van. (Természetesen megmutatjuk azt is, hogy e negatív eredmények kiterjednek WA és NA -ra is, így megválaszolva a [TG]-beli megfelelő problémákat is. Ez [Ma85b]-ből is megold egy problémát.)

Azért bizonyítjuk az eldönthetőséget (pl. interpretálhatatlanság helyett), mert ez volt a II. fejezetbeli eredmények kiterjeszthetőségét tagadó legerősebb olyan eredmény, melyet bizonyítani tudtunk. Ez alól kivétel a fontos NCA_α osztály, melyről egy eldönthetőségnél erősebb un. véges modell tulajdonságot is bizonyítottunk. Ez körülbelül azt jelenti, hogy megadunk egy kiszámítható függvényt, mely minden e egyenlethez hozzárendel egy $k(e)\in\omega$ korlátot úgy, hogy ha NCA_α $k(e)$-nél kisebb elemeiben érvényes e , akkor $NCA_\alpha \models e$ is igaz (ld. III. 5. Tétel bizonyítását), ha $\alpha<\omega$.

Algebrai logikáról lévén szó, a különböző algebraosztályokra vonatkozó eredmények logikai megfelelőit kívánatos megkeresni. Ennek megfelelően, Crs_α, D_α és G_α-ra kapott eredményeink logikai megfelelőjeként olyan következményeket is nyerünk a III. fejezetben, melyek a logikának Surányi János [Su59] könyvében összefoglalt fejezetéhez kapcsolódnak. A logikának ez a fejezete, lényegében, az elsőrendű logika különböző (többé-kevésbé nevezetes) formulaosztályainak eldönthetőségét vizsgálja (ld. Surányi

*/Megjegyezzük, hogy $G_\alpha \subset D_\alpha = Crs_\alpha \cap NCA_\alpha$.

[Su55], Dreben-Goldfarb[DG79], Lewis[Lw79].) Ilyen tipusú következményeket kapunk a III. fejezet végén (164-169 old.), pl. a III. 16. Következmény (ii) szerint a relativizált alakú elsőrendű formulák kielégíthetősége eldönthető. A III. 16. Következmény (i) pontja szerint bizonyos Kripke modellekben érvényes elsőrendű formulák halmaza eldönthető.

A bevezetés jelen, a II. fejezet érvényességi körét körülhatároló eredményekkel foglalkozó részének kiegészítését képezi a III. fejezet bevezetése (108-109 old.) és a II. fejezet utolsó oldala.

A dolgozat konkrét felépítéséről a következő 0.4 §-ban írunk.

0.4. A dolgozat felépítése, tudnivalók.

A dolgozat három fejezetből áll (egy bevezető és két tartalmi fejezet).

Az I. fejezetben összefoglaljuk az alapvető jelöléseket, definiciókat és tudnivalókat. Az alapvető halmazelméleti, algebrai és logikai fogalmak után definiáljuk és kicsit részletesebben ismertetjük a cilindrikus és reláció-algebrákat.

A II. fejezet főtétele az, hogy a szabad cilindrikus algebrák nem atomosak. E tétel bizonyítása során interpretáljuk RA-t CA_3-ban (ld. 9.T.), mely interpretáció segítségével visszavezetjük az elsőrendű logikát L_3-ra (ld. 12.T.), majd utóbbi visszavezetés következményeként bizonyítjuk a főtételt (ld. 14.T.). A II. fejezet második felében megmutatjuk, hogy "sokkal szebb" interpretálása RA-nak CA_3-ban és "sokkal szebb" visszavezetése L_ω -nak L_3-ra nincsen (ld. 15.T. és 17.T.). A módszerekről megjegyeznénk, hogy a II. fejezet első felének bizonyításaiban alkalmas levezetéseket kellett találni, míg a fejezet második felében "nem-sztenderd" modelleket (azaz nemreprezentálható CA-kat) konstruáltunk a "bizonyíthatatlanság" bizonyítására. A II. fejezet legvégén, az L_3-ra visszavezető tételünk alkalmazásaként bizonyítjuk, hogy az n elemmel szabadon generált CA_3-at lehet n elemmel nem-szabadon is generálni.

A III. fejezetben azt mutatjuk meg, hogy a kvantorok felcserélhetősége lényeges a logikában.*/: A III. fejezet első részében az absztrakt NCA_α osztályról (melyet úgy kapunk CA_α-ból, hogy elhagyjuk a kvantorok felcserélhetőségének megfelelő un. C_4 axiómát) mutatjuk meg, hogy azonosságelmélete eldönthető (ld. 5.T.), ennek rögtön kimondjuk a bizonyításelméleti következményét (6.K.) is. E bizonyításelméleti következmény természetes modellelméleti megfelelőjét a III. fejezet második részében vizsgáljuk, ahol a "konkrét" halmazalgebrák Crs_α osztályáról (és annak néhány részosztályáról) bizonyítjuk, hogy azonosságelmélete eldönthető (ld. 10.T.). Ez információt ad arra nézve, hogy a szokásos modellek mely tulajdonságai lényegesek (és melyek nem), továbbá következményként kapunk egy eljárást az alaki megkötésekkel definiált un. relativizált formulák kielégíthetőségének eldöntésére (ld. 16.K.).

* * *

A dolgozatban két főtétel van: Az 1. Főtétel a II. fejezet főtétele, mely szerint a szabad CA-k nem atomosak. A 2. Főtétel a III. fejezet főtétele, eszerint a cilindrikus-relativizált halmazalgebrák azonosságelmélete eldönthető. A dolgozatban kimondott tételeket (bizonyításuk után) rendszeresen diszkutáljuk (ez általában megjegyzésekben történik). A két főtételen kívül, a dolgozatban előforduló egységek: tétel, definició, megjegyzés, következmény, lemma, részállítás, segédállítás; ezeket hivatkozásnál rendre T., D., Mj., K., L., RÁ., SÁ.-val rövidítjük. Tételek bizonyításán belül kimondott segédállítás, definició stb. sorszámán látszik, hogy melyik tétel bizonyításában vagyunk, pl. a 3.2.SÁ. a 3. Tétel bizonyításában szereplő második egység. Minden fejezetben a fenti egységeket elölről és egységesen számozzuk, pl. a II. fejezetben 1.D., 2.D., 3.L., 3.1.SÁ., stb. Ha egy tételre ugyanabból a fejezetből hivatkozunk, melyben az előfordul, akkor csak a sorszámát írjuk ki, pl. 12.T., ha egy másik fejezetből hivatkozunk rá, akkor a fejezet sorszámát is feltüntetjük, pl. II.12.T. (ha a II. fejezet 12. Tételére a III. vagy I. fejezetből hivatkozunk). Az egységek végét vagy kockával jelöljük, vagy QED -vel. Részletesebben, ■ -val a definiciók, megjegyzések stb. végeit, ⊠ -val a bizonyítások belsejében előforduló kisebb részállítások végét és QED -vel a (nagyobb) bizonyítások végét jelöljük. Az oldalak tetején feltüntetjük, hogy épp me-

---

*/Arról, hogy a III. és II. fejezet ugyanazon probléma két (egymást feltételező) oldaláról szól, a 0.1 és 0.3 §-ban írtunk.

lyik egységben vagyunk, azaz a lap tetején szerepel a kurrens definició, megjegyzés stb. sorszáma. Pl. "3.L" a lap tetején azt jelenti, hogy az első m[illegible] egység a lapon a 3.L. kimondása, "3.L(B)" a lap tetején azt jelen[illegible], [illegible]y a 3.L. bizonyításának belsejében vagyunk. Az irodalmi hivatkozás[illegible] az oldalszámra néha (a rövidség érdekében) a latin eredetű "pp. 300^1-301_5" stílusban utalunk (mely a 300-ik oldal felülről első sorától a 301-ik oldal alulról ötödik soráig terjedő részt jelenti). A nagyon gyakori előfordulás miatt a dolgozatban a "tegyük fel, hogy" szöveget "tfh."-al rövidítjük. A dolgozat végén a jelöléseket és definiciókat egy "Jelölésjegyzék" és egy "Szójegyzék"-ben összefoglaltuk a keresés megkönnyítése végett. Megjegyezzük, hogy a jelöléseknél a vastagításnak tartalmi szerepe van, mást jelent pl. a vékony Nr és a vastag **Nr**.

<u>0.5. A dolgozat kapcsán megoldott egyes problémák történetéről.</u>

A dolgozat két főtételének bizonyítása és diszkussziója során számos régebben felvetett problémát is megoldunk. Az alábbiakban megadjuk ezek felvetésének helyét, de az olvasónak azt tanácsoljuk, hogy első olvasásra hagyja ki ezt a §-t.

- Monk[M61](1961) 5. Problémája azt kérdezi, hogy minden RA megkapható-e valamely CA_4-ből reduktumként (formálisan $RA \subseteq \mathbf{Ra}CA_4$ fennáll-e). Ugyanezt kérdezi Maddux[Ma78] és [Ma85] is. A negatív választ a II. fejezetben a 4. Megjegyzésben írtuk le. E probléma megválaszolása ugyanolyan jellegű nehézségeken múlik, mint a [HMT]2.11. Problémáé. Utóbbinak jelen technikákkal történő megoldását Németi[N83]-ban írtuk le.

- Monk[M61] 4. Problémája a CA-RA kapcsolatról tesz fel két további kérdést. Ezek közül az egyiket a jelen dolgozat I. fejezetében (ld. 5.K. és 27. old. lábjegyzete) válaszoljuk meg.

- A [HMT] monográfiában a 4.14. Probléma azt kérdezi, hogy a végesen generált szabad CA_α-k atomosak-e ha $2<\alpha<\omega$. E problémát részletesen tárgyalja a könyv a 4.3.32-4.3.33 egységekben és a II. rész bevezetésében. Jelen dolgozat 1. Főtétele szerint a válasz negatív. E problémamegoldás diszkussziója a II.1 fejezetben található és részben [HMT]2.10. Problémájának Németi[N84a]-ban bizonyított megoldására épül (mely a végtelendimenziós szabadalgebrák végesdimenziós részét karakterizálja).

- A [HMT] monográfia egy másik szabadalgebrákra vonatkozó kérdése a 2.7. Probléma. Erre a válasz jelen dolgozat II.19. Tételében található. Jónsson [J85]-ben hasonló kérdést tesz fel szabad RA-kra vonatkozóan. Ezt is megválaszoljuk a II.20. Megjegyzésben.

- Tarski és Givant [TG] a 3.10 §-ban (3.78 old.) azt kérdezi, hogy a könyv eredményei átvihetők-e RA -ról SA -ra. Itt külön megkérdezik, hogy a halmazelmélet felépíthető-e EqSA -ban. Ez tehát két kérdés: 1) a [TG] 4. ill. 8 §-ban leírt $QRA \subseteq RRA$ eredmény "átmegy"-e RA helyett SA -ra (tehát pl. $QSA \subseteq RA$ igaz-e) és 2) a halmazelmélet felépíthető-e EqSA -ban. [TG] 3.78 oldalán a következőket írják: "The second problem ... still open, is more essential for our main purposes. We should like to know whether the formalism $\mathcal{L}w^{\times}$ provides an adequate basis upon which our fundamental results (to be presented in the next chapter) could be reconstructed and our main goal, a formalization of set theory without the use of variables, could be achieved. Even if the answer to this question is affirmative, the proof of it may be a hard task. The development of the logic and metalogic of $\mathcal{L}^{\times}$, to the extent this is needed for our purposes, is not easy even in the presence of the full associative law and would probably become much more involved if this law were not available."*/ Jelen dolgozat II.12. Tétele pozitív választ ad a fenti probléma 2) részére. A probléma 1) részét másutt is kérdezték:

- Maddux [Ma85] kérdezi, hogy $QSA \subseteq RA$ igaz-e és ebben a formában [TG]8.19 oldal lábjegyzetében is megfogalmazásra kerül a probléma. A válasz jelen dolgozat II.18. Megjegyzése szerint erősen negatív (nem lehet QSA definicióját úgy szigorítani, hogy az állítás igazzá váljon). E probléma egy cilindrikus algebrai változatát Maddux[Ma78a] is megkérdezi. Jelen dolgozat módszereivel negatív választ adtunk Németi[N85e]-ben. Egy erősebb negatív választ bizonyítunk jelen dolgozatban (II.17. Tétel (viii) pontja).

---

*/Itt $\mathcal{L}w^{\times}$ az SA -nak felel meg, és $\mathcal{L}^{\times}$ az RA -nak.

- Tarski és Givant [TG] 1974-es változatában azt kérdezte, hogy a halmazelmélet EqNA -ban felépíthető-e (ld. Maddux[Ma85b]). (Ez tehát a fentebb már idézett kérdés SA helyett NA -ra megfogalmazva.) Ez a kérdés jelen változatában (pl. 3.78 és 4.76 old. lábjegyzet) is megtalálható (de kevésbé hangsúlyosan, mert időközben feltűnt, hogy még SA -ra sem tudják a választ). Ugyanezt az EqNA -ra vonatkozó kérdést felveti Maddux [Ma85b] is. Jelen dolgozat III.6. Megjegyzésében és Németi[N85c]-ben erősen negatív választ kapunk nemcsak NA -ra de az annál erősebb WA -ra is: mindkét osztály azonosságelmélete erősen eldönthető. Ez megválaszol [Ma85b]-ből egy másik problémát is.

- [TG]4.84 oldalán és a 3.7 §-ban arról a problémáról írnak, hogy a halmazelmélet felépíthető-e L_3 egy gyenge változatában, mely ekvivalens $EqCA_3$ -al. (Itt a probléma új része az, hogy EqSA -nál gyengébb az $EqCA_3$.) Erre pozitív választ adunk a II.12. Tételben.

Jelen dolgozat eredményeiből ill. közelítésmódjából nőttek ki a következő problémák megoldásai is. Helyhiány miatt ezeket az eredményeket nem tárgyaljuk részletesen a dolgozatban.

- [TG] külön foglalkozik azzal a problémával, hogy L_3 általuk megerősített változatában az asszociativitáson kívül a Leibniz szabály egy nagyon erős változatát is fel kellett venni. Kérdezik, hogy ez elhagyható-e. (Ld. [TG]3.42_{7-6}, 3.74^{6-17} és 3.76^{4-7} old.) Szemben a probléma "SA-változatával", a jelen változat esetén a probléma mindkét részére pozitív válasz adódik jelen dolgozat módszereivel. Nevezetesen, az erős Leibniz szabály nélkül is igaz marad [TG] minden eredménye (az asszociativitással megerősített L_3-ra). Ezt az eredményt [TG] legújabb változata idézi a 3.8 § egyik lábjegyzetében. [TG]-nek ez a legújabb változata ismertet további olyan problémamegoldásokat, melyek a jelen dolgozat eredményeként jöttek létre. Ezekre most nem térünk ki.

- Monk[M64] lényegében az első publikáció, ahol [HMT]4.11. és 4.12. Problémája hangsúlyosan szerepel. A két probléma azt kérdezi, hogy a minimális ill. monadikusan generált CA-k azonosságelmélete eldönthető-e. Ilyen eldöntésproblémákkal a III. fejezet foglalkozik, ahol jelezzük, hogy a válasz mindkét kérdésre negatív (részletes bizonyítás Németi[N85h]-ban található).

I. ALAPVETŐ JELÖLÉSEK, DEFINICIÓK, TUDNIVALÓK.

Összefoglaljuk a legalapvetőbb (halmazelméleti, algebrai, logikai) jelöléseinket. Ezek általában jólismert szokásos jelölések. A dolgozatban később még bevezetünk speciálisabb jelöléseket. Az összes jelölést (a bevezetés helyének feltüntetésével) összegyűjtöttük a disszertáció végén levő jelölésjegyzékben. Lényegében a [HMT] jelölésrendszerét használjuk. Nem definiáljuk a legalapvetőbb halmazelméleti fogalmakat, pl. $\in$, $\subseteq$, rendszám, továbbá nem definiáljuk a rekurzióelmélet alapfogalmait mint pl. rekurzív halmaz és függvény, rekurzívan felsorolható halmaz.

I.1. Alapvető halmazelméleti és algebrai jelölések.

0 jelöli az üres halmazt, mely a legkisebb rendszám és legkisebb természetes szám is egyben. A természetes számok Neumann-féle felépítését használjuk:

0 az üres halmaz és

$n+1 = n\cup\{n\}$.

Minden rendszám a nála kisebb rendszámok halmaza, és

$\alpha+1 = \alpha\cup\{\alpha\}$ ha α rendszám.

ω jelöli a természetes számok halmazát és egyben a legkisebb végtelen rendszámot is. Tehát ha $n\in\omega$ akkor $n = \{m\in\omega : m<n\}$. Ha A egy halmaz, akkor

$|A|$ jelöli az A halmaz számosságát. A számosságokat speciális rendszámoknak (és nem ekvivalens halmazok vagy rendszámok osztályának) tekintjük. Ekkor tehát

$|A|<\omega$ vagy $|A|\in\omega$ azt jelenti, hogy A véges, és

$|A|\geq\omega$ azt jelenti, hogy A végtelen.

$\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ és $\overset{d}{=}$ azt jelenti, hogy a szóbanforgó képlettel definiáljuk a benne szereplő új jelet.

$A\sim B \overset{d}{=} \{x\in A : x\notin B\}$,

$\bigcup\mathcal{A} \overset{d}{=} \{x : (\exists A\in\mathcal{A})x\in A\}$, az $\mathcal{A}$ halmazrendszer úniója

$\bigcap\mathcal{A} \overset{d}{=} \{x : (\forall A\in\mathcal{A})x\in A\}$,

$SbA \overset{d}{=} \{X : X\subseteq A\}$, az A halmaz hatványhalmaza (set of subsets of A)

$A\subset B \overset{df}{\Longleftrightarrow} (A\subseteq B$ és $A\neq B)$, A valódi része B-nek,

$A\subseteq_\omega B \overset{df}{\Longleftrightarrow} (A\subseteq B$ és $|A|<\omega)$, A véges része B-nek,

$\{a_i,b_i : i\in I\} \overset{d}{=} \{a_i : i\in I\}\cup\{b_i : i\in I\}$, egy nem-szokásos halmazmegadás

(a,b) vagy $\langle a,b\rangle$ az a és b halmazokból alkotott (rendezett) párt jelöli,

$A\times B \overset{d}{=} \{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}$,

R (binér) reláció, ha párok halmaza. Legyen $R,S\subseteq A\times B$. Akkor

$\mathrm{Dom}R \overset{d}{=} \{a\in A : (\exists b)(a,b)\in R\}$, az R értelmezési tartománya,

$\mathrm{Rng}R \overset{d}{=} \{b\in B : (\exists a)(a,b)\in R\}$, az R értékkészlete,

$R^{*}H \overset{d}{=} \{b\in B : (\exists a\in H)(a,b)\in R\}$, a H R-szerinti képe,

$H\upharpoonright R \overset{d}{=} \{(a,b)\in R : a\in H\}$, az R H-ra való lekorlátozása,

$R|S \overset{d}{=} \{(a,b) : (\exists c)[(a,c)\in R$ és $(c,b)\in S]$, az R és S kompozíciója,

$R^{-1} \overset{d}{=} \{(b,a) : (a,b)\in R\}$, az R inverze,

aRb azt jelenti, hogy $(a,b)\in R$,

$a\not R b$ azt jelenti, hogy $(a,b)\notin R$,

$\mathrm{Id} \overset{d}{=} \{(H,H)$: H egy halmaz$\}$, az identitás-osztály,

$\mathrm{Id}_H \overset{d}{=} \{(u,u) : u\in H\}$, a H-n való identitás-reláció.

R ekvivalencia-reláció, ha idempotens, szimmetrikus és tranzitív, azaz ha $R\supseteq(\mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}R}\cup R^{-1}\cup R|R)$.

R függvény, ha $(\forall a,b,c)[(aRb$ és $aRc)\Rightarrow b=c]$, tehát egy függvény párok halmaza. Ezért pl. $g\subseteq f$ ha f függvény azt jelenti, hogy g is függvény és $g=(\mathrm{Dom}g)\upharpoonright f$.

Ha R párok osztálya az előző tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy R osztály-függvény (ezekkel ritkán lesz dolgunk).

f (totális) függvény A-ból B-be ha f függvény, $\mathrm{Dom}f=A$ és $\mathrm{Rng}f\subseteq B$, ezt

$f : A\to B$ -vel jelöljük. Ha $f : A\to B$ és $D\subseteq A$ akkor gyakran írjuk, hogy $f : D\to B$ a precíz $D\upharpoonright f : D\to B$ helyett.

f parciális függvény A-ból B-be, ha $(\exists D\subseteq A)\ f : D\to B$.

f egy-egyértelmű, ha $(\forall a,b,c)[((a,c)\in f$ és $(b,c)\in f)\Rightarrow a=b]$.

$f : A\rightarrowtail B \overset{df}{\iff}$ ($f : A\to B$ és f egy-egyértelmű)

$f : A\twoheadrightarrow B \overset{df}{\iff}$ ($f : A\to B$ és $\mathrm{Rng}f=B$), f ráképez B-re,

$f : A\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{df}{\iff}$ ($f : A\rightarrowtail B$ és $f : A\twoheadrightarrow B$), f bijekció,

${}^{A}B$ jelöli az A-ból B-be menő függvények halmazát.

Ha τx jelöl valamit minden $x\in X$ -re, akkor

$\langle\tau x : x\in X\rangle \overset{d}{=} \{(x,\tau x) : x\in X\}$, azaz $\langle\tau x : x\in X\rangle$ egy fajtája a függvény-megadásnak. Néha nagyon kényelmes ez a (szokatlan) megadási mód, [HMT] vezette be. Legyen f és g függvény.

$f(a)$, fa, vagy f_a jelöli az f értékét az a helyen, ha $a\in\mathrm{Dom}f$, azaz $(a,f(a))\in f$ ha $a\in\mathrm{Dom}f$.

$\ker f \overset{d}{=} \{(a,b)\in\mathrm{Dom}f\times\mathrm{Dom}f : fa=fb\}$, az f magja vagy "kernelje".

$f\circ g \overset{d}{=} g|f$, az f és g függvény-kompozíciója, tehát ha $x\in\mathrm{Dom}(f\circ g)$, akkor $(f\circ g)x=f(gx)$. $f(\kappa/u)$ vagy f^{κ}_{u} jelöli azt a függvényt, melyet úgy kapunk f-ből, hogy értékét a κ helyen u-ra változtatjuk, azaz

$f(\varkappa/u) \overset{d}{=} f^{\varkappa}_{u} \overset{d}{=} (f\sim\{\langle\varkappa,f(\varkappa)\rangle\})\cup\{\langle\varkappa,u\rangle\}$. Ezt a jelölést gyakran használjuk az egész dolgozatban.

f (m-hosszú) sorozat, ha olyan függvény, melynek értelmezési tartománya rendszám (az m),

$\langle a_0,a_1,\dots,a_m\rangle \overset{d}{=} (a_0,a_1,\dots,a_m) \overset{d}{=} \{(0,a_0),\dots,(m,a_m)\}$. Tehát, ha pl. $a\in{}^3A$, akkor $a = \langle a_0,a_1,a_2\rangle$ és ha $f : A \to B$, akkor $f\circ a = \langle fa_0,fa_1,fa_2\rangle$.

2-hosszú sorozatok és párok között nem teszünk különbséget (noha elvileg kellene). Igy $A\times A$ -t és ${}^2A$ -et azonosnak tekintjük, és pl. $R\subseteq{}^2A$ azt jelenti, hogy R binér reláció az A -n.

R m-argumentumú reláció az A -n, ha $R\subseteq{}^mA$,

f m-argumentumú függvény A -n, ha $f : {}^mA \to A$.

m-argumentumú függvényeket $m+1$ -argumentumú relációknak tekintünk néha (pontatlanul, az $\langle\langle a_0,\dots,a_{m-1}\rangle,b\rangle$ és $\langle a_0,\dots,a_{m-1},b\rangle$ sorozatokat azonosnak tekintve).

Algebrai jelölések.

t' egy (kevert) hasonlósági tipus (vagy röviden csak tipus) ha $t' = (t,F)$, ahol $t : \mathcal{R} \to (\omega\sim 1)$ valamely $\mathcal{R}$-re és $F\subseteq\mathcal{R}$. Ha $R\in\mathcal{R}\sim F$, akkor R egy $t(R)$-argumentumú relációjel, ha $R\in F$ akkor R egy $t(R)-1$ -argumentumú függvényjel. 0-argumentumú függvényjelet konstansjelnek is hívunk.

Legyen t' egy tipus, $t' =(t,F)$, $t : \mathcal{R} \to \omega$. Az $\mathfrak{A}$ egy t' - tipusú struktúra, ha $\mathfrak{A} = \langle A,\mathbb{F}\rangle$ ahol $\mathbb{F}$ függvény, $Dom\mathbb{F} = Dom t$, $\mathbb{F}(R)$ egy $t(R)$-argumentumú reláció A -n ha $R\in Dom t$ és $\mathbb{F}(R)$ egy $t(R)-1$ - argumentumú függvény A -n, ha $R\in F$. Jelölés: $R^{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \mathbb{F}(R)$ ha $R\in\mathcal{R}$. Tehát

$$\mathfrak{A} = \langle A, \langle R^{\mathfrak{A}} : R\in\mathcal{R}\rangle\rangle, \quad \text{ehelyett gyakran írunk}$$

$$\langle A,R^{\mathfrak{A}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \text{ -et.}$$

Ha R egy konstansjel, akkor $R^{\mathfrak{A}} : {}^0A \to A$, tehát $R^{\mathfrak{A}}=\{(0,a)\}$ valamely $a\in A$ -ra. Strukturákban $R^{\mathfrak{A}}$ -t azonosnak tekintjük a -val, azaz ha R egy konstansjel, akkor $R^{\mathfrak{A}}\in A$. Az $\mathfrak{A}$ univerzuma A, és $R^{\mathfrak{A}}$ az R-nek megfelelő reláció $\mathfrak{A}$ -ban. Strukturákat általában gót nagybetűkkel és univerzumukat a megfelelő latin nagybetűvel jelöljük. Ha $\mathfrak{A}$ (vagy $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$ stb.) egy struktura és mást nem mondunk, akkor A (vagy B, C,M,N,R stb.) az univerzumát jelöli. Az áttekinthetőség érdekében néha az $R^{\mathfrak{A}}$ -ról lehagyjuk a felső $\mathfrak{A}$ indexet, remélve, hogy ez nem okoz félreértést (ld. pl. 17.o., 25.o.).

Azt mondjuk, hogy t egy relációs (ill. algebrai) (hasonlósági) tipus, ha $t' = (t,0)$ (ill. $t' = (t,\mathrm{Dom}t)$) egy kevert hasonlósági tipus, és $\mathfrak{A}$ egy t-tipusú modell (ill. algebra) ha $\mathfrak{A}$ egy t' -tipusú struktúra. Mod(t) (ill. Alg(t)) jelöli a t-tipusú modellek (ill. algebrák) osztályát. Az Alg(t) jelölést csak az I. fejezetben használjuk.

Legyen $t'=(t,F)$ egy tipus, $t : \mathcal{R} \to \omega$ és $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ t'-tipusú struktúrák.

$H\upharpoonright\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle A\cap H,\ R^{\mathfrak{A}} \cap {}^{t(R)}H\rangle_{R\in\mathcal{R}}$, az $\mathfrak{A}$ H-ra való megszorítása.

$H\upharpoonright\mathfrak{A}$ nem feltétlenül t'-tipusú struktúra, de mindig t-tipusú modell.

$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B} \overset{df}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{A} = A\upharpoonright\mathfrak{B}$, az $\mathfrak{A}$ részmodellje $\mathfrak{B}$-nek.

$f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ azt jelöli, hogy f homomorfizmus $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be, azaz
$f : A \to B$ és $\{f\circ s : s\in R^{\mathfrak{A}}\}\subseteq R^{\mathfrak{B}}$ minden $R\in\mathcal{R}$-re.

$f^{*}\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle f^{*}A,\ \{f\circ s : s\in R^{\mathfrak{A}}\}\rangle_{R\in\mathcal{R}}$, ha $f : A \to B$.

$f : \mathfrak{A} \rightarrowtail \mathfrak{B} \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és $f : A \rightarrowtail B)$, hasonlóan

$f : \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B} \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és $f : A \twoheadrightarrow B)$,

$f : \mathfrak{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{B} \overset{df}{\Longleftrightarrow} (f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)$.

f izomorfizmus $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ között, ha $(f : \mathfrak{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} = f^{*}\mathfrak{A})$.

$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ izomorf, azaz ha van f mely izomorfizmus $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ között.

$\mathfrak{B}$ homomorf képe az $\mathfrak{A}$-nak ha van f, melyre $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} = f^{*}\mathfrak{A}$.

Legyen R ekvivalencia-reláció az A -n, legyen $f \overset{d}{=} \langle R^{*}\{a\} : a\in A\rangle$. Akkor

$$\mathfrak{A}/R \overset{d}{=} f^{*}\mathfrak{A} \quad \text{és} \quad A/R \overset{d}{=} f^{*}A = \{R^{*}\{a\} : a\in A\}.$$

Legyen mostantól kezdve t egy <u>algebrai</u> tipus, $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ t-tipusú algebrák és $K\subseteq \mathrm{Alg}(t)$.

R kongruencia az $\mathfrak{A}$-n, ha $\mathfrak{A}/R$ algebra.

$Sg^{\mathfrak{A}}H \overset{d}{=} \bigcap\{Y\subseteq A : Y\upharpoonright\mathfrak{A}$ algebra és $H\subseteq Y\}$,

$\mathfrak{Sg}^{\mathfrak{A}}H \overset{d}{=} (Sg^{\mathfrak{A}}H)\rceil\mathfrak{A}$. Ha $H \subseteq A$, akkor $\mathfrak{Sg}^{\mathfrak{A}}H$ algebra és $\mathfrak{Sg}^{\mathfrak{A}}H \subseteq \mathfrak{A}$.

IK, **H**K, **S**K, **P**K jelöli rendre a K elemei izomorf képei, homomorf képei, részalgebrái ill. direkt szorzatainak osztályát. (Algebrák direkt szorzatának konkrét definiciójára nem lesz szükségünk.)

$Tm_X(t)$ jelöli az X elemeivel mint változójelekkel felírt t-tipusú kifejezések (termek) halmazát (azaz $x \in Tm_X(t)$ ha $x \in X$, és $f(\tau_1,\dots,\tau_n) \in Tm_X(t)$ ha f n-argumentumú függvényjel t -ben és $\tau_1, \dots, \tau_n \in Tm_X(t)$). Binér műveletjelet gyakran írunk infix írásmódban, azaz ha f kétargumentumú függvényjel, akkor $\tau_1 f \tau_2 \overset{d}{=} f(\tau_1,\tau_2)$, a szokásoknak megfelelően.

$\mathfrak{Tm}_X(t)$ jelöli a $Tm_X(t)$ -n levő természetes t -tipusú algebrát. Könnyű látni, hogy ha $\mathfrak{A} \in Alg(t)$ és $k : X \to A$ akkor k kiterjeszthető homomorfizmussá (egyértelműen), azaz van $\bar{k} : \mathfrak{Tm}_X(t) \to \mathfrak{A}$ hogy $k \subseteq \bar{k}$. Legyen $\tau \in Tm_X(t)$, $\mathfrak{A} \in Alg(t)$ és $k : X \to A$. Akkor

$\tau^{\mathfrak{A}}[k]$ jelöli a "τ értékét az $\mathfrak{A}$ algebrában a változójelek k kiértékelése mellett", azaz $\tau^{\mathfrak{A}}[k] \overset{d}{=} \bar{k}(\tau)$ ahol $\bar{k} : \mathfrak{Tm}_X(t) \to \mathfrak{A}$, $k \subseteq \bar{k}$.

A $Tm_X(t)$, $\tau^{\mathfrak{A}}[k]$ jelöléseket gyakran használjuk az egész dolgozatban.

$\tau = \sigma$ t-tipusú azonosság, ha $\tau, \sigma \in Tm_X(t)$ valamely X -re.

$\mathfrak{A} \models \tau = \sigma[k] \overset{df}{\iff} \tau^{\mathfrak{A}}[k] = \sigma^{\mathfrak{A}}[k]$ és $\mathfrak{A} \models \tau = \sigma \overset{df}{\iff} (\forall k \in {}^X A)\ \mathfrak{A} \models \tau = \sigma[k]$,

$K \models \tau = \sigma \overset{df}{\iff} (\forall \mathfrak{A} \in K)\ \mathfrak{A} \models \tau = \sigma$.

Legyen Σ t-tipusú azonosságok halmaza. Akkor $\{\mathfrak{A} \in Alg(t) : (\forall e \in \Sigma)\ \mathfrak{A} \models e\}$ a Σ-val definiált algebraosztály.

K varietás, ha definiálható azonosságokkal. K végesbázisú varietás, ha definiálható véges azonossághalmazzal. K végesbázisú algebraosztály, ha az általa generált varietás (azaz a K -t tartalmazó legkisebb varietás) végesbázisú.

Az univerzális algebra alaptétele (Birkhoff), hogy

(K varietás $\iff$ K = **HSP**K), és a K -val generált varietás **HSP**K.

q egy kváziazonosság, ha $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \to e_0$ alakú, ahol $n \in \omega$ és $e_0, \dots, e_n$ azonosság,

K kvázivarietás ha definiálható kváziazonosságokkal.

$\mathfrak{Fr}_X K$ jelöli az X halmazzal generált K fölötti szabad algebrát, azaz

$\mathfrak{Fr}_X K \stackrel{d}{=} \mathfrak{Tm}_X(t)/Cr_X K$ ahol $Cr_X K \stackrel{d}{=} \bigcap\{R : \mathfrak{Tm}_X(t)/R \in \mathbf{ISK}\}$. Belátható, hogy $Cr_X K = \{(\tau,\sigma) : K \models \tau=\sigma\}$, és hogy izomorfia erejéig $\mathfrak{Fr}_X K$ a "legkisebb" algebra, melyet X generál és melyre igaz, hogy $(\forall \mathfrak{A} \in K)(\forall k \in {}^X A)$ $(\exists \bar{k} : \mathfrak{Fr}_X K \to \mathfrak{A})k \subseteq \bar{k}$. A $Cr_X K$ jelölést a továbbiakban nem használjuk.

$Fr_X K$ jelöli az $\mathfrak{Fr}_X K$ alaphalmazát.

I.2. Elsőrendű nyelveink.

Λ egy nyelv, ha $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$ ahol α egy rendszám, t egy relációs tipus és $Rng t \subseteq \alpha+1$. (Ekkor tehát $Rng t \subseteq (\alpha+1) \cap (\omega\sim 1)$.)

Feltesszük, hogy a dolgozat folyamán végig, rögzítve van egy egy-egyértelmű $\mathbf{v}$ osztály-függvény, mely az összes rendszámon van értelmezve. A $\mathbf{v}_i$ -ket fogjuk változójeleknek használni nyelveinkben. Kényelmi szempontok miatt $x \stackrel{d}{=} \mathbf{v}_0$, $y \stackrel{d}{=} \mathbf{v}_1$ és $z \stackrel{d}{=} \mathbf{v}_2$. Feltesszük, hogy a logika felépítésében szokásos diszjunktsági feltételek teljesülnek, pl. $Rng\mathbf{v} \cap Dom t = 0$.

Legyen $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$ egy nyelv, $\mathcal{R} = Dom t$. Definiáljuk a Λ nyelv szigorú (vagy korlátozott, "restricted") formuláinak Fm^Λ halmazát:

Fm^Λ az a legszűkebb F halmaz, melyre*/

(i) $\{R(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{tR-1}) : R \in \mathcal{R}\} \cup \{\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j : i,j \in \alpha\} \cup \{\mathbf{T},\mathbf{F}\} \subseteq F$

(ii) $\{\exists\mathbf{v}_i\varphi,\ \neg\varphi, (\varphi\wedge\psi), (\varphi\vee\psi)\} \subseteq F$ ha $i \in \alpha$ és $\varphi,\psi \in F$.

A Λ nyelv gyenge, vagy redundáns formuláinak Fm^Λ_w halmaza az a legszűkebb F halmaz, melyre igaz az előző (i),(ii) -n kívül még

(iii) $\{R(\mathbf{v}_{j_0},\mathbf{v}_{j_1},\dots,\mathbf{v}_{j_{tR-1}}) : R \in \mathcal{R},\ j \in {}^{t(R)}\alpha\} \subseteq F$ is.

Ha mást nem mondunk, akkor formulán <u>szigorú</u> formulát értünk.

Legyen $\mathfrak{M}$ egy t-tipusú modell és $k : \alpha \to M$. Definiáljuk formulák érvényességét:

$\mathfrak{M} \models R(\mathbf{v}_{i_0},\dots,\mathbf{v}_{i_n})[k] \stackrel{df}{\iff} (k(i_0),\dots,k(i_n)) \in R^{\mathfrak{M}}$ ha $R \in \mathcal{R}$, $tR=n+1$.

$\mathfrak{M} \models \mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j[k] \stackrel{df}{\iff} k(i)=k(j)$, $\mathfrak{M} \models \mathbf{T}[k]$, $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{F}[k]$,

$\mathfrak{M} \models \neg\varphi[k] \stackrel{df}{\iff} \mathfrak{M} \not\models \varphi[k]$,

---

*/ A $\mathbf{T}$ és $\mathbf{F}$ formulákról ld. a későbbi 1.Mj.-t.

$\mathfrak{M} \models (\varphi\wedge\psi)[k] \overset{df}{\iff} [\mathfrak{M} \models \varphi[k]$ és $\mathfrak{M} \models \psi[k]]$,

$\mathfrak{M} \models (\varphi\vee\psi)[k] \overset{df}{\iff} [\mathfrak{M} \models \varphi[k]$ vagy $\mathfrak{M} \models \psi[k]]$,

$\mathfrak{M} \models \exists \mathbf{v}_i\varphi[k] \overset{df}{\iff} (\exists a\in M)\, \mathfrak{M} \models \varphi[k^i_a]$.

$\mathfrak{M} \models \varphi \overset{df}{\iff} (\forall k\in {}^{\alpha}M)\, \mathfrak{M} \models \varphi[k]$, $\quad \models\varphi \overset{df}{\iff} (\forall \mathfrak{M}\in Mod(t))\, \mathfrak{M} \models \varphi$.

Legyen $\Sigma \subseteq Fm^{\Lambda}$, $\varphi\in Fm^{\Lambda}$ és $K \subseteq Mod(t)$. Akkor a szokásoknak megfelelően: $\mathfrak{M} \models \Sigma \overset{df}{\iff} (\forall\varphi\in\Sigma)\, \mathfrak{M}\models\varphi$, $K\models\Sigma \overset{df}{\iff} (\forall\mathfrak{M}\in K)\, \mathfrak{M}\models\Sigma$, $\Sigma\models\varphi \overset{df}{\iff}$ $(\forall\mathfrak{M})[\mathfrak{M}\models\Sigma \Rightarrow \mathfrak{M}\models\varphi]$, $\models\Sigma \overset{df}{\iff} Mod(t)\models\Sigma$. Ha $T=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, akkor $\bigwedge T \overset{d}{=} \varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_n$ és $\bigvee T \overset{d}{=} \varphi_1\vee\dots\vee\varphi_n$. Az $\bigwedge T$ tehát függ (elvileg) a T felsorolásának sorrendjétől, de szinte minden bizonyítási rendszerben bizonyíthatóan ekvivalens formulákat kapunk a különböző felsorolásokkor. (Másik lehetőség, hogy rögzítjük Fm^{Λ} egy felsorolását, és eszerint kell venni $\bigwedge T$-t, $\bigvee T$-t.)

Ha $\varphi\in Fm^{\Lambda}_{w}$, akkor $szv(\varphi)$ jelöli a φ __szabad változóinak__ **halmazát** (vagyis $szv(R(\mathbf{v}_{i0},\dots,\mathbf{v}_{in}))=\{\mathbf{v}_{i0},\dots,\mathbf{v}_{in}\}$, $szv(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j)=\{\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\}$, $szv(\mathbf{T})=szv(\mathbf{F})=0$, $szv(\neg\varphi)=szv(\varphi)$, $szv(\varphi\wedge\psi)=szv(\varphi\vee\psi)=szv(\varphi)\cup szv(\psi)$ és $szv(\exists\mathbf{v}_i\varphi)=szv(\varphi)\sim\{\mathbf{v}_i\}$). Legyen $H\subseteq\alpha$. Akkor

$$Fm^{\Lambda,H} \overset{d}{=} \{\varphi\in Fm^{\Lambda} : szv(\varphi)\subseteq\{\mathbf{v}_i : i\in H\}\}.$$

Fm^{Λ} és $Fm^{\Lambda,H}$ helyett sokszor írunk Fm^{Λ}_{α} ill. $Fm^{\Lambda,H}_{\alpha}$-t. Ha $\varphi\in Fm^{\Lambda,H}$ és $k\in {}^{H}M$, akkor

$$\mathfrak{M}\models\varphi[k] \overset{df}{\iff} (\exists g\in {}^{\alpha}M)[k\subseteq g \text{ és } \mathfrak{M}\models\varphi[g]].$$

$$\tilde{\varphi}^{(H,\mathfrak{M})} \overset{d}{=} \{k\in {}^{H}M : \mathfrak{M}\models\varphi[k]\}, \text{ ha } H\subseteq\alpha \text{ és } \varphi\in Fm^{\Lambda,H}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az Fm^{Λ} nyelv referenciálisan átlátszó, azaz ha $\varphi\in Fm^{\Lambda,H}$ és $H{\restriction}k = H{\restriction}h$ akkor minden $\mathfrak{M}$ modellre $[\mathfrak{M}\models\varphi[k] \iff \mathfrak{M}\models\varphi[h]]$ (ha $k,h\in {}^{\alpha}M$).

__1. MEGJEGYZÉS__ (i) $\mathbf{T}$ és $\mathbf{F}$ az "azonosan igaz" (__t__rue) ill. az "azonosan hamis" (__f__alse) formulák. Használni fogjuk a $\forall\mathbf{v}_i$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ jelöléseket a szokásos értelemben, azaz $\forall\mathbf{v}_i\varphi \overset{d}{=} \neg\exists\mathbf{v}_i\neg\varphi$, $(\varphi\rightarrow\psi)\overset{d}{=}(\neg\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)\overset{d}{=}(\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi)$. Mivel $\models(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$, $\models\mathbf{T}\leftrightarrow(\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_0)$ és $\models\mathbf{F}\leftrightarrow\neg\mathbf{T}$, azért néha a $\vee,\mathbf{T},\mathbf{F}$ formulafelépítő jeleket is a $\forall\mathbf{v}_i$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$-hoz hasonlóan kezeljük, pl. az indukciók során $(\varphi\vee\psi)$-re nem bizonyítunk.

Továbbá, kvantorokat gyakran "összevonunk" a szokásokkal összhangban, azaz $\exists v_i v_j \varphi \overset{d}{=} \exists v_i \exists v_j \varphi$ és $\forall v_i v_j \varphi \overset{d}{=} \forall v_i \forall v_j \varphi$, és ugyanígy kettőnél több változójel esetén is.

(ii) Az, hogy az Fm^Λ "tárgynyelveink"-ben nem engedünk meg függvényjeleket, nem lényeges megkötés - a legtöbb vizsgálat szempontjából az n-argumentumú függvényjeleket n+1 -argumentumú relációjeleknek lehet felfogni, amire axiómákként fel van írva, hogy függvény. Ld. pl. [M76] pp.205_5-208^4, Def.11.26, Thm.11.20.

(iii) Ha $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$-ban $\alpha \notin Rngt$, akkor Fm^Λ_w minden eleme ekvivalens egy szigorú formulával, azaz minden $\varphi \in Fm^\Lambda_w$ -hez van $\psi \in Fm^\Lambda$, hogy $\models \varphi \leftrightarrow \psi$. (Egyébként nem.) E dolgozatban általában az első eset áll fenn - abban a kevés esetben, amikor van lényegesen nem-szigorú formula is, általában kitérünk külön azok vizsgálatára is (ld. III.16.K. bizonyítása). Az, hogy csak szigorú formulákkal dolgozunk, tehát nem lényeges megkötés - azonban lényegesen egyszerűsíti a vizsgálatokat: a szigorú atomi formulák között nincs "semmi összefüggés", így algebrai szempontból könnyen kezelhetővé válik a nyelv.

(iv) Ha $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$ ahol $\alpha < \omega$, akkor azt mondjuk, hogy Λ egy véges-változós nyelv. Véges-változós nyelveket erősen vizsgáltak már, pl. Henkin [H67],[H73],[H83], Johnson [Jo73], Maddux [Ma83], Monk [M71], Poizat [Po82]. Ha $\alpha \geq \omega$, akkor nem kellene $Rngt \subseteq \omega$-t megkövetelnünk, a vizsgálatok harmonikusan átmennek a végtelen-argumentumú relációkra is, ld. pl. [HMT]§4.3, [Sa82], [AGN77], [N78].

(v) A dolgozatban a "metanyelv" és "tárgynyelv" jelei között nem teszünk éles különbséget, pl. a $\exists$, $=$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\forall$ stb. jeleket használjuk mindkét nyelvben. Annyi eltérés van, hogy a tárgynyelv formuláit igyekszünk pontosabban írni (mint a metanyelv formuláit), metanyelvi állításokban írunk $\wedge$ helyett pl. "és" -t, vagy "&" -t is, $\rightarrow$ helyett $\Rightarrow$ -t is, stb.

(vi) Gyakran fogunk két nyelv formulái között függvényt definiálni. Ilyenkor ezeket a függvényeket "fordító-függvény"-nek nevezzük. Ennek a hangulati hatáson kívül más jelentése nincs.

(vii) A $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ formulákból gyakran elhagyjuk a zárójelet, tehát $\varphi\wedge\psi$, stb.-t írunk helyettük. ■

I.3. Bizonyítási rendszerünk.

Elsőrendű $\Lambda = \langle \alpha, t \rangle$ nyelveinkre a következőkben definiált bizonyítási rendszert fogjuk használni (elsősorban a II. fejezetben). Ez az $\alpha \geq \omega$ esetben egy szokásosan használt Hilbert-tipusú bizonyítási rendszer (egyik variánsa), és pl. a [HMT]II. rész 157. oldalán van definiálva.

A logikai axiómák Λ_γ^Λ halmaza a következő alakú formulákból áll (azaz Λ_γ^Λ a következő 9 formulaséma "példányai"-nak halmaza): Legyen $\varphi, \psi \in Fm^\Lambda$ és $i, j, k \in \alpha$.

((1)) φ , φ ítéletkalkulusbeli tautológia*/

((2)) $\forall \mathbf{v}_i(\varphi \to \psi) \to (\forall \mathbf{v}_i\varphi \to \forall \mathbf{v}_i\psi)$

((3)) $\forall \mathbf{v}_i\varphi \to \varphi$

((4)) $\varphi \to \forall \mathbf{v}_i\varphi$, ha $\mathbf{v}_i \notin szv(\varphi)$

((5)) $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$

((6)) $\exists \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j)$

((7)) $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \to (\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k \to \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k)$

((8)) $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \to [\varphi \to \forall \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \to \varphi)]$, ha $i \neq j$

((9)) $\exists \mathbf{v}_i\varphi \leftrightarrow \neg\forall \mathbf{v}_i\neg\varphi$.

A következtetési szabályok a "Modus Ponens" (MP), és az "Általánosítás" (G), tehát

$\varphi, \varphi \to \psi$ -ből (MP) -vel ψ -re és
φ -ből (G) -vel $\forall \mathbf{v}_i\varphi$ -re

következtethetünk.

Legyen $Ax \subseteq Fm^\Lambda$. Akkor $Th(Ax)$ az "Ax-ből levezethető formulák halmaza", azaz $Th(Ax)$ az a legkisebb $T \subseteq Fm^\Lambda$ formulahalmaz, melyre

a) $Ax \cup \Lambda_\gamma^\Lambda \subseteq T$

b) $(\forall \varphi, \psi \in Fm^\Lambda)[\{\varphi, \varphi \to \psi\} \subseteq T \Rightarrow \psi \in T]$

c) $(\forall \varphi \in Fm^\Lambda)(\forall i \in \alpha)[\varphi \in T \Rightarrow \forall \mathbf{v}_i\varphi \in T]$.

---

*/Pontosabban, ítéletkalkulusbeli tautológiából kapható úgy, hogy az ítéletváltozók helyébe tetszőleges Fm^Λ-beli elsőrendű formulákat helyettesítünk.

$Ax \vdash_{\Lambda} \varphi \iff \varphi \in Th(Ax)$,

$\equiv^{\Lambda}_{Ax} \stackrel{d}{=} \equiv_{Ax} \stackrel{d}{=} \{(\varphi,\psi) \in {}^2Fm^{\Lambda} : Ax \vdash_{\Lambda} \varphi \leftrightarrow \psi\}$,

$\equiv^{\Lambda} \stackrel{d}{=} \equiv \stackrel{d}{=} \equiv_0$.

A Λ indexet gyakran elhagyjuk, és néha csak α-t írunk helyette. Pl. $\vdash_{\Lambda}$ helyett legtöbbször csak $\vdash_{\alpha}$ -t írunk. A dolgozatban később a Th és a szv jelöléseket nem ill. csak ritkán használjuk, az $\vdash_{\alpha}$, ((1))-((9)), $\equiv_{Ax}$, $\equiv$ jelöléseket gyakran.

2. MEGJEGYZÉS Legyen $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$, $\mathcal{R} \stackrel{d}{=} Dom t$, $Fm_{\alpha} \stackrel{d}{=} Fm^{\Lambda}$.

(1) Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\vdash_{\Lambda}$ bizonyítási rendszer "ép" (sound), azaz $(Ax \vdash_{\Lambda} \varphi \Rightarrow Ax \models \varphi)$, és rendelkezik a szokásos bizonyítási rendszerek szokásos tulajdonságaival, pl. megvan a "dedukciós tulajdonság" (tehát ha $\varphi \vdash_{\Lambda} \psi$ a (G) nélkül [azaz a Th(φ) definiciójából elhagyjuk a (c) feltételt] vagy $\varphi \vdash_{\Lambda} \psi$ ahol $\varphi \in Fm^{\Lambda,0}$, akkor $\vdash_{\Lambda} (\varphi \to \psi)$), és a "helyettesítési tulajdonság" (azaz, ha $\vdash_{\Lambda} \varphi \leftrightarrow \psi$ akkor $\vdash_{\Lambda} \chi(R/\varphi) \leftrightarrow \chi(R/\psi)$ ahol $\chi(R/\varphi)$ azt a formulát jelöli, melyet úgy kapunk χ-ből, hogy az $R(v_0,\ldots,v_{tR-1})$ atomi formula helyébe mindenütt φ-t írunk).

(2) A ((8)) formulaséma az általános Leibniz-szabály (vagy helyettesítési szabály) egy megfogalmazása. Legyen φ egy formula és v,w változójelek. Jelölje $\varphi(v/w)$ azt a formulát, melyet úgy kapunk φ-ből, hogy v helyébe mindenütt w-t írunk, és közben a többi kvantorral való ütközést átnevezésekkel kiküszöböljük. Az általános Leibniz-szabály azt mondja, hogy

$$v=w \to (\varphi \leftrightarrow \varphi(v/w)).$$

Az un. "Tarski-féle" helyettesítés (ld. [T65]) a következő:

$$\varphi(v/\!\!/w) \stackrel{d}{=} \exists v(v=w \land \varphi).$$

Nevezhetnénk ezt "külső" helyettesítésnek is. Könnyen látható, hogy $\models \varphi(v/w) \leftrightarrow \varphi(v/\!\!/w)$, és ugyanakkor $\varphi(v/\!\!/w)$ definiciója sokkal egyszerűbb mert nem kell tekintetbe venni a más kvantorokkal való "ütközést". A ((8)) séma három különböző átfogalmazása:

$$v=w \to (\varphi \leftrightarrow \varphi(v/\!\!/w)),$$

$\exists v(v=w\wedge\varphi)\to\neg\exists v(v=w\wedge\neg\varphi)$,

$v=w\wedge\exists v(v=w\wedge\varphi)\to\varphi$.

(3) A $\vdash_{\Lambda}$ bizonyítási rendszer <u>teljes</u> az "$\alpha\geq\omega$ vagy $\mathrm{Rng}t\subseteq 2$" esetben, vagyis ekkor $(\forall\varphi\in Fm^{\Lambda})[\models\varphi\iff\vdash_{\Lambda}\varphi]$. Az $\alpha\geq\omega$ esetben az $\langle Fm^{\Lambda},\vdash_{\Lambda}\rangle$ "logika" egybeesik a szokásos elsőrendű logikával (ld. pl. [HMT]4.3.23).

(4) A többi esetben, azaz ha $\alpha<\omega$ és van legalább egy legalább binér relációjel (azaz ha Λ nem monadikus), akkor $\vdash_{\Lambda}$ <u>nem-teljes</u>: van $\varphi\in Fm^{\Lambda}$ mely érvényes de nem $\vdash_{\Lambda}$-bizonyítható. Később az (5) pontban felsorolunk néhány érvényes de nem bizonyítható formulát.

Nem lehet véges sok séma hozzáadásával a $\vdash_{\Lambda}$-t teljessé tenni ha $\alpha\geq 3$: Akárhogy megnöveljük Ax^{Λ}-t véges sok, az (1)-(9) -hez hasonló séma hozzáadásával, $\vdash_{\Lambda}$ nem-teljes marad. Tehát bizonyos értelemben $\vdash_{\alpha}$ ha $2<\alpha<\omega$, lényegesen nem-teljes. (Monk tétele, [M69], [M69]-ben természetesen pontosan definiálva van, hogy mit értünk "(1)-(9) -hez hasonló sémá"-n. Remény van azonban arra, hogy egy általánosabb de intuitive még kielégítő séma-fogalom segítségével $\vdash_{\Lambda}$ teljessé tehető - ilyenirányú eredmények vannak [AN81]-ben.) Az $\alpha=2$ esetben két séma hozzáadásával $\vdash_{\Lambda}$ teljessé tehető, Henkin eredménye, ld. [HMT]3.2.65.

Az $\alpha>\omega$ esetben $\vdash_{\Lambda}$ azért teljes, mert minden formulához van még végtelen sok változójel ami nem szerepel benne (ld. pl. [HMT]4.3.23(ii).) A teljességhez szükség is van mind a végtelen sok "új" változójelre: Minden $2<\alpha\leq\beta<\omega$-hoz van érvényes $\varphi\in Fm^{\Lambda}_{\alpha}$, mely nem $\vdash_{\beta}$-bizonyítható (Monk tétele, [M69]), de minden $\varphi\in Fm^{\Lambda}_{2}$ már $\vdash_{3}$-bizonyítható (Henkin tétele, [HMT]3.2.65). Ezzel kapcsolatban felmerül a következő természetes kérdés*/: Ha $3\leq\alpha$, akkor van-e olyan <u>rekurzív</u> $\beta: Fm^{\Lambda}\to\omega$ függvény, melyre igaz, hogy $(\forall\varphi\in Fm^{\Lambda})[\models\varphi\implies\vdash_{\beta(\varphi)}\varphi]$? (Megjegyezzük, hogy ha $\models\varphi$ akkor van $\beta\in\omega$, melyre $\vdash_{\beta}\varphi$.) Tulajdonképpen meglepő, hogy nem tudjuk erre az alapvető kérdésre a választ (még az $\alpha\geq\omega$ esetben sem) - meglévő eredmények alapján az ember azt sejti, hogy nincs ilyen rekurzív függvény.

Ezzel kapcsolatban [N85b]-ben a következő részeredményt bizonyítottuk:

---

*/ A kérdés ebben a formájában Bíró Balázstól származik [B85].

<u>LEMMA 1 [N85b]-ben</u>: Legyen $\alpha \geq \omega$. Van két rekurzív függvény, $\beta : Fm^{\Lambda} \to \omega$ és $tr : Fm^{\Lambda} \to Fm^{\Lambda'}$ úgy, hogy minden $\varphi \in Fm^{\Lambda}$-ra

$$\models \varphi \iff \vdash_{\beta(\varphi)} tr(\varphi) \iff \models tr(\varphi) . \blacksquare$$

(A fenti lemma segítségével karakterizáltuk [N85b]-ben az összes eldönthető CA_{ω}-varietást.)

Az előzőekben olyan tételeket idéztünk, melyek szerint $\vdash_{\Lambda}$ -t nem lehet elég jól közelíteni $\models$ -höz (ha $2 < \alpha < \omega$). Azonban $\models$ -t már lehet jól közelíteni $\vdash_{\Lambda}$ -hoz: Definiálhatunk elég természetes "nem-sztenderd" modelleket az Fm^{Λ} nyelvhez, amire már igaz, hogy $(\forall \varphi \in Fm^{\Lambda})[\vdash_{\Lambda} \varphi \iff$ "φ érvényes az összes modellben, beleértve a nemsztenderd modelleket is"$]$. Ez a nem-sztenderd teljességi tétel Henkintől származik, ld. [H67],[H73]. Az I.4.3. fejezetben részletesebben beszélünk e tételről és alkalmazásairól - a jelen dolgozatban is dolgozni fogunk ezekkel a nem-sztenderd modellekkel.

(5) Példák érvényes de nem bizonyítható formulákra. Legyen $3 \leq \alpha < \omega$.

<u>1. Példa</u> A "Merry-Go-Round" formulák (röviden MGR -formulák). Legyen $\varphi \in Fm^{\Lambda}$ és jelölje $MGR(\varphi)$ a következő formulát:

$$\exists z(z=x \wedge \exists x(x=y \wedge \exists y(y=z \wedge \exists z\varphi))) \leftrightarrow \exists z(z=y \wedge \exists y(y=x \wedge \exists x(x=z \wedge \exists z\varphi))).$$

Intuitíve, $MGR(\varphi)$ azt fejezi ki, hogy ha két különböző módon "felcseréljük" az x és y változójeleket a "z segédrekesz használatával", akakor ugyanazt az eredményt kapjuk. Minden φ-re $MGR(\varphi)$ érvényes, de van $\varphi \in Fm^{\Lambda}_{\alpha}$ amelyre $MGR(\varphi)$ nem $\vdash_{\alpha}$ -bizonyítható. (Henkin tétele, ld. [HMT]3.2.71(7), a bizonyításról ld. 5.K.) Azonban minden $\varphi \in Fm^{\Lambda}_{\alpha}$-ra $\vdash_{\alpha+1} MGR(\varphi)$, ld. [HMT]1.5.14.

<u>2. Példa</u> (I) "függvények kompozíciója függvény", (II) "a relációkompozíció művelete asszociatív", (III) "egy reláció inverzének inverze az eredeti reláció" mind kifejezhető 3 változójel segítségével (a természetes módon), de nem $\vdash_{3}$ -bizonyítható (csak $\vdash_{4}$ -bizonyítható). (Henkin, Maddux és Tarski tételei.) Pl. használva a Tarski-féle helyettesítést, ha $\varphi, \psi \in Fm^{\Lambda,2}$, akkor definiáljuk

$$\varphi|\psi \stackrel{d}{=} \exists z[\varphi(y/z) \wedge \psi(x/z)],$$

$$\varphi^{-1} \stackrel{d}{=} \varphi(y/z)(x/y)(z/x),$$

ezekkel a (II),(III) állítás könnyen megfogalmazható. Megjegyezzük, hogy a II. fejezet egyik fő eredménye az, hogy ha a relációk kompozícióját és inverzét egy más, komplikált de szemantikusan korrekt módon fejezzük ki, akkor már a fenti állítások is $\vdash_3$ -bizonyíthatókká válnak, ld. II.9.T(ii). Megjegyezzük azt is, hogy (III) lényegében ekvivalens a MGR-formulákkal.

__3. Példa__ Legyen $\alpha=2$, és legyen R,S binér relációjelek. Fejezze ki ψ azt, hogy "(DomS=DomR, RngS=RngR, DomR egyelemű)$\Rightarrow$ R=S" (a pontos megfogalmazást ld. a 4.K. kimondásában). Ez a ψ érvényes de nem $\vdash_2$ -bizonyítható (ld. 4.K.) (megint $\vdash_3$ -bizonyítható).

(6) Felvetődik a kérdés: Miért vizsgáljuk pont az $\vdash_\alpha$ bizonyítási rendszert? Nem kapnánk teljesen más eredményeket, ha $\vdash_\alpha$ helyett az elsőrendű logika más bizonyítási rendszereit vizsgálnánk? Ezt a kérdést már vizsgálták (pl. Tarski, Henkin, Maddux), és a vizsgálatok arra utalnak, hogy lényegében ugyanazokat a válaszokat kapjuk a szokásos Hilbert-tipusú kalkulusok összes változatára. (Pl. a reláció-kompozíció asszociativitása egyikben sem bizonyítható 3 változójellel.) Az $\vdash_n$ többé-kevésbé ekvivalens változatait vizsgálta pl. [H67],[H73],[M71],[Jo73],[Ma78],[Ma83],[TG]. Erről ld. még [H67]p.7, és kicsit részletesebben írtunk erről [N85d]-ben.

■

__I.4. Cilindrikus algebrák__

__4.1. Absztrakt cilindrikus algebrák__

Legyen α egy tetszőleges halmaz. A cil_α algebrai tipus függvényjelei $+,\cdot,-,0,1,c_i,d_{ij}$ $(i,j\in\alpha)$ rendre 2,2,1,0,0,1,0 aritásokkal (azaz $0,1,d_{ij}$ $(i,j\in\alpha)$ konstansjelek, c_i $(i\in\alpha)$ és $-$ unér függvényjelek és $+,\cdot$ kétargumentumú függvényjelek).

CTA_α jelöli a __c__il_α-__t__ipusú __a__lgebrák osztályát, azaz $CTA_\alpha \overset{d}{=} Alg(cil_\alpha)$. Tehát ha $\mathfrak{A}\in CTA_\alpha$, akkor

$$\mathfrak{A} = \langle A,\{(+,+^{\mathfrak{A}}),\dots,(1,1^{\mathfrak{A}})\}\cup\{(c_i,c_i^{\mathfrak{A}}),(d_{ij},d_{ij}^{\mathfrak{A}}) : i,j\in\alpha\}\rangle,$$

ehelyett egyszerűen csak

$$\mathfrak{A} = \langle A,+^{\mathfrak{A}},\cdot^{\mathfrak{A}},-^{\mathfrak{A}},0^{\mathfrak{A}},1^{\mathfrak{A}},c_i^{\mathfrak{A}},d_{ij}^{\mathfrak{A}}\rangle_{i,j\in\alpha}$$ -t írunk; ha $\alpha=0$ akkor

$$\mathfrak{A} = \langle A,+^{\mathfrak{A}},\cdot^{\mathfrak{A}},-^{\mathfrak{A}},0^{\mathfrak{A}},1^{\mathfrak{A}}\rangle$$ -t.

Ezt fel lehet úgy fogni, hogy rögzítettünk magunknak egy sorrendet, hogy $\mathfrak{A}$ műveleteit ilyen sorrendben írjuk fel. Vegyük észre, hogy cil_0 a Boole-algebrák hasonlósági tipusa.

Legyen $\mathfrak{A}\in CTA_\alpha$, $K\subseteq CTA_\alpha$ és $\beta\subseteq\alpha$. Akkor

$$\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle A,+^{\mathfrak{A}},\cdot^{\mathfrak{A}},-^{\mathfrak{A}},0^{\mathfrak{A}},1^{\mathfrak{A}},c_i^{\mathfrak{A}},d_{ij}^{\mathfrak{A}}\rangle_{i,j\in\beta}$$

(azaz, ha $\mathfrak{A}=\langle A,F\rangle$ akkor $\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A}=\langle A,Dom(cil_\beta)\upharpoonright F\rangle$), és

$\mathbf{Rd}_\beta K \overset{d}{=} \{\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\in K\}$. $\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A} \overset{d}{=} \mathfrak{Rd}_0\mathfrak{A} = \langle A,+^{\mathfrak{A}},\cdot^{\mathfrak{A}},-^{\mathfrak{A}},0^{\mathfrak{A}},1^{\mathfrak{A}}\rangle$,

$\Delta^{\mathfrak{A}}(a) \overset{d}{=} \{i\in\alpha : c_i^{\mathfrak{A}}(a)\neq a\}$, ha $a\in A$,

$Nr_\beta\mathfrak{A} \overset{d}{=} \{a\in A : \Delta^{\mathfrak{A}}(a)\subseteq\beta\}$, $Zd\,\mathfrak{A} \overset{d}{=} Nr_0\mathfrak{A} = \{a\in A : \Delta^{\mathfrak{A}}(a)=0\}$,

$\mathfrak{Nr}_\beta\mathfrak{A} \overset{d}{=} (Nr_\beta\mathfrak{A})\upharpoonright\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Zd}\mathfrak{A} \overset{d}{=} \mathfrak{Nr}_0\mathfrak{A}$, $\mathbf{Nr}_\beta K \overset{d}{=} \{\mathfrak{Nr}_\beta\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\in K\}$.

Legyen X egy halmaz, $\delta : X\to Sb\alpha$ és $K\subseteq CTA_\alpha$. Akkor

$Cr_X^{(\delta)}K \overset{d}{=} \bigcap\{R : \mathfrak{F} \overset{d}{=} \mathfrak{Tm}_X(cil_\alpha)/R\in \mathbf{ISK}$ és $(\forall x\in X)\Delta^{\mathfrak{F}}(x)\subseteq\delta x\}$,

$\mathfrak{Fr}_X^{(\delta)}K \overset{d}{=} \mathfrak{Tm}_X(cil_\alpha)/Cr_X^{(\delta)}K.$

Levezetett (definiált) műveletek CTA_α-kban:

$s_j^i\tau \overset{d}{=} c_i(d_{ij}\cdot\tau)$ (helyettesítési ("substitution") operáció, ha $i,j\in\alpha$)

$\tau-\sigma \overset{d}{=} \tau\cdot-\sigma$, $\tau\le\sigma \overset{df}{\Longleftrightarrow} \tau\cdot\sigma=\tau$ (az utóbbi kettő a Boole-algebráknál szokásos jelölések).

A $CA_\alpha\subseteq CTA_\alpha$ varietást a következő azonosságok definiálják (ld. [HMT] 1.1.1): Legyen $i,j,k\in\alpha$.

C_0 A Boole-algebrákat definiáló azonosságok, pl.

$x+y = y+x$	$x\cdot y = y\cdot x$
$x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z)$	$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$
$x+0 = x$	$x\cdot 1 = x$
$x+-x = 1$	$x\cdot -x = 0.$

C_1 $c_i0 = 0$

C_2 $x\le c_ix$

C_3 $c_i(x\cdot c_iy) = c_ix\cdot c_iy$

C_4 $c_ic_jx = c_jc_ix$

C_5 $d_{ii} = 1$

C_6 $d_{ij} = c_k(d_{ik}\cdot d_{kj})$ ha $k \notin \{i,j\}$

C_7 $c_i(d_{ij}\cdot x)\cdot c_i(d_{ij}\cdot -x) = 0$ ha $i \neq j$.

Pontosabban, legyen $C_0 \stackrel{d}{=} \{x+y=y+x,\dots,x\cdot -x=0\}$, $C_1^\alpha \stackrel{d}{=} \{c_i 0=0 : i\in\alpha\}$, $C_2^\alpha \stackrel{d}{=} \{x \le c_i x : i\in\alpha\},\dots, C_7^\alpha \stackrel{d}{=} \{c_i(d_{ij}\cdot x)\cdot c_i(d_{ij}\cdot -x)=0 : i,j\in\alpha, i\neq j\}$.
Akkor CA_α a $C_0 \cup C_1^\alpha \cup \dots \cup C_7^\alpha$ azonossághalmazzal definiált varietás.
Tehát ha $|\alpha|<\omega$, akkor CA_α véges bázisú, egyébként nem.

$BA \stackrel{d}{=} CA_0$, a Boole-algebrák (röviden BA-k) osztálya.

CA_α az α-dimenziós cilindrikus algebrák (röviden CA-k vagy CA_α-k) osztálya. Nyilván, $\mathbf{Rd}_\beta CA_\alpha \subseteq CA_\beta$.

Megjegyezzük, hogy C_3 helyettesíthető a következő három sémával:

C_3' $c_i(x+y) = c_i x + c_i y$

C_3'' $c_i - c_i x = -c_i x$

C_3''' $c_i c_i x = c_i x$.

Tehát egy CA_α olyan operátoros Boole-algebra, ahol a c_i operációk komplementált topológikus lezárási operátorok. Ezért ha $\mathfrak{A}\in CA_\alpha$ akkor $\mathfrak{Bo}\mathfrak{A}\in BA$ és $\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A}\in CA_\beta$. Továbbá C_7 helyettesíthető a következő C_7' -vel

C_7' $d_{ij}\cdot c_i(d_{ij}\cdot x) = d_{ij}\cdot x$ ha $i\neq j$.

Vagyis C_7 azt mondja ki, hogy a c_i operáció identitás "a d_{ij} alatt" (vagyis "d_{ij}-re relativizálva"), ha $i\neq j$.

Ha $\mathfrak{A}\in CA_\alpha$ (vagy általánosabban, ha $\mathfrak{Bo}\mathfrak{A}\in BA$), akkor a $+,0,1$ -et gyakran levezetett műveletnek tekintjük, mert $\mathfrak{A} \models \{x+y = -(-x\cdot -y)$, $0=x-x$, $1=-0\}$.

4.2. Speciális cilindrikus algebrák

(a) Formulaalgebrák Legyen $\Lambda=\langle\alpha,t\rangle$ egy nyelv, $\mathcal{R}\stackrel{d}{=}$ Domt. Akkor $\mathfrak{Fm}^\Lambda\in CTA_\alpha$ a következőképp van definiálva (ld. [HMT]§4.3):

$$\mathfrak{Fm}^\Lambda \stackrel{d}{=} \langle Fm^\Lambda, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{F}, \mathbf{T}, \exists \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \rangle_{i,j\in\alpha} ,$$

ahol $\vee : {}^2Fm^\Lambda \to Fm^\Lambda$ úgy van definiálva, hogy $\vee(\varphi,\psi) \stackrel{d}{=} \varphi\vee\psi$ minden φ,ψ

$\in Fm^{\Lambda}$-ra, és hasonlóan a többire is, pl. $\exists\mathbf{v}_i : Fm^{\Lambda} \to Fm^{\Lambda}$ úgy, hogy $\exists\mathbf{v}_i(\varphi) \overset{d}{=} \exists\mathbf{v}_i\varphi$ minden $\varphi\in Fm^{\Lambda}$-ra. $\mathfrak{Fm}^{\Lambda}$ helyett gyakran írunk $\mathfrak{Fm}_{\alpha}^{\Lambda}$-t. Könnyű látni, hogy

$$\mathfrak{Fm}^{\Lambda} \cong \mathfrak{Fm}_{\mathcal{R}}(cil_{\alpha}) \cong \mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}\, CTA_{\alpha}.$$

Definiáljuk is az (első) izomorfizmust:

$$\tau\mu(R(\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_{tR-1})) \overset{d}{=} R, \quad \text{ha} \quad R\in\mathcal{R}$$

$$\tau\mu(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j) \overset{d}{=} d_{ij}, \quad \tau\mu(\mathbf{F}) \overset{d}{=} 0, \quad \tau\mu(\mathbf{T}) \overset{d}{=} 1,$$

$$\tau\mu(\varphi\vee\psi) \overset{d}{=} \tau\mu(\varphi)+\tau\mu(\psi), \quad \tau\mu(\varphi\wedge\psi) \overset{d}{=} \tau\mu(\varphi)\cdot\tau\mu(\psi), \quad \tau\mu(\neg\varphi) \overset{d}{=} -\tau\mu(\varphi),$$

$$\tau\mu(\exists\mathbf{v}_i\varphi) \overset{d}{=} c_i\tau\mu(\varphi).$$

Akkor $\tau\mu : \mathfrak{Fm}^{\Lambda} \twoheadrightarrow \mathfrak{Fm}_{\mathcal{R}}(cil_{\alpha})$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy ha $Ax\subseteq Fm^{\Lambda}$, akkor

$$\mathfrak{Fm}^{\Lambda}/\equiv_{Ax} \in CA_{\alpha}.$$

Sőt, [HMT]4.3.25 bizonyítja, hogy

$$\mathfrak{Fm}^{\Lambda}/\equiv \;\cong\; \mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}^{(t)}CA_{\alpha}.$$

Ez azt jelenti, hogy a CA_{α} osztály és a $\vdash_{\alpha}$ bizonyítási rendszer között szoros kapcsolat van: a CA_{α}-axiómák (C_0-C_7) a $\vdash_{\alpha}$ bizonyítási rendszer egy algebrai átfogalmazása. Pl. következményként kapjuk (ld. [HMT]4.3.28(i)), hogy ha $\alpha<\omega$, akkor

$$CA_{\alpha} = \mathbf{I}\,\{\mathfrak{Fm}^{\Lambda}/\equiv_{Ax} \;:\; \Lambda=\langle\alpha,t\rangle \text{ egy nyelv, } Ax\subseteq Fm^{\Lambda}\}.$$

Ez egyfajta reprezentációtétel CA_{α}-ra.

<u>**(b) Atom-strukturák, komplexus-algebrák**</u> Legyen α tetszőleges halmaz. Legyen cat_{α} az a relációs tipus, melyben T_i binér relációjel és E_{ij} unér relációjel minden $i,j\in\alpha$-ra. Legyen $\mathfrak{B}=\langle B, T_i^{\mathfrak{B}}, E_{ij}^{\mathfrak{B}}\rangle_{i,j\in\alpha}$ egy cat_{α} tipusú modell. Akkor $\mathfrak{Cm}\mathfrak{B}\in CTA_{\alpha}$ a következőképp van definiálva:

$$\mathfrak{Cm}\mathfrak{B} \overset{d}{=} \langle SbB, \cup, \cap, \sim, 0, B, T_i^{\mathfrak{B}*}, E_{ij}^{\mathfrak{B}}\rangle_{i,j\in\alpha}.$$

(Itt és később is $\langle SbB,\cup,\cap,\sim,0,B\rangle\in BA$ úgy van definiálva, hogy $\cup(X,Y) \overset{d}{=} X\cup Y$, $\cap(X,Y) \overset{d}{=} X\cap Y$, $\sim X \overset{d}{=} B\sim X$ ha $X,Y\in SbB$.) $\mathfrak{Cm}\mathfrak{B}$-t a $\mathfrak{B}$ "komplexus-algebrájának" hívjuk.

$$\mathbf{Cm}K \overset{d}{=} \{\mathfrak{Cm}\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\in K\}, \quad \text{ha} \quad K\subseteq Mod(cat_{\alpha}).$$

Legyen $At_\alpha \subseteq Mod(cat_\alpha)$ azon $\mathfrak{B} = \langle B, T_i, E_{ij} \rangle_{i,j\in\alpha}$ modellek osztálya, melyre a következő (i) - (v) igaz minden $i,j,k\in\alpha$-ra:

(i) T_i ekvivalencia-reláció B-n

(ii) $T_i | T_j = T_j | T_i$

(iii) $E_{ii} = B$

(iv) $E_{ij} = T_k^*(E_{ik} \cap E_{kj})$ ha $k \notin \{i,j\}$

(v) $T_i \cap {}^2E_{ij} \subseteq Id$ ha $i \neq j$.

Megjegyezzük, hogy (iv) helyettesíthető a következővel:

(iv)′ $E_{ij} = E_{ji}$, $E_{ik} \cap E_{kj} \subseteq E_{ij}$, $E_{ij} = T_k^* E_{ij}$ és

$E_{ij} \subseteq T_k^*(E_{ik} \cap E_{kj})$ ha $k \notin \{i,j\}$.

Az At_α elemeit (cilindrikus) atom-strukturáknak hívjuk*/. [HMT] 2.7.43(ii), 2.7.40 bizonyítja, hogy

$$CA_\alpha = \mathbf{IS}\mathfrak{Cm}\, At_\alpha .$$

Ez egy második fajta reprezentációtétel CA_α-ra, mely az $\alpha=0$ esetben pontosan a BA-k reprezentáció-tétele. Ezenkívül, mint látni fogjuk, az atom-strukturákat elég jól lehet "rajzolni", így a CA_α-kra is adódik egy jó rajzolási mód.

(c) Cilindrikus halmaz-algebrák Legyen α tetszőleges halmaz. Legyen V α-sorozatok egy halmaza, azaz $V \subseteq {}^\alpha U$ valamely U-ra. Legyen $i,j\in\alpha$.

$$D_{ij}^{[V]} \stackrel{d}{=} \{s\in V : s(i)=s(j)\},$$

$$T_i^{[V]} \stackrel{d}{=} \{(s,z)\in {}^2V : (\alpha\sim\{i\})\upharpoonright s=(\alpha\sim\{i\})\upharpoonright z\},$$

$$C_i^{[V]}X \stackrel{d}{=} T_i^{[V]*}X = \{z\in V : (\exists s\in X)(\alpha\sim\{i\})\upharpoonright s \subseteq z\},$$

$$\mathfrak{Cs}(V) \stackrel{d}{=} \langle V, T_i^{[V]}, D_{ij}^{[V]} \rangle_{i,j\in\alpha} \quad \text{és}$$

*/Ezzel eltértünk a [HMT] szóhasználatától, de a [HMT]2.7.40 tétele szerint az eltérés nem lényeges.

$$\mathfrak{Sb}V \overset{d}{=} \mathfrak{Lm}\,\mathfrak{Ctr}(V) = \langle SbV, \cup, \cap, \sim, 0, V, C_i^{[V]}, D_{ij}^{[V]} \rangle_{i,j\in\alpha}, \quad {}^{*/}$$

$$Crs_\alpha \overset{d}{=} \mathbf{S}\{\mathfrak{Sb}V : (\exists U)\ V \subseteq {}^\alpha U\}.$$

Crs_α elemeit cilindrikus-relativizált halmazalgebráknak hívjuk. Vegyük észre, hogy Crs_α a Boole halmazalgebrák lehető legtermészetesebb általánosítása "sorozat-halmaz" algebrákká: A sorozatok szerkezete behozza a két új műveletet: $D_{ij}^{[V]}$ a sorozat magját (kerneljét) tükrözi, míg $C_i^{[V]}$ a sorozatok "összeérését" (azt lehet kifejezni velük, hogy pl. két sorozat megegyezik a $H\subseteq\alpha$ halmazon). Ha $V\subseteq{}^\alpha U$ akkor

$base(V) \overset{d}{=} \cup\{Rng\,s : s\in V\}$ és ha $\mathfrak{A}\in Crs_\alpha$ akkor

$base(\mathfrak{A}) \overset{d}{=} base(1^{\mathfrak{A}})$, az $\mathfrak{A}$ bázisa.

$Cs_\alpha \overset{d}{=} \mathbf{S}\{\mathfrak{Sb}^\alpha U : U$ egy halmaz$\}$, a cilindrikus halmazalgebrák osztálya.

Definiálunk speciális Cs_α-kat: Legyen $\Lambda=\langle\alpha,t\rangle$ egy nyelv, és $\mathfrak{M}\in Mod(t)$. Akkor

$$Cs^{(\alpha,\mathfrak{M})} \overset{d}{=} \{\widetilde{\varphi}^{(\alpha,\mathfrak{M})} : \varphi\in Fm^\Lambda\} \quad \text{és}$$

$$\mathfrak{Cs}^{(\alpha,\mathfrak{M})} \overset{d}{=} Cs^{(\alpha,\mathfrak{M})} \mathbin{|} \mathfrak{Sb}^\alpha M.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{Cs}^{(\alpha,\mathfrak{M})}\in Cs_\alpha$, mert ha $V \overset{d}{=} {}^\alpha M$ akkor

$$D_{ij}^{[V]} = \widetilde{\mathbf{v}_i{=}\mathbf{v}_j}^{(\alpha,\mathfrak{M})}$$

$$C_i^{[V]}\widetilde{\varphi}^{(\alpha,\mathfrak{M})} = \widetilde{\exists\mathbf{v}_i\varphi}^{(\alpha,\mathfrak{M})}, \quad \text{és}$$

$$\widetilde{\varphi}^{(\alpha,\mathfrak{M})} \cup \widetilde{\psi}^{(\alpha,\mathfrak{M})} = \widetilde{\varphi\vee\psi}^{(\alpha,\mathfrak{M})}, \quad \text{stb.}$$

Következményként kapjuk, hogy ha $\alpha<\omega$, akkor

$$Cs_\alpha = \{\mathfrak{Cs}^{(\alpha,\mathfrak{M})} : \Lambda=\langle\alpha,t\rangle \text{ egy nyelv és } \mathfrak{M}\in Mod(t)\}.$$

Definiáljuk:

$Gs_\alpha \overset{d}{=} \mathbf{S}\{\mathfrak{Sb}(\cup\{{}^\alpha U_i : i\in I\}) :$ I egy halmaz és $(U_i : i\in I)$ páronként diszjunkt halmazok rendszere$\}$,

$RCA_\alpha \overset{d}{=} \mathbf{HSP}Cs_\alpha$, a reprezentálható CA_α-k osztálya.

A CA-elmélet fő tételei a következők:

---

*/ Az $\mathfrak{Ctr}(\alpha,V)$ és $\mathfrak{Sb}(\alpha,V)$ jelölés helyesebb lenne, mert ha $V=0$, akkor V-ből nem olvasható le az α, de reméljük ez a pongyolaság nem okoz később félreértést.

$RCA_\alpha = \mathbf{I}Gs_\alpha = \mathbf{SP}\, Cs_\alpha = \mathbf{SNr}_\alpha CA_{\alpha+\omega}$ ha $\alpha \geq 2$ (Henkin, Tarski),

RCA_α nem véges bázisú és nem is definiálható véges sémával ha $\alpha \geq \omega$ (Monk); ezért

$RCA_\alpha \subset CA_\alpha$ (Henkin).

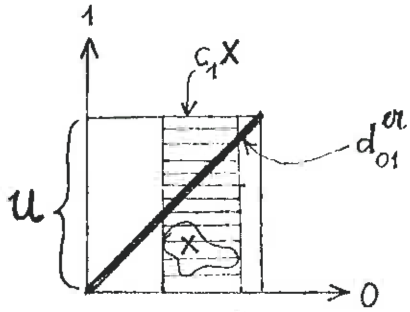
Tehát míg formulaalgebrákkal és atom-strukturákkal lehet "reprezentálni" a CA_α-t, addig halmaz-algebrákkal nem.

Intuitíven, CA_α a "bizonyítás-elméletnek", míg RCA_α a "modell-elméletnek" felel meg, és különbségük azt tükrözi, hogy a végesváltozós nyelvek nem teljesek. Pl. ha $\Lambda = \langle \alpha, t \rangle$ ahol $\alpha < \omega$, $\mathcal{R} = Domt$, $Rngt \subseteq \{\alpha\}$ és $_s\!\equiv \overset{d}{=} \{(\varphi,\psi) \in {}^2Fm^\Lambda : \models \varphi \leftrightarrow \psi\}$, akkor

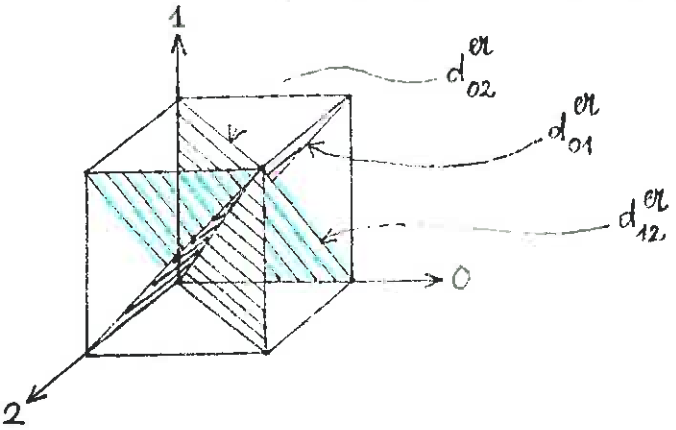
$$\mathfrak{Fm}^\Lambda/\equiv\ \cong \mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}\, CA_\alpha \quad \text{és} \quad \mathfrak{Fm}^\Lambda/_s\!\equiv\ \cong \mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}\, RCA_\alpha .$$

Ezek a megfigyelések harmonikusan általánosíthatók az $\alpha \geq \omega$ esetre is, de ott akkor lesz igazán szép az összhang, ha megengedünk végtelen-argumentumú relációkat is. (Pl. szépen lehet az ultraszorzat fogalmát a végtelenargumentumú strukturákra általánosítani, úgy hogy a Łos-lemma érvényben maradjon.) Egyébként, ha nemcsak α-argumentumú relációkat vizsgálunk, akkor a <u>regularitás</u> fogalma, mely jelen szerzőtől származik, lényeges szerepet játszik a vizsgálatokban. A jelen dolgozatban ezekre nem térünk ki. Tulajdonképpen, a CA-elmélet inkább algebrai absztrakt modell-elmélet mint csupán a klasszikus elsőrendű logika algebraizáltja, mert nagyon sok lényegesen eltérő logika is CA-vá fordul le algebraizálásnál. Ezért van pl., hogy némely cilindrikus algebrai tétel nehezebb mint a logikai megfelelője. Erről részletesebben írtunk [N78] -ban.

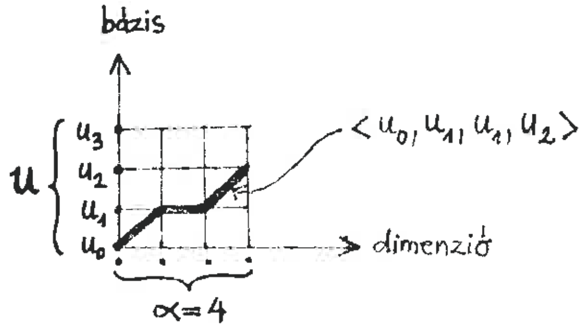
Cs_2 -re és Cs_3 -ra jó rajzolási mód a következő: Legyen $\mathfrak{A} \in Cs_2$, $U \overset{d}{=} base(\mathfrak{A})$. Akkor $1^{\mathfrak{A}} = {}^2U$ pontjait egy kétdimenziós sík pontjaiként lehet elképzelni, pl. $(u,v) \in {}^2U$ az (u,v) "koordinátájú" pont. Ekkor d_{ij} a sík "<u>d</u>iagonálisa" és ha $X \subseteq {}^2U$ akkor pl. $c_1^{\mathfrak{A}} X$ az X fölé emelt 1-tengellyel párhuzamos "<u>c</u>ilinder" (innen a c_i, d_{ij} elnevezés). Ld. az alábbi ábrát.



Ugyanezt a háromdimenziós térben is meg lehet csinálni (innen az α-dimenziós CA elnevezés). Alább szemléltetjük a $\mathfrak{A}^3U$ három diagonális elemét:



Alternatív rajzolási mód Crs_α-kra (és Cs_α-kra) az, hogy az α-sorozatokat nem pontokként, hanem az analízisben szokásos módon függvényekként rajzoljuk, ekkor egyik "koordináta" a bázis (U) és a másik a dimenzió (α):



Ezt a "diagrammos" rajzolási módot az α=2,3 esetben is érdemes használni (ld. pl. III. fejezet 139, 158 old. és III.3,4 Ábra).

A dolgozatban később a cat_α, Nr_3CA_α, $\mathfrak{L}5^{(\alpha,\mathfrak{M})}$ jelölést nem vagy csak ritkán fogjuk használni, a $D_{ij}^{[V]}$, $C_i^{[V]}$, $\mathfrak{S}b V$, jelöléseket gyakran fogjuk használni (főleg a III. fejezetben).

4.3. Cilindrikus algebrák mint nem-sztenderd modellek.

Egy bizonyos szempontból, a CA_α-k nem mások mint a $\vdash_\alpha$ bizonyítási rendszer nem-sztenderd modelljei: ha egy φ formula nem $\vdash_\alpha$-bizonyítható, akkor van egy nem-sztenderd modell, egy CA_α, melyben φ nem érvényes. Másrészt, a reprezentálható CA_α-k, az RCA_α-k, az igazi sztenderd modelleknek felelnek meg és így a CA-elmélet reprezentáció-tételeit a logikában teljességi tételek bizonyítására lehet felhasználni. A CA-k ezen mindkét tipusú alkalmazásai lényegesek: nem-bizonyíthatóságot kimutató állításoknak általában csak CA-elméleti bizonyításai vannak, és vannak olyan teljességi tételek is (pl. a végtelen-argumentumú relációk logikájáé, ld. [HMT]4.3.23(ii), 4.3.24), melyeknek csak CA-elméleti bizonyításai vannak. E fejezetben mindkét alkalmazásra mutatunk példát. A CA-k nem-sztenderd modellekként való felfogását (és ilyen alkalmazásait) Henkin kezdeményezte (ld. pl. [H73] és [H67]§4.4, 42-46 o.).

Legyen $\Lambda = \langle \alpha, t\rangle$ egy nyelv, $\mathcal{R}$ =Domt. Definiáljuk

$$Mod^\Lambda \overset{d}{=} \{\langle \mathfrak{A}, m\rangle : \mathfrak{A} \in At_\alpha,\ m: \mathcal{R} \to SbA,\ (\forall R\in\mathcal{R})\Delta^{\mathfrak{Im}\,\mathfrak{A}}(m_R) \subseteq t_R\}.$$

Ha $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{A}, m\rangle \in Mod^\Lambda$, akkor $R^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} m_R$ minden $R\in\mathcal{R}$-re és $\mathfrak{M}$-et $\langle \mathfrak{A}, R^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}}$-val is jelöljük. Itt $\mathfrak{A}$-t a "kiértékelések strukturájá"-nak nevezzük.

Legyen $\mathfrak{M} \overset{d}{=} \langle \mathfrak{A}, R^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in Mod^\Lambda$, $\varphi, \psi \in Fm^\Lambda$, $i,j\in\alpha$, $R\in\mathcal{R}$ és $k\in A$. Definiáljuk:

$$\mathfrak{M} \models R(\mathbf{v}_0,\ldots,\mathbf{v}_{tR-1})[k] \overset{df}{\iff} k\in R^{\mathfrak{M}},$$

$$\mathfrak{M} \models \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j[k] \overset{df}{\iff} k\in E^{\mathfrak{A}}_{ij},$$

$$\mathfrak{M} \models \exists \mathbf{v}_i\varphi[k] \overset{df}{\iff} (\exists h\in A)[\mathfrak{M}\models\varphi[h] \text{ és } hT^{\mathfrak{A}}_i k],$$

$$\mathfrak{M} \models (\varphi\vee\psi)[k] \overset{df}{\iff} (\mathfrak{M}\models\varphi[k] \text{ vagy } \mathfrak{M}\models\psi[k]), \quad \text{stb.}$$

$$\mathfrak{M} \models \varphi \overset{df}{\iff} (\forall k\in A)\ \mathfrak{M}\models\varphi[k],$$

$$\models_\alpha \varphi \overset{df}{\iff} (\forall \mathfrak{M}\in Mod^\Lambda)\ \mathfrak{M}\models\varphi.$$

3. TÉTEL (nem-sztenderd teljességi tétel, Henkin) Legyen $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$ egy nyelv és $\varphi\in Fm^\Lambda$. Akkor $\vdash_\alpha \varphi \iff \models_\alpha \varphi$.

Bizonyításvázlat: A $\vdash_\alpha \varphi \Rightarrow \models_\alpha \varphi$ bizonyításához azt kell leellenőrizni, hogy $(\forall\varphi\in\Lambda^\Lambda_\gamma) \models_\alpha \varphi$, továbbá, hogy $[(\mathfrak{M}\models\varphi \text{ és } \mathfrak{M}\models\varphi\to\psi) \Rightarrow$

$\mathfrak{M}\models\psi]$ és $[\mathfrak{M}\models\varphi \Rightarrow \mathfrak{M}\models \forall v_i\varphi]$ minden $\mathfrak{M}\in Mod^{\Lambda}$, $\varphi,\psi\in Fm^{\Lambda}$ és $i\in\alpha$ esetén. (Ezeket rutinszámolás leellenőrizni.) A másik irányhoz először azt kell ellenőrizni, hogy $\mathfrak{Fm}^{\Lambda}/_{\equiv}\in CA_{\alpha}$ (ehhez a CA_{α}-t definiáló azonosságoknak megfelelő formulákat kell $\vdash_{\alpha}$ -bizonyítani), majd használni kell (a nem túl nehéz de nem is triviális) $CA_{\alpha}\subseteq \mathbf{ISCm}At_{\alpha}$ tételt. QED

Vehettük volna a

$$Mod'^{\Lambda} \overset{d}{=} \{\langle\mathfrak{A},m\rangle : \mathfrak{A}\in CA_{\alpha},\ m:\mathcal{R}\to A,\ (\forall R\in\mathcal{R})\Delta^{\mathfrak{A}}(m_R)\subseteq t_R\}$$

definiciót a Mod^{Λ} helyett; ekkor is $\mathfrak{M}\models\varphi$ ha $\mathfrak{M}\in Mod'^{\Lambda}$ és $\varphi\in Fm^{\Lambda}$ természetes módon definiálható. Ez a közelítés $CA_{\alpha} = \mathbf{ISCm}\,At_{\alpha}$ miatt ekvivalens az eredetivel abban az értelemben, hogy van egy természetes $f : Mod^{\Lambda} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Mod'^{\Lambda}$ leképezés, melyre $(\forall\varphi\in Fm^{\Lambda})(\forall\mathfrak{M}\in Mod^{\Lambda})[\mathfrak{M}\models\varphi \iff f(\mathfrak{M})\models\varphi]$. Henkin a fenti Mod'^{Λ} elemeit nevezi "általánosított modellnek". Mi azért választottuk Mod^{Λ}-t, mert talán jobban látszik a kapcsolat az "igazi" modellekkel.

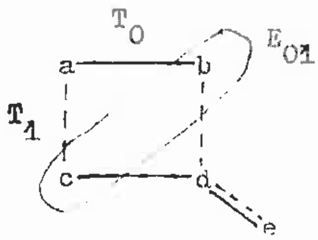
A 3.T. alkalmazásaként most megmutatjuk, hogy a 2.Mj.-beli 3.Példa ψ formulája nem bizonyítható.

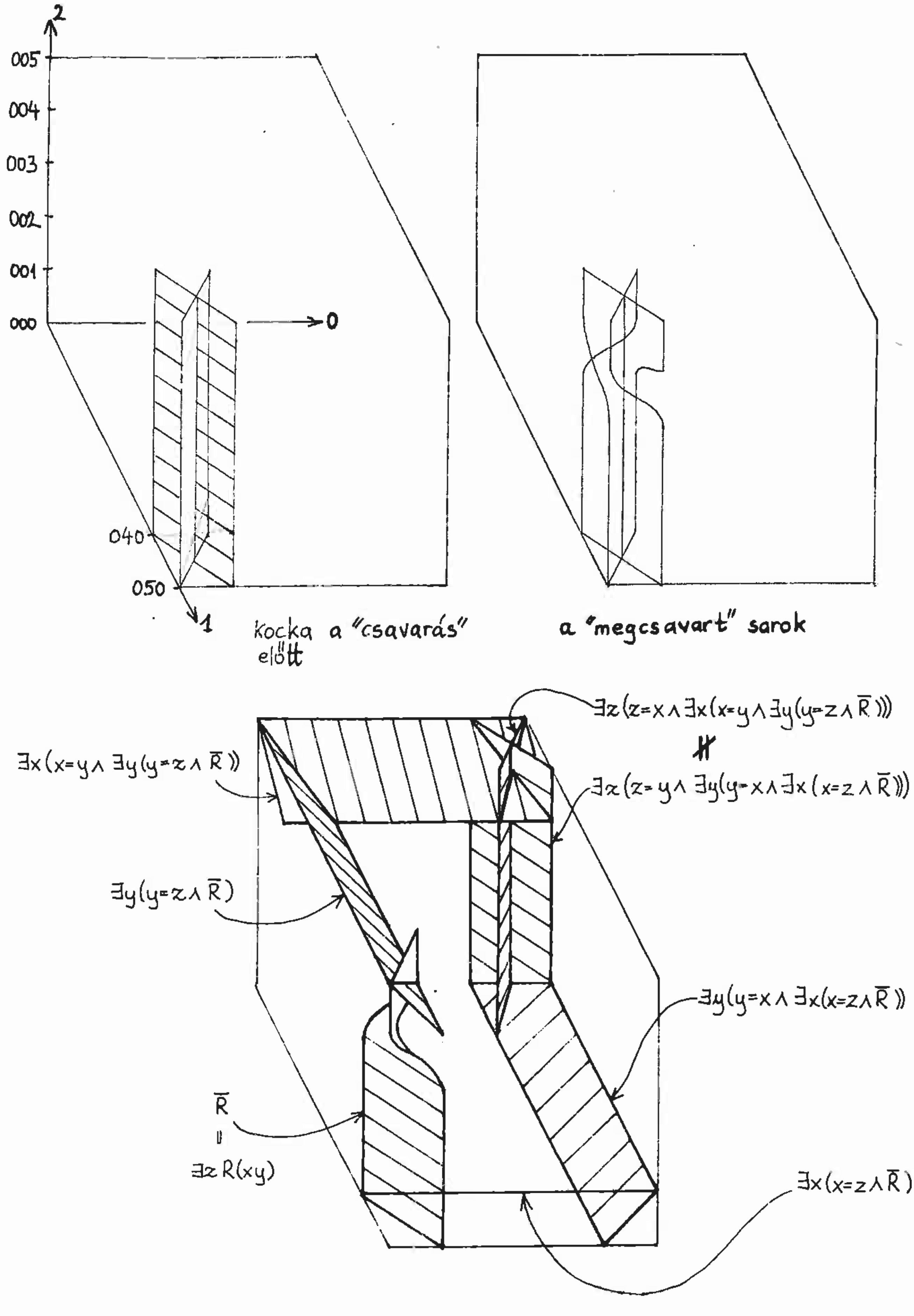
4. KÖVETKEZMÉNY Legyen $\bar{R}\overset{d}{=}R(x,y)$, $\bar{S}\overset{d}{=}S(x,y)$ és $\psi\overset{d}{=}$

$$\forall xy[(\exists y\bar{R}\leftrightarrow\exists y\bar{S})\wedge(\exists x\bar{R}\leftrightarrow\exists x\bar{S})\wedge([\exists x(x=y\wedge\exists y\bar{R})\wedge\exists y\bar{R}]\to x=y)]\to\forall xy[\bar{R}\leftrightarrow\bar{S}].$$

Akkor $\not\vdash_{\alpha}\psi$.

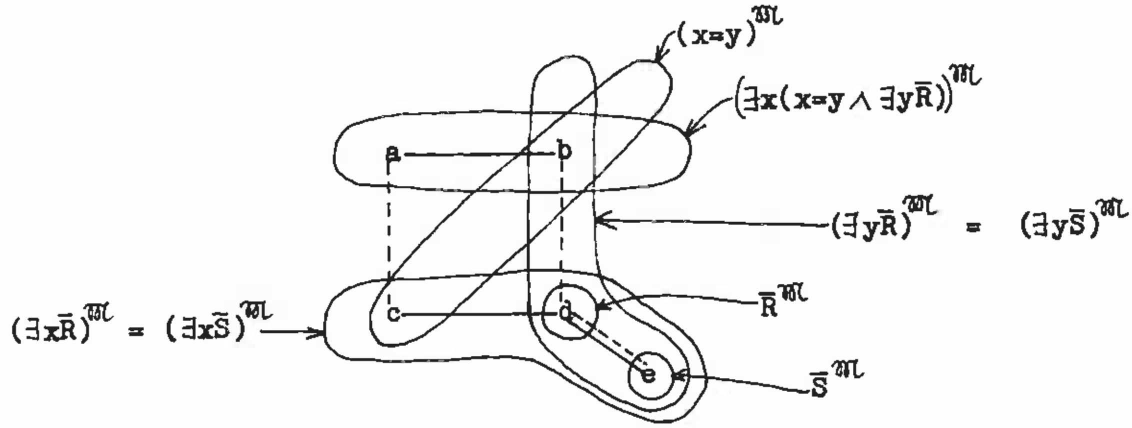
Bizonyítás: A 3.T. értelmében, elég mutatni egy $\mathfrak{M}\in Mod^{\Lambda}$ modellt, melyre $\mathfrak{M}\not\models\psi$. Legyen $A\overset{d}{=}\{a,b,c,d,e\}$, $T_0\overset{d}{=}{}^2\{a,b\}\cup{}^2\{c,d,e\}$, $T_1\overset{d}{=}{}^2\{a,c\}\cup{}^2\{b,d,e\}$, $E_{00}=E_{11}=A$, $E_{01}=E_{10}=\{b,c\}$ és $\mathfrak{A}\overset{d}{=}\langle A,T_i,E_{ij}\rangle_{i,j\in 2}$, ld. az alábbi ábrát.




2
005
004
003
002
001
000
0
040
050
1
kocka a "csavarás" előtt
a "megcsavart" sarok
∃z(z=x∧∃x(x=y∧∃y(y=z∧R̄)))
#
∃z(z=y∧∃y(y=x∧∃x(x=z∧R̄)))
∃x(x=y∧∃y(y=z∧R̄))
∃y(y=z∧R̄)
∃y(y=x∧∃x(x=z∧R̄))
R̄
∥
∃z R(xy)
∃x(x=z∧R̄)

1. ÁBRA

Ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{A}\in At_2$. Legyen $\mathfrak{M} \overset{d}{=} \langle \mathfrak{A}, R^{\mathfrak{M}}, S^{\mathfrak{M}}\rangle$, ahol $R^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} \{d\}$ és $S^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} \{e\}$. Könnyen kiszámolható, hogy $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, ld. az alábbi ábrát, ahol $\varphi^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} \{k\in A : \mathfrak{M}\vDash\varphi[k]\}$.



QED

A 4.K.-beli $\mathfrak{A}$ atom-struktura Henkin ugynevezett "dilation" módszerével kapható az $\mathfrak{At}(^2 2)$ atom-strukturából úgy, hogy egy új "e" atomot "beszúrunk" a strukturába. Ezt a módszert a II. fejezetben alkalmazni fogjuk bonyolultabb esetekben (ld. a II.15,17.T. bizonyítását). Az alábbi 5.K. bizonyításabeli módszer, a "csavarás" (twisting) is Henkintől származik. Kevésbé részletesek leszünk, mert ezt a módszert nem fogjuk a disszertációban használni. Emlékeztetünk rá, hogy az MGR(φ) formula a 2.Mj. 1. Példájában volt definiálva.

5. KÖVETKEZMÉNY (Henkin) $\not\vdash_3$ MGR(R(x,y)).

A bizonyítás gondolata: (Ld. a túloldali 1. Ábrát.) Vesszük a 6×6×6 -os kockát, és abban a második dimenziót "megcsavarjuk" egy sarokban, az ábrán látható módon. Kapunk egy torzított kockát, mely vehető egy $\mathfrak{M}$ nemsztenderd modell kiértékelés-strukturájának. Az ábrabeli $\bar{R}$ halmaz a torzított kockában független a második dimenziótól, így lehet az R kétargumentumú relációjel $R^{\mathfrak{M}}$ értéke az $\mathfrak{M}$-ben. Az ábrán látható módon akkor $\mathfrak{M} \nvDash$ MGR(R(x,y)). Megjegyezzük, hogy ([M61] egy problémája megoldása érdekében) jelen konstrukció kicsit eltér Henkin eredeti bizonyításától.
QED

Rátérünk a második tipusú alkalmazásokra. Legyen $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$, $\mathcal{R} \overset{d}{=}$ Domt, $\alpha < \omega$. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{M} = \langle\mathfrak{A}, R^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in \mathrm{Mod}^{\Lambda}$ <u>sztenderd</u> modell[*], ha $\mathfrak{Cm}\,\mathfrak{A} \in Cs_{\alpha}$. Ha $\mathfrak{M} = \langle\mathfrak{A}, R^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in \mathrm{Mod}^{\Lambda}$ sztenderd, akkor legyen $\mathfrak{N} \overset{d}{=} \langle N, \bar{R}^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in \mathrm{Mod}(t)$ ahol $N \overset{d}{=} \mathrm{base}(\mathfrak{A})$ és $\bar{R}^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} \{tR{\upharpoonright}s : s\in R^{\mathfrak{M}}\}$ minden $R\in\mathcal{R}$-re, és ha $\mathfrak{N} = \langle N, R^{\mathfrak{N}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in \mathrm{Mod}(t)$, akkor legyen $\mathfrak{M} \overset{d}{=}$ $\langle\mathfrak{A}\tau({}^{\alpha}N), \bar{R}^{\mathfrak{N}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in \mathrm{Mod}^{\Lambda}$ ahol $(\forall R\in\mathcal{R})\bar{R}^{\mathfrak{N}} \overset{d}{=} \{s\in{}^{\alpha}N : tR{\upharpoonright}s \in R^{\mathfrak{N}}\}$; ekkor mindkét esetben $(\forall\varphi\in Fm^{\Lambda})(\forall k\in{}^{\alpha}N)[\mathfrak{M}\models\varphi[k] \iff \mathfrak{N}\models\varphi[k]]$. Tehát a Mod^{Λ} sztenderd elemei és az "igazi" modellek között valóban szoros kapcsolat van. CA-elméletben reprezentálhatósági tételeknek nevezik az olyanokat, ahol egy "absztraktul definiált" $K \subseteq CA_{\alpha}$ osztályról bizonyítják, hogy $K \subseteq RCA_{\alpha}$. Pl. legyen $Mg_{\alpha} \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in CA_{\alpha} : (\exists X\subseteq A)[A = Sg^{\mathfrak{A}}X$ és $(\forall x\in X)$ $\Delta^{\mathfrak{A}}(x) \subseteq 1]\}$. Akkor $Mg_{\alpha} \subseteq RCA_{\alpha}$ (Monk tétele, [M64]). Ennek a tételnek a kapcsán megmutatjuk, hogy hogyan lehet általában az algebrai reprezentálhatósági tételeket logikai teljességi tételek bizonyítására használni. (Ennek van egy általános elmélete, ld. [AN75] Thm.1.) Megjegyezzük, hogy reprezentáció-tétel használatával teljességi tétel bizonyítására példa a II.12.T.(i) bizonyítása is.

<u>6. KÖVETKEZMÉNY</u> Legyen $\Lambda = \langle\alpha, t\rangle$ egy nyelv, $\alpha < \omega$ és $\mathrm{Rngt} \subseteq 2$. Akkor $\vdash_{\alpha}$ teljes kalkulus Fm^{Λ}-ra, azaz minden $\varphi\in Fm^{\Lambda}$ esetén

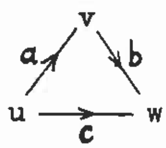
$(\models\varphi \iff \vdash_{\alpha}\varphi)$.

<u>Bizonyítás:</u> Elég bizonyítani, hogy $\nvdash_{\alpha}\varphi \Rightarrow \not\models\varphi$. Tfh. $\nvdash_{\alpha}\varphi$. A 3.T. szerint ekkor $\not\models_{\alpha}\varphi$, tehát van $\mathfrak{M} = \langle\mathfrak{A}, R^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} \in \mathrm{Mod}^{\Lambda}$, melyre $\mathfrak{M}\not\models\varphi$. Legyen $\mathfrak{B} \overset{d}{=} \mathfrak{Sg}^{(\mathfrak{Cm}\mathfrak{A})}\{R^{\mathfrak{M}} : R\in\mathcal{R}\}$. Akkor $\mathrm{Rngt} \subseteq 2$ miatt $\mathfrak{B}\in Mg_{\alpha} \subseteq RCA_{\alpha} = \mathbf{SP}\,Cs_{\alpha}$. Legyen $g(\psi) \overset{d}{=} \{k\in A : \mathfrak{M}\models\psi[k]\}$ minden $\psi\in Fm^{\Lambda}$-ra. Akkor könnyen látható, hogy $g : \mathfrak{Fm}^{\Lambda} \to \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{M}\not\models\varphi$ miatt $g(\varphi) \neq 1^{\mathfrak{B}}$. Akkor $\mathfrak{B}\in\mathbf{SP}\,Cs_{\alpha}$ miatt van $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C} \in Cs_{\alpha}$, hogy $fg(\varphi) \neq 1^{\mathfrak{C}}$. Legyen $h \overset{d}{=} f\circ g$ és $(\forall R\in\mathcal{R})R^{\mathfrak{N}} \overset{d}{=} h(R(v_0,\dots,v_{tR-1}))$. Akkor $h : \mathfrak{Fm}^{\Lambda} \to \mathfrak{C} \in Cs_{\alpha}$, $(\forall R\in\mathcal{R})$ $\Delta^{\mathfrak{C}}(R^{\mathfrak{N}}) \subseteq tR$ és $h(\varphi) \neq 1^{\mathfrak{C}}$. Legyen $\mathfrak{N} \overset{d}{=} \langle\mathrm{base}(\mathfrak{C}), R^{\mathfrak{N}}\rangle_{R\in\mathcal{R}}$. Akkor $\mathfrak{N}\in\mathrm{Mod}(t)$ és $\mathfrak{N}\not\models\varphi$. <u>QED</u>

A Mod^{Λ}, Mod'^{Λ}, $\models_{\alpha}$ jelöléseket nem használjuk később.

---

[*] Az $\alpha < \omega$ feltételt az egyszerűség kedvéért kötöttük csak ki. Az $\alpha \geq \omega$ esetben az un. reguláris Cs_{α}-k definiálják a sztenderd modelleket.



A Δ-szabály illusztrációja: Ha a, b, c binér relációk, akkor $(u,w) \in (a|b) \cap c$ csak úgy lehetséges, ahogy az ábrán rajzoltuk, ekkor viszont az ábra szerint $(a^{-1}|c) \cap b \neq 0$ stb.

2. ÁBRA

I.5. Reláció-algebrák

A reláció-algebrák (röviden RA-k) hasonlósági tipusa

$$\mathrm{rat} \stackrel{d}{=} \{(+,3),(\cdot,3),(-,2),(0,1),(1,1),(;,3),(^\smile,2),(1',1)\},$$

azaz a Boole-hasonlósági tipus műveletein kívül $;$, $^\smile$, és $1'$ kettő-, egy- ill. nulla-argumentumú függvényjelek. RTA jelöli a fenti hasonlósági tipusú algebrák osztályát (reláció-tipusú algebrák), azaz $\mathrm{RTA} \stackrel{d}{=} \mathrm{Alg(rat)}$. Ha $\mathfrak{A} \in \mathrm{RTA}$, akkor

$$\mathfrak{A} = \langle A, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, -^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, ;^{\mathfrak{A}}, {}^{\smile\mathfrak{A}}, 1'^{\mathfrak{A}}\rangle,$$

azaz megint rögzítettünk magunknak egy sorrendet, hogy ilyen sorrendben soroljuk fel egy RTA műveleteit. $\mathrm{RAT}_{\mathcal{R}} \stackrel{d}{=} \mathrm{Tm}_{\mathcal{R}}(\mathrm{rat})$ ha $\mathcal{R}$ egy halmaz, azaz $\mathrm{RAT}_{\mathcal{R}}$ jelöli az $\mathcal{R}$ elemeivel mint változójelekkel felírt reláció-algebrai termek halmazát. $^\smile(\tau)$ helyett $\tau^\smile$ -t írunk, és a műveletek "kötési erőssége" a következő sorrendben csökken: $^\smile, -, ;, \cdot, +$. Tehát pl. $-x^\smile;y+z \stackrel{d}{=} ((-(x^\smile));y)+z$. $\underset{\sim}{\mathrm{RAT}}_{\mathcal{R}} \stackrel{d}{=} \underset{\sim}{\mathrm{RAT}} \stackrel{d}{=} \mathfrak{Tm}_{\mathcal{R}}(\mathrm{rat})$.

A reláció-algebrák RA varietásának definiciója (ld. pl. [HMT]§5.3):

RA azon $\mathfrak{A} = \langle A,+,\cdot,-,0,1,;,^\smile,1'\rangle \in \mathrm{RTA}$ -k osztálya, melyre

(1) $\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A} \stackrel{d}{=} \langle A,+,\cdot,-,0,1\rangle$ Boole-algebra.

(2) $;$ asszociatív

(3) $1'$ egységeleme $;$ -nak

(4) $(a;b)\cdot c=0 \iff (a^\smile;c)\cdot b=0 \iff (c;b^\smile)\cdot a=0$, minden $a,b,c \in A$ -ra.

Az utóbbi (4)-et "háromszög-szabály"-nak, "Δ-szabály"-nak vagy "Peirce-szabály"-nak is szokás hívni, ld. a 2. Ábrát a túloldalon.

Be lehet bizonyítani (Chin-Tarski [CT51]), hogy $\mathfrak{A} \in \mathrm{RA}$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A}$ teljesíti az alábbi 7 azonosságot a Boole-azonosságokon kívül:

R_0 Boole-azonosságok

R_1 $(x;y);z = x;(y;z)$

R_2 $(x+y);z = (x;z)+(y;z)$

R_3 $x;1' = x$

R_4 $x^{\smile\smile} = x$

R_5 $(x+y)^{\cup} = x^{\cup}+y^{\cup}$
R_6 $(x;y)^{\cup} = y^{\cup};x^{\cup}$
R_7 $x^{\cup};[-(x;y)] \leq -y$.

Tehát RA egy véges-bázisú varietás. Tekintsük a (2) alábbi gyengítéseit:

$(2)'$ $(x;1);1 = x;(1;1)$ (félig-asszociativitás)
$(2)''$ $((x\cdot 1');1);1 = (x\cdot 1');(1;1)$ (gyenge asszociativitás), és
$(2)'''$ $x = x$.

SA (ill. WA, NA) azon $\mathfrak{A}\in$ RTA -k osztálya, mely az előbbi (1), (3), (4)-en kívül $(2)'$-t (ill. $(2)''$-t, $(2)'''$-t) teljesíti. Be lehet bizonyítani (ld. [Ma78]), hogy $\mathfrak{A}\in$ SA (ill. WA, NA) akkor és csak akkor ha $\mathfrak{A}$ teljesíti R_0 -on kívül R_2-R_7 -et és $(2)'$-t (ill. $(2)''$ -t, $(2)'''$ -t). Tehát SA, WA, NA is mind véges-bázisú varietás.

A reláció-halmaz-algebrák osztálya. Legyen T egy tetszőleges binér reláció. Akkor

$\mathcal{R}[T] \overset{d}{=} \langle SbT, \cup, \cap, \sim, 0, T, |^{[T]}, {}^{-1[T]}, Id\cap T \rangle$, ahol
$R\,|^{[T]}S \overset{d}{=} (R|S)\cap T$ és
$R^{-1[T]} \overset{d}{=} R^{-1}\cap T$, minden $R,S\subseteq T$ -re.
$\mathcal{R}(U) \overset{d}{=} \mathcal{R}[^2U]$ ha U egy halmaz,
Rs $\overset{d}{=} \mathbf{S}\{\mathcal{R}(U) : U$ egy halmaz$\}$,
RRA $\overset{d}{=} \mathbf{SP}$ Rs , a reprezentálható RA-k osztálya.

A reláció-algebra-elmélet legfontosabb tételei közé tartozik, hogy RRA varietás (Tarski), és RRA nem axiomatizálható végesen (Monk). Ezekből következik,az is, hogy RRA $\neq$ RA (ezt először Lyndon bizonyította). Bizonyítható továbbá, hogy

RRA $= \mathbf{IS}\{\mathcal{R}[T]$: T ekvivalencia-reláció$\}$, és [Ma82] bizonyítja, hogy
WA $= \mathbf{IS}\{\mathcal{R}[T]$: T egy reflexív és szimmetrikus reláció$\}$.

Az NA, WA, SA, RA osztályokhoz Maddux [Ma78, Ma82] definiált "atomstrukturákat", melyek nagyon szépen viselkednek és ugyanúgy rendkívül hasznosak mint a CA esetben. Ezekre nem térünk ki.

<u>Kapcsolat RA és CA között.</u> Minden CTA_α-hoz, ha $\alpha \geq 3$, természetes módon hozzárendelhető egy RTA-reduktum: Legyen $\mathfrak{A} \in CTA_\alpha$, $\alpha \geq 3$. Akkor

$$\mathfrak{Ra}'\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle A, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, -^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, ;, {}^{\smile}, d_{01}^{\mathfrak{A}} \rangle \quad \text{és}$$

$$\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A} \overset{d}{=} \mathrm{Nr}_2\mathfrak{A} \upharpoonright \mathfrak{Ra}'\mathfrak{A}, \quad \text{ahol minden } a,b \in A\text{-ra}$$

$$a;b \overset{d}{=} c_2(s_2^1 a \cdot s_2^0 b) \quad \text{és} \quad a^{\smile} \overset{d}{=} s_0^2 s_1^0 s_2^1 a. \quad \text{(Vö. 2.Mj. 2. Példája.)}$$

$$\mathbf{Ra}K \overset{d}{=} \{\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in K\}, \quad \text{ha} \quad K \subseteq CA_\alpha.$$

Megjegyezzük, hogy ha U egy halmaz és $3 \leq \alpha < \omega$, akkor $\mathfrak{Ra}(\mathfrak{Cs}^\alpha U) \cong \mathfrak{R}(U)$, az izomorfizmus köztük $\langle \{s \in {}^\alpha U : (s_0, s_1) \in R\} : R \subseteq {}^2U \rangle$.

A CA-RA kapcsolat izgalmas téma, hiszen mindkettő az elsőrendű logika algebraizálása: A CA-k esetében a kvantoroknak c_i $(i \in \alpha)$ felel meg és a változójelek helyettesítése nincs megengedve (alapműveletként, viszont az s_j^i levezetett művelettel utánozni lehet azt); az RA-k esetében a kvantorokat a kompozíció (;) és a változójelek helyettesítését az "inverz" $({}^{\smile})$ helyettesíti. A CA-k jóval "explicitebb", "földhözragadtabb" algebraizálása az elsőrendű logikának mint az elegáns RA - viszont annak hátrányai is vannak, hogy az RA és logika kapcsolata nem annyira explicit: nehezebb a közlekedés az RA és a logika között. (Pl. egyáltalán nem magától-értetődő, hogy minden 3 változójelet használó mondatot ki lehet RA-termekkel is fejezni, pedig úgy van - ld. II.3.L. Azt, hogy "R sűrű rendezés" kifejezhetjük RA-logikában így: "$1' \leq R$, $R;R \leq R$, $R \cdot R^{\smile} = 0$, $R + R^{\smile} = 1$, $(R - 1') \leq (R - 1');(R - 1')$". De próbáljuk például "$\exists xy \forall z (R(x,z) \vee R(y,z))$" -t vagy "$\exists x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$" -t RA-termekkel kifejezni!). Az RA-logika mint logika [TG]-ben van részletesen kidolgozva.

Az alábbiakban idézzük a CA-RA kapcsolat leglényegesebb tételeit.

<u>7.TÉTEL</u> (G. Fuhrken) Legyen $\mathfrak{A} \in CA_\alpha$, $\alpha \geq 3$. Akkor $\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$ az R_0-R_7 azonosságok közül legfeljebb R_1, R_4 és R_6-ot nem teljesíti. ■

Valóban, van is egy-egy CA_3, melynek RTA-reduktumában R_1, R_4 ill. R_6 nem teljesül*/, azaz $\mathbf{Ra}CA_3 \nsubseteq RA$ (és ez sok "bajnak" a forrása).

---

*/ A 4. Probléma a [M61] 61. oldalán azt kérdezi, hogy van-e olyan $\mathfrak{R} \in \mathbf{Ra}CA_3$, melyben R_1 és R_6 teljesül és R_4 nem, ill. van-e olyan, melyben R_1 és R_4 teljesül de R_6 nem. Az első kérdésre pozitív választ adtunk az 5.K. bizonyításában megszerkesztett "csavart" $\mathfrak{L} \in CA_3$ használatával: Legyen $\mathfrak{L}' = \mathfrak{Sg}^{(\mathfrak{L})}\{\bar{R}\}$ és $\mathfrak{R} = \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{L}'$. Akkor ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{R} \models R_1, R_6$ és $\mathfrak{R} \not\models R_4$. (Henkin eredeti konstrukciója az 5.K. bizonyítására kissé más volt.) A második kérdés még mindíg nyitott, és nagyon érdekes.

<u>8. TÉTEL</u> (Henkin-Tarski) $\mathbf{Ra}CA_\alpha \subseteq RA$, ha $\alpha \geqslant 4$. ■

<u>9. TÉTEL</u> (Monk [M61],[M61a]) $RA \subseteq \mathbf{Ra}CA_3$ és $RA \nsubseteq \mathbf{SRa}CA_5$. ■

<u>10. TÉTEL</u> (Maddux [Ma78]) $RA = \mathbf{SRa}CA_4$. ■

<u>11. TÉTEL</u> (Németi [N85a]) $RA \nsubseteq \mathbf{Ra}CA_4$. ■

(A 11.T. a [M61] 5. Problémájának megoldása, mely probléma szerepel [Ma78]-ban (ld. 136. old.) és a [Ma85] 1985-ös problémalistán is. A bizonyításról ld. a II.4.Mj.-t.)

Tehát minden RA reduktuma egy CA_3-nak és részreduktuma egy CA_4-nek, de van RA , mely nem reduktuma semelyik CA_4-nek és van, mely nem részreduktuma semelyik CA_5-nek. A fenti tételek alapján azt szokás mondani, hogy "RA valahol CA_3 és CA_4 között van". Az SA osztályt Maddux [Ma78] kifejezetten abból a célból definiálta, hogy "közelebb hozza" RA -t a CA_3 -hoz. A II. fejezet fő nehézségei az RA és $\mathbf{Ra}CA_3$ közti különbségből származnak.

II. A SZABAD CILINDRIKUS ALGEBRÁK NEM ATOMOSAK – GÖDEL NEM-TELJESSÉGI TÉTELE IGAZ A HÁROM VÁLTOZÓ-JELET HASZNÁLÓ ELSŐRENDŰ LOGIKÁRA

II.1. A probléma exponálása

A cilindrikus algebrák (és reláció-algebrák) az elsőrendű logika algebrai megfelelői. A szabad cilindrikus (és reláció-) algebrák szerkezete nagyon "gazdag", mert ezek, egy bizonyos értelemben, tükrözik az egész elsőrendű logikát és ezért ezekre a szabad-algebrákra vonatkozó kérdések bizonyítása általában nehéz (vö. [HMT] I. kötet, p.335_1-336^2). Az első kérdések egyike, amit vizsgálni szoktak az ilyen szabad-algebrákról az, hogy atomosak-e.

A következők voltak ismertek az irodalomban: Ha $\beta \geq \omega$, akkor a β elemmel (szabadon) generált szabad CA_α, $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$, atomtalan (Pigozzi tétele, ld. [HMT]2.5.13). Tfh. $0<\beta<\omega$. Ha $\alpha \leq 1$, akkor $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ véges (ld. [HMT]2.5.3(i)), tehát atomos. $\mathfrak{Fr}_\beta CA_2$ már végtelen de még mindíg atomos (Henkin tétele, ld. [HMT]2.5.3(ii), 2.5.7(ii)). Tarski bizonyította, hogy ha $3 \leq \alpha < \omega$ akkor $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-ban végtelen sok atom van (ld. [HMT]2.5.9), és a [HMT]-beli 4.14. Probléma azt kérdezi, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ vajon atomos-e*/. Ismert volt, hogy tetszőleges α-ra $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-nak pontosan 2^β db. zéró-dimenziós atomja van (Pigozzi tétele, ld. [HMT]2.5.11), és azt sejtették, hogy az $\alpha \geq \omega$ esetben ez az összes atom (ld. [HMT] 2.5.12, 2.6. Probléma).

A következőket bizonyítottuk a szabad cilindrikus algebrákról:
Legyen $0<\beta<\omega$.

(1) $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ nem atomos ha $\alpha \geq 3$. ([HMT]4.14. Probléma megoldása)

(2) $\mathfrak{Zd}\, \mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ atomos $\Longleftrightarrow$ ($\alpha \geq \omega$ vagy $\alpha \leq 2$).

(3) $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-nak csak "triviális" véges-dimenziós elemei vannak ha $\alpha \geq \omega$, ([HMT]2.10. Probléma megoldása)

---

*/[HMT]2.5.8-ban a szerzők azt ígérik, hogy a II. kötetben bizonyítani fogják, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ nem atomos ha $3 \leq \alpha < \omega$. A II. kötet bevezetésében azonban azt írják, hogy a bizonyítást nem tudták rekonstruálni, és így az nyitott probléma. (Már 1982-ben kérdezték mint nyitott problémát.) A II. kötetben részesetként logikai gondolatmenettel bizonyítják, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta RCA_\alpha$ nem atomos ha $4 \leq \beta$ és $3 \leq \alpha < \omega$(ld. 4.3.32), és a 4.14. Problémában kérdezik, hogy a) a $4 \leq \beta$ feltétel elhagyható-e, b) RCA_α kicserélhető-e CA_α-ra és c) adjunk algebrai bizonyítást. Az $\alpha \geq \omega$ esetről azt írják, hogy szinte semmit nem tudnak róla, ld. [HMT]II. kötet, p.340.

(4) A [HMT]2.5.12-ben levő sejtésről bizonyítottuk, hogy az igaz a szabad reprezentálható CA_α-kra ($\alpha \geq \omega$), és bizonyos eredményeink arra utalnak, hogy a nem-reprezentálható esetben esetleg nem igaz. Nevezetesen, bizonyítottuk, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ -ban van egy nem-nulla elem, mely kisebb az összes $-d_{ij}$ -nél, $i,j \in \alpha \sim 2$, abban az esetben is ha $\alpha \geq \omega$! Ez a szabad reprezentálható esetben nem lehetséges.

(5) $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ -nak van olyan β-elemű generátorrendszere, mely nem szabadon generál, ha $\alpha \geq 3$ ([HMT]2.7. Probléma megoldása).

A jelen II. fejezetben leírjuk az (1) és (2) bizonyítását az $\alpha < \omega$ esetre, és bizonyítási módszerünk alkalmazásaként az (5) bizonyítását (ld. 14.T és 19.T). (Az (1)-hez azt kellett bizonyítani, hogy van egy b elem az $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ -ban, mely alatt nincs atom: tehát minden b -ből induló lefelé menő 0-t nem tartalmazó véges lánc végtelenül folytatható.) Az $\alpha \geq \omega$ esetre a bizonyítás [N84]-ben, (3) bizonyítása [N84a]-ban, a [HMT]2.5.12 sejtéshez kapcsolódó eredmények [N84]-ben találhatók. (Jónsson egy kérdésére válaszolva azt is bizonyítottuk, hogy ha $\beta < \omega$, akkor $\mathfrak{Fr}_{\beta+1} CA_\alpha$ nem ágyazható be $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-ba. Ez utóbbi kérdésre nem térünk ki a jelen dolgozatban. A kérdés [J85]-ban, a bizonyítás [N85f]-ben található meg.)

<u>A bizonyítás módszeréről:</u> A jelen fejezetben arra az algebrai tételre, hogy "$\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ nem atomos", logikai bizonyítást adunk. Az $\alpha \geq 4$ esetre van tisztán algebrai bizonyításunk is (sőt az volt az "eredeti" bizonyítás), de az nem működik az $\alpha=3$ esetben (ellenpéldák mutatják, hogy a legfontosabb lemmák abban a bizonyításban nem igazak $\alpha=3$ -ra), ráadásul hosszabb és számolásigényesebb a jelen logikai bizonyításnál. Másfelől viszont az algebrai bizonyítás mutatja azt is, hogy (ha $0 < \beta < \omega$, $4 \leq \alpha < \omega$, akkor) van egy atom a $\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ -ban, mely alatt $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ -nak nincs atomja. Nem tudjuk, hogy ez igaz-e az $\alpha=3$ esetre. (Az algebrai bizonyítás [N84b]-ben található.)

Az $\alpha=3$ irányban a továbblépést az a felismerés adta, hogy a szabadalgebra atomossága és a Gödel nem-teljességi tétel*/ között szoros kapcsolat van.: A Gödel nem-teljességi tétel alig mond többet annál, hogy

*/ A Gödel nem-teljességi tételt és az atomosság fogalmát röviden idézzük a II.2 fejezetben.

$\mathfrak{Fr}_\beta RCA_\omega$ nem atomos*/. Ha tudnánk, hogy a Gödel nem-teljességi tétel igaz $L_3 = \langle Fm_3, \vdash_3 \rangle$-re, akkor be lehetne bizonyítani belőle, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta CA_3$ nem atomos**/. A legtermészetesebb módként arra, hogy a Gödel nem-teljességi tételt bizonyítsuk L_3 -ra az kínálkozik, hogy az $L_\omega = \langle Fm_\omega, \vdash_\omega \rangle$ logikát "visszavezessük" L_3 -ra. És ez a [TG] könyv egyik alapvető problémája: [TG]-ben L_ω -t visszavezették L_4 -re (tulajdonképpen "$L_{3.5}$ -re", azaz reláció-algebrai logikára) és kérdezik, hogy L_ω visszavezethető-e L_3 -ra. Ha tehát ezt meg tudjuk mutatni, akkor két problémát oldunk meg egyszerre. Megjegyezzük, hogy a [TG]-beli eredményből bizonyítható, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ (és $\mathfrak{Fr}_\beta RA$, $\mathfrak{Fr}_\beta \mathbf{SNr}_3 CA_\alpha$) nem atomos ha $\alpha \geq 4$ és hogy a Gödel nem-teljességi tétel igaz L_4-re. A probléma az $\alpha=3$ esetre, mint oly sokszor, most is sokkal nehezebb.

Az, hogy a Gödel nem-teljességi tétel igaz L_3 -ra, valami olyasmit jelent, hogy L_3 elég erős***/. Az I. fejezetben mutattunk példákat arra, hogy aránylag természetes állításokat (noha meg lehet fogalmazni,) nem lehet bizonyítani L_3 -ban. (Pl. azt, hogy függvények kompozíciója függvény, vagy hogy a relációkompozíció művelete asszociatív.) Ezeket L_4 -ben már általában lehet bizonyítani: látszólag L_4 sokkal erősebb mint L_3.

Bizonyításunk lényege egy olyan kiszámítható (rekurzív) $\varkappa: Fm_\omega \to Fm_3$ függvény és $Ax \in Fm_3$ formula konstruálása, melyre

$$(*) \quad (\forall \varphi \in Fm_\omega) \left[Ax \models \varphi \iff Ax \vdash_3 \varkappa\varphi \right].$$

Ez az elsőrendű logika egyfajta visszavezetése L_3 -ra, vagy másszóval egyfajta felépítése L_3 -ban. Tehát annak ellenére, hogy L_3 nagyon gyenge - mégis elég erős ahhoz, hogy (ügyes módon) "elsőrendű logikát játsszunk benne". A (*) állítás Tarski "translation mapping theorem"-jével (TMT) analóg, ld. [TG]Thm.4.4(xxxiv) a 4.47 oldalon. A [TG] könyvben a (TMT)-t arra használták (többek között), hogy felépítsék L_ω -t egy, az L_3 -nál erősebb $\mathcal{L}_3$ logikában. Az $\mathcal{L}_3$ -at úgy kapjuk L_3 -ból, hogy hozzáveszünk még két erős formulasémát az axiómákhoz: a relációkompozíció asszociativitását (BIV) és egy erős "helyettesítési" axiómasémát, az általános Leibniz

---

*/Pontos kapcsolatokat egy tetszőleges logika formulaalgebrájának atomosságá és a "Gödel nem-teljességi tétel teljesülése" között [N85d]-ben mutattunk.

**/A 14.T bizonyításában lényegében ezt tesszük.

***/L_2 már gyenge ehhez: mivel L_2 eldönthető, azért nem igaz benne a Gödel nem-teljességi tétel.

szabályt (AIX). Tarski felvetette, hogy enélkül a két séma nélkül az L_3 talán túl gyenge. A (*) állítással tehát pozitívan megoldottuk Tarski ezen problémáját: L_3 nem túl gyenge. A probléma megfogalmazása és "körüljárása" megtalálható a [TG]3.78 oldalán (a 3.10 §-ban, közvetlenül (BIV') alatt). E probléma története régre nyúlik vissza időben: Schröder 1895-ös [Sc1895] könyvében összefoglalt jelentős munkából kiindulva Tarski [T41] a harmincas évek végén vizsgálni kezdte azt a kérdést, hogy mi az a legkisebb n, melyre L_ω' felépíthető $L_n = \langle Fm_n, \vdash_n \rangle$-ben (azaz melyre (*) igaz L_n-re). Ezt eleinte RA-elméleti keretben vizsgálta, mert minden ami RA azonosságelméletére visszavezethető, visszavezethető L_4-re is. Ilymódon (tehát RA-kon keresztül) 1953-ban Tarski [T53] bizonyította (*) -ot L_4-re. (Tehát azt is belátta, hogy $n \leq 4$.) Dana Scott és Leon Henkin bizonyította, hogy $2 < n$, tehát tudták, hogy $3 \leq n \leq 4$. Tarski még korábban bizonyította, hogy az RA módszerrel a nyitvamaradó "n=3?" kérdés nem oldható meg pozitívan, mert RA egyik axiómája (az asszociativitás) nem bizonyítható L_3-ban. Felvetette tehát Tarski a problémát, hogy n=3 igaz-e, azaz hogy a fenti (*) állítás igaz-e. E problémát megoldja tehát (*) -nak jelen fejezetbeli bizonyítása. Megjegyezzük még, hogy a probléma most vázolt történetének során jött létre a félig-asszociatív RA -k (azaz az SA -k) elmélete, ugyanis SA olyan gyengítése RA -nak, mely csak kicsit erősebb L_3-nál (tehát Tarski RA -elméleti eredményeit SA -ra megismételve közelebb kerültek volna a probléma megoldásához). Későbbi fejlemények és parciális megoldások során (pl. Maddux SA -ra vonatkozó eredményei) a probléma sokrétűbbé, gazdagabbá vált, míg végül elnyerte a jelenlegi [TG]-beli alakját. E gazdagabb problémára (pontosabban problémaseregre), mint alább látni fogjuk, negatív válaszokat is kaptunk.

A (*) állítás következményeként kapjuk, hogy

(**) $(\forall \varphi \in Fm_3) \left[Ax \models \varphi \iff Ax \vdash_3 \varkappa\varphi \right]$,

ez egyfajta <u>teljességi tétel</u> L_3-ra. (Az I. fejezetben mutattuk, hogy L_3 (és L_α, $3 \leq \alpha < \omega$) nem teljes, sőt véges sok axióma hozzávételével sem tehető teljessé. Tehát a $\varkappa$ nem hagyható el (**) -ból.) A fenti "kvázi-teljességi tétel" az erősebb $\mathcal{L}_3$-ra olyan formában is erősíthető,

hogy minden $Ax \in Th \subseteq Fm_3$ és $\varphi \in Fm_3$ -ra $[Th \models \varphi \iff Th \vdash_3 \kappa\varphi]$.
Ebből bizonyította Tarski a kvázi-projektív reláció-algebrákra vonatkozó reprezentáció tételét, azt hogy $QRA \subseteq RRA$, ld. 5.L. (Később erre Maddux adott egy tisztán algebrai bizonyítást.) Nos, ezek az eredmények már nem vihetők át L_3 -ra, ezekhez az L_3 -hoz hozzátett két új axiómaséma nélkülözhetetlen.: Bizonyítjuk, hogy a (**) kvázi-teljesség nem terjeszthető ki minden Ax -nál erősebb Th -ra, és hogy $QCA_3 \not\subseteq RCA_3$, $QSA \not\subseteq RA$ (ld. 17.T, 18.Mj). A második állítás megoldja azt a problémát (ld. Maddux 1985-ös problémaösszeállítása [Ma85]), hogy Tarski kvázi-projektív RA -kra vonatkozó reprezentáció-tétele vajon általánosítható-e a félig-asszociatív RA -kra is. A (**) felett idézett [TG]-beli problémára további negatív válaszokat kapunk a III. fejezetben, melyek szerint L_3 [TG]-ben javasolt további gyengítéseiben L_ω már nem építhető fel.

Megjegyezzük, hogy ahhoz, hogy az $\mathfrak{Fr}_\beta CA_3$ atomosságára vonatkozó eredményt megkapjuk, létfontosságú volt az, hogy a (BIV), (AIX) formulasémákat, melyek végtelen sok formulát jelentenek, egy véges formulahalmazzal helyettesítsük.

II.2. Speciális jelölések és tudnivalók a II. fejezethez.

A II. fejezetben főleg olyan nyelveink lesznek, melyben csak kétváltozós relációjelek vannak. A II. fejezeten végig, E egy rögzített elem és $\mathcal{R}$ egy rögzített halmaz, úgy, hogy $\mathsf{E}\in\mathcal{R}$. Legyen $n\le\omega$ és legyen $\Lambda(n,\mathcal{R})$ az az elsőrendű nyelv, mely n változójelet használ és melynek relációjelei az $\mathcal{R}$ elemei, mind kétargumentumú (azaz $\Lambda(n,\mathcal{R}) \stackrel{d}{=} \langle n, \mathcal{R}\times\{2\}\rangle$). Mivel a II. fejezetben főleg a $\Lambda(n,\mathcal{R})$ nyelveket használjuk, ezért ezeket nem tüntetjük fel a jelölésben:

$$Fm_n \stackrel{d}{=} Fm^{\Lambda(n,\mathcal{R})}, \quad \mathfrak{Fm}_n \stackrel{d}{=} \mathfrak{Fm}^{\Lambda(n,\mathcal{R})}, \quad Fm_n^k \stackrel{d}{=} Fm^{\Lambda(n,\mathcal{R}),k} .$$

(Tehát pl. Fm_ω^2 az ω változójellel és $\mathcal{R}$ elemeivel mint kétváltozós relációjelekkel felírt azon elsőrendű formulák halmaza, melyekben legfeljebb x,y szabad változójel.) Hasonlóan

$$RAT \stackrel{d}{=} RAT_{\mathcal{R}} .$$

Ha $\mathfrak{M}$ egy modell a II. fejezetben (és más nincs róla mondva), akkor

$$\mathfrak{M} = \langle M, R^{\mathfrak{M}}\rangle_{R\in\mathcal{R}} .$$

Használni fogjuk a következő kényelmi jelöléseket:

<u>1. DEFINICIÓ</u> (i) Formulákban, különösen, ha kvantorral kezdődnek, $\wedge$ helyett gyakran csak vesszőt írunk. Pl. $\exists x(\varphi\wedge\psi)$ helyett $\exists x(\varphi,\psi)$ -t írunk.

(ii) Legyen Λ egy nyelv és $\varphi\in Fm^\Lambda$. Akkor

$$\begin{aligned}
\varphi(\!(x,y)\!) &\stackrel{d}{=} \varphi\\
\varphi(\!(x,z)\!) &\stackrel{d}{=} \exists y(y=z,\varphi)\\
\varphi(\!(y,z)\!) &\stackrel{d}{=} \exists x(x=y,\varphi(\!(x,z)\!))\\
\varphi(\!(y,x)\!) &\stackrel{d}{=} \exists z(z=x,\varphi(\!(y,z)\!))\\
\varphi(\!(z,x)\!) &\stackrel{d}{=} \exists y(y=z,\varphi(\!(y,x)\!))\\
\varphi(\!(z,y)\!) &\stackrel{d}{=} \exists x(x=z,\varphi)\\
\varphi(\!(x,x)\!) &\stackrel{d}{=} \exists y(y=x,\varphi)\\
\varphi(\!(y,y)\!) &\stackrel{d}{=} \exists x(x=y,\varphi)\\
\varphi(\!(z,z)\!) &\stackrel{d}{=} \exists x(x=z,\varphi(\!(x,x)\!)). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Az I. fejezetben láttuk, hogy az MGR-formulák nem bizonyíthatók - ez azt jelenti, hogy a $\varphi(\!(y,x)\!)$ két természetes definiciója nem ekvivalens. A fenti 1.D.(ii) -ben csak az a lényeg, hogy valahogy lerögzítsük $\varphi(\!(y,x)\!)$ jelentését és ehhez tartsuk magunkat. Ez formulák felírását teszi majd egyszerűbbé és áttekinthetővé.

A "párzó-függvény" (vagy projekció-függvény) technikáról:

A relációalgebra-logikának az a felismerés adott lendületet, hogy minden három változójelet használó elsőrendű mondat kifejezhető relációtermmel is (ld. a 3.L -beli 2.SÁ -t). Tarski vette észre, hogy ha feltesszük, hogy van két "projekciófüggvényünk", akkor tetszőleges elsőrendű mondat kifejezhető RA-termmel. Erről szól az alábbi 3.L.

2.DEFINICIÓ Legyen $p_0, p_1 \in Fm_3^2$. Az alábbi π formula azt fejezi ki, hogy p_0, p_1 parciális függvény úgy, hogy minden y,z -hez van (esetleg több) x, melyre $p_0(x)=y$, $p_1(x)=z$.:

$$\pi \overset{df}{\iff} \forall xyz(\, p_0(\!(x,y)\!), p_0(\!(x,z)\!) \to y=z,\; p_1(\!(x,y)\!), p_1(\!(x,z)\!) \to y=z,\; \exists x[p_0(\!(x,y)\!), p_1(\!(x,z)\!)]\,) \quad . \blacksquare$$

3. LEMMA Van olyan rekurzív $\mathfrak{g} : Fm_\omega^2 \to RAT$ függvény, melyre az alábbi (i) - (ii) teljesül:

(i) $\mathfrak{g}(R(x,y)) = R$ minden $R \in \mathcal{R}$-re, és

$$\mathfrak{g}(\neg\varphi) = -\mathfrak{g}\varphi, \quad \mathfrak{g}(\varphi\wedge\psi) = (\mathfrak{g}\varphi)\cdot(\mathfrak{g}\psi), \quad \mathfrak{g}(\varphi\vee\psi) = (\mathfrak{g}\varphi)+(\mathfrak{g}\psi).$$

(ii) A $\mathfrak{g}$ függvény jelentéstartó (π mellett ha $\varphi \notin Fm_3^2$), azaz: Legyen $\mathfrak{M}$ egy modell, $a,b \in M$ és $\varphi \in Fm_\omega^2$. Akkor

$$\mathfrak{M} \models \varphi[a,b] \iff (a,b) \in (\mathfrak{g}\varphi)^{\mathcal{R}(M)}(\langle R^{\mathfrak{M}} : R \in \mathcal{R}\rangle),$$

ha $\varphi \in Fm_3^2$ vagy $\mathfrak{M} \models \pi$.

A 3.L-t alább bizonyítjuk (vázlatosan), mert a II. fejezetben lényegesen építünk erre a lemmára.

A 3.Lemma bizonyítása: A 3.L-t a következő három segédállításon keresztül látjuk be:

3.1. Segédállítás Van rekurzív $f : Fm^2_\omega \to Fm^2_3$, hogy $\pi \models \varphi \leftrightarrow f\varphi$, minden $\varphi \in Fm^2_\omega$-ra.

3.2. Segédállítás Van rekurzív $r : Fm^2_3 \to RAT$, hogy minden $\mathfrak{M}$ modellre és $\varphi \in Fm^2_3$-ra
$(r\varphi)^{\mathcal{R}(M)}(\langle R^{\mathfrak{M}} : R \in \mathcal{R}\rangle) = \{(a,b) \in {}^2M : \mathfrak{M} \models \varphi[a,b]\}$.

3.3. Segédállítás Ha van rekurzív $g : Fm^2_\omega \to RAT$, mely teljesíti 3.L (ii)-t, akkor van olyan rekurzív $g : Fm^2_\omega \to RAT$ is, mely teljesíti 3.L (i) és (ii) -t.

A 3.1.SÁ bizonyítása: Jelölje Fm'_3 azt a (szokásos értelemben vett) elsőrendű nyelvet, melyben a binér $R \in \mathcal{R}$ relációjeleken kívül van két unér függvényjel is, $\bar{p}_0$, $\bar{p}_1$; melyben x,y,z a változójelek és melyben nemcsak szigorú atomi formulák vannak, hanem pl. $R(y,x)$ és $\bar{p}_0(x)=z$ is atomi formulák. Legyen $\pi_p \overset{d}{=} \pi \wedge \bigwedge\{p_i \leftrightarrow \bar{p}_i(x)=y : i \in 2\}$ (emlékezzünk rá, hogy $p_0, p_1 \in Fm^2_3 \subseteq Fm'_3$). A következőkben $\models_p$ azt az érvényességrelációt jelöli, melynél $\bar{p}_0, \bar{p}_1$ parciális függvények (tehát "$\bar{p}_i(a)=b$" azt jelenti, hogy $\bar{p}_i$ definiálva van a-n és $(a,b) \in \bar{p}_i$). Először megmutatjuk, hogy van rekurzív $f' : Fm^2_\omega \to Fm'^2_3$ hogy $(\forall \varphi \in Fm^2_\omega)\ \pi_p \models_p \varphi \leftrightarrow f'\varphi$. Van algoritmus, mely minden $\psi \in Fm^2_\omega$ formulához hozzárendeli a $pr(\psi)$ prenex normál alakot, ahol $\models \psi \leftrightarrow pr(\psi)$ és $pr(\psi)$ $Q\varphi(x,y)$ alakú, ahol Q egzisztenciális kvantorok és negációjelek sorozata, minden változójel csak egyszer fordul elő Q-ban, x,y,z nem fordul elő Q-ban, $\varphi(x,y)$ kvantormentes, és x,y-on kívül csak a Q-ban előforduló változójelek fordulnak elő $\varphi(x,y)$-ban. Legyen $\psi \in Fm^2_\omega$, és $pr(\psi)$ legyen $Q\varphi(x,y)$ alakú a fenti tulajdonságokkal. Legyen w egy változójel. Akkor $\varphi(x,\bar{p}_0y,w/\bar{p}_1y)$ azt a formulát jelöli, melyet úgy kapunk $\varphi(x,y)$-ból, hogy y-t ill. w-t mindenütt $\bar{p}_0y$ ill. $\bar{p}_1y$-ra cseréljük ki. Legyen Q $\nu\exists wQ'$ alakú, ahol ν negációjelek (esetleg 0 hosszú) sorozata. Nem nehéz ellenőrizni, hogy

(1) $\pi_p \models_p \nu\exists wQ'\varphi(x,y) \leftrightarrow \nu\exists z(\bar{p}_0z=y \wedge \exists y[y=z, Q'\varphi(x,\bar{p}_0y,w/\bar{p}_1y)])$.

Használva a fenti (1) -et, nem nehéz a kívánt $f' : Fm^2_\omega \to Fm'^2_3$ függvény létezését belátni. Ezután használva az alábbi (2)-(7) állításokat, nem nehéz megszabadulni a $\bar{p}_0, \bar{p}_1$ függvényjelektől és a nem-szigorú atomi formuláktól – ezzel a kívánt $f : Fm^2_\omega \to Fm^2_3$ -at megkapjuk (használjuk azt is, hogy $\pi \models \varphi \leftrightarrow \pi_p \models_p \varphi$, minden $\varphi \in Fm_\omega$-ra). Legyen τ, σ a $\bar{p}_0, \bar{p}_1$ véges (esetleg 0 hosszú) sorozata, legyen $u,v,w \in \{x,y,z\}$, $w \notin \{u,v\}$, $R \in \mathcal{R}$ és $i \in 2$. Akkor

(2) $\pi_p \models_p R(\tau u, \sigma v) \leftrightarrow \exists w[\bar{p}_0 w = \tau u, \bar{p}_1 w = \sigma v, R(\bar{p}_0 w, \bar{p}_1 w)]$

(3) $\pi_p \models_p R(\bar{p}_0 w, \bar{p}_1 w) \leftrightarrow \exists uv[u = \bar{p}_0 w, v = \bar{p}_1 w, R(u,v)]$, ha $|\{u,v\}| = 2$

(4) $\pi_p \models_p \tau u = \sigma v \leftrightarrow \exists w[\bar{p}_0 w = \tau u, \bar{p}_1 w = \sigma v, \bar{p}_0 w = \bar{p}_1 w]$

(5) $\pi_p \models_p \bar{p}_i u = \tau v \leftrightarrow \exists w[w = \bar{p}_i u, w = \tau v]$

(6) $\pi_p \models u = \bar{p}_i \tau v \leftrightarrow \exists w[p_i(\!(w,u)\!), w = \tau v]$

(7) $\pi_p \models R(u,v) \leftrightarrow \varrho(\!(u,v)\!)$, ahol $\varrho = R(x,y)$. QED(3.1.SÁ)

<u>A 3.2.SÁ' bizonyítása:</u> Legyen $t : \underset{\sim}{RAT} \to \mathfrak{Ro}\mathfrak{r}'\mathfrak{Fm}_3$ olyan, hogy $t(R) = R(x,y)$ minden $R \in \mathcal{R}$-re. Legyen $\mathcal{H} \overset{d}{=} \{X \subseteq {}^3RAT : |X| < \omega\}$. Először olyan rekurzív $\varrho : Fm_3 \to \mathcal{H}$ függvényt definiálunk, melyre igaz az alábbi[*/] (i)-(ii), minden $\varphi \in Fm_3$-ra:

(i) $\models \varphi \leftrightarrow \bigvee\{t\tau(\!(x,y)\!) \wedge t\sigma(\!(x,z)\!) \wedge t\delta(\!(z,y)\!) : (\tau,\sigma,\delta) \in \varrho\varphi\}$.

$$\begin{tikzcd} & y & \\ x \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "\sigma"'] & & z \arrow[ul, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

(ii) Ha $\varphi \in Fm^2_3$, akkor $\varrho\varphi = \{(\tau,1,1)\}$ valamely $\tau \in RAT$-ra.

Ha megvan a fenti ϱ, akkor definiáljuk $r : Fm^2_3 \to RAT$ -ot úgy, hogy $\varrho\varphi = \{(r\varphi,1,1)\}$ minden $\varphi \in Fm^2_3$-ra. Ekkor nem nehéz leellenőrizni, hogy r teljesíti a kívánt tulajdonságokat.

Boole algebrákban Σ és Π a szuprémumot és az infimumot jelöli (tehát pl. $\Sigma\{\tau,\sigma,\delta\} = \tau+\sigma+\delta$).

---

*/ Az (i)-ről ld. a 3.6-t követő 4.Mj-t.

ϱ-t a következő (1) - (7) segítségével definiáljuk:

(1) $\varrho(R(x,y)) \stackrel{d}{=} \{(R,1,1)\}$ minden $R\in\mathcal{R}$-re.

(2) $\varrho(v=v) \stackrel{d}{=} \{(1,1,1)\}$ minden $v\in\{x,y,z\}$-re,
$\varrho(x=y) \stackrel{d}{=} \varrho(y=x) \stackrel{d}{=} \{(1',1,1)\}$,
$\varrho(x=z) \stackrel{d}{=} \varrho(z=x) \stackrel{d}{=} \{(1,1',1)\}$,
$\varrho(y=z) \stackrel{d}{=} \varrho(z=y) \stackrel{d}{=} \{(1,1,1')\}$.

(3) $$\varrho(\varphi\vee\psi) \stackrel{d}{=} \begin{cases} (\varrho\varphi)\cup(\varrho\psi) & \text{ha } \varphi\vee\psi\notin Fm_3^2 \\ \{(\Sigma\{h_0 : h\in\varrho\varphi\cup\varrho\psi\},1,1)\} & \text{ha } \varphi\vee\psi\in Fm_3^2 \end{cases}.$$

(4) $$\varrho(\neg\varphi) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \{(\Pi\{-h_0 : h\in H_0\},\Pi\{-h_1 : h\in H_1\},\Pi\{-h_2 : h\in H_2\}) : H_0,H_1,H_2 \text{ a } \varrho\varphi \text{ partíciója}\}, & \text{ha } \varphi\notin Fm_3^2 \\ \{(-\tau,1,1)\} \quad \text{ha } \varphi\in Fm_3^2 \text{ és } \varrho\varphi=\{(\tau,1,1)\}. \end{cases}$$

(5) $$\varrho(\exists z\varphi) \stackrel{d}{=} \{(\Sigma\{h_0\cdot(h_1;h_2) : h\in\varrho\varphi\},1,1)\}$$

(6) $$\varrho(\exists x\varphi) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \{(1,1,\Sigma\{h_2\cdot(h_1^{\smile};h_0) : h\in\varrho\varphi\})\} & \text{ha } \varphi\notin Fm_3^2 \\ \{(1;\Sigma\{h_2\cdot(h_1^{\smile};h_0) : h\in\varrho\varphi\},1,1)\} & \text{ha } \varphi\in Fm_3^2 \end{cases}$$

(7) $$\varrho(\exists y\varphi) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \{(1,\Sigma\{h_1\cdot(h_0;h_2^{\smile}) : h\in\varrho\varphi\},1)\} & \text{ha } \varphi\notin Fm_3^2 \\ \{((\Sigma\{h_1\cdot(h_0;h_2^{\smile}) : h\in\varrho\varphi\};1,1,1)\} & \text{ha } \varphi\in Fm_3^2 \end{cases}.$$

Nem nehéz leellenőrizni, hogy a fenti (1) - (7) segítségével definiált $\varrho : Fm_3 \to \mathcal{H}$ függvény teljesíti (i)-(ii) -t. QED(3.2.SA')

A 3.3.SA' bizonyítása: Legyen $g' : Fm_\omega^2 \to RAT$ olyan, mely teljesíti a 3.L-beli (ii)-t. Definiáljuk $g : Fm_\omega^2 \to RAT$ -ot a következőképpen:

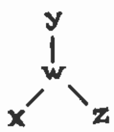
$g(R(x,y)) \stackrel{d}{=} R$ minden $R\in\mathcal{R}$ -re,

$g(\neg\varphi) \stackrel{d}{=} -g\varphi$, $g(\varphi\wedge\psi) \stackrel{d}{=} (g\varphi)\cdot(g\psi)$, $g(\varphi\vee\psi) \stackrel{d}{=} (g\varphi)+(g\psi)$ minden $\varphi,\psi \in Fm_\omega^2$ -ra,

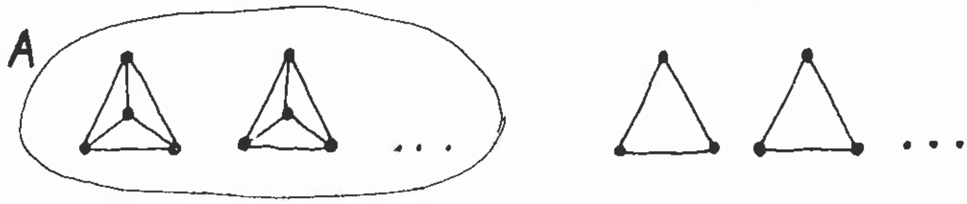
$g(\psi) \stackrel{d}{=} g'(\psi)$, ha ψ nem a fenti alakú, $\psi\in Fm_\omega^2$.

Most, nyilvánvalóan g rekurzív és teljesíti a 3.L-beli (i) és (ii)-t.
QED(3.3.SA') QED(3.Lemma)

<u>4. MEGJEGYZÉS</u> A 3.2.SA′ bizonyításában levő (i) állítás azt mondja, hogy minden $\varphi \in Fm_3$ "felbontható" az xy, xz, zy -ról szóló (azaz Fm_3^2, $Fm_3^{\{0,2\}}$ és $Fm_3^{\{1,2\}}$-beli) formulák Boole kombinációjává. Ha négy változójel van a nyelvben (de csak kétváltozós relációjelek), akkor ez már nincs így: pl. a $\exists w(R(\!(x,w)\!), R(\!(y,w)\!), R(\!(z,w)\!))$ formula nem bontható fel az előbbi módon (itt $w \overset{d}{=} v_3$).



Ez részletesen bizonyítva van [N85a]-ban. Sőt, az I.11.T bizonyítása is ezen alapszik. Röviden vázoljuk az I.11.T bizonyításának gondolatmenetét.: Tekintsük a következő (szimmetrikus) R relációt: (R az egyes vonalak halmaza)



Azaz, végtelen sok "középpel rendelkező háromszög" és végtelen sok "közép nélküli háromszög" -ből áll az R . Legyen A a "közepes" háromszögek pontjainak halmaza. Akkor az A halmaz RA-beli műveletekkel nem definiálható (R-ből), míg CA_4-beli műveletekkel (azaz négy változójellel) definiálható. Ez azonban nem elég, az igazi nehézség az, hogy ezt a tényt izomorfia erejéig "láthatóvá" kell tenni. Ezért minden pontot konstansnak tekintünk. Ekkor az ezek által (és R -el) generált RA -ban a konstansoknak csak véges és kovéges szuprémumai léteznek, míg minden, ezt az RA-t tartalmazó $\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{L}$ -ben ($\mathfrak{L} \in CA_4$) van egy nem-ilyen szuprémum is, nevezetesen az A halmaznak megfelelő. A fenti gondolat részletesen ki van dolgozva [N85a]-ban. ∎

$$QRA \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} \in RA \ : \ (\exists p,q \in A)\left[p^{\cup};p + q^{\cup};q \ \leq \ 1' \ , \ p^{\cup};q = 1\right]\} .$$

Azt mondjuk, hogy p és q projekció-párt alkot $\mathfrak{A}$-ban, ha teljesül rájuk a fenti feltétel. $\mathfrak{A}$ kvázi-projektív RA, ha $\mathfrak{A} \in QRA$.

<u>5. LEMMA</u> (Tarski[T53a]) $QRA \subseteq RRA$. ∎

Az 5.L egy reprezentációtétel. Algebrai logikában a reprezentáció tételek általában teljességi tételeknek felelnek meg (ld. pl. [HMT] 4.3.24). Valóban, Tarski eredeti bizonyítása az 5.L-ra egy logikai teljességi tétel bizonyításával történt, logikai eszközökkel (ld. 18.Mj(iv)). Később Maddux [Ma78a] adott az 5.L-ra egy szép, egyszerű, tisztán algebrai szellemű bizonyítást - ezzel a Tarski által használt logikai tételnek is adott egy egyszerűbb, áttekinthetőbb bizonyítást. (Hasonló módon adtunk mi is egyszerű algebrai bizonyítást a klasszikus elsőrendű logika teljességi tételére [AN75]-ben.)

Idézzük fel, hogy a Gödel nem-teljességi tétel (egyik formája) azt mondja ki, hogy van konzisztens elsőrendű φ formula, mely nem terjeszthető ki rekurzív, teljes és konzisztens T elméletté, azaz minden rekurzív T-re, ha $\varphi \in T$ és T konzisztens (azaz $T \nvdash \mathbf{F}$), akkor van φ, hogy $T \nvdash \varphi$ és $T \nvdash \neg\varphi$. Idézzük fel, hogy egy Boole algebra atomos, ha minden eleme alatt van atom; egy $\mathcal{B}$ Boole algebrában $a \in B$ atom, ha $a \neq 0$ és $(\forall b \in B)(a \leq b$ vagy $a \leq -b)$. A fenti megfogalmazásokból érezhető, hogy erős kapcsolat van a Gödel nem-teljességi tétel és az $\mathfrak{Fm}_\omega/\equiv$ formula-algebra nem-atomossága között. E kapcsolat részletesen vizsgálva van [N85d]-ben. Itt a II. fejezetben mi csak azt bizonyítjuk, hogy $\mathfrak{Fr}_1 CA_3$ nem atomos, de [N85d]-ben bizonyítottuk azt a kissé erősebb állítást is, hogy a Gödel nem-teljességi tétel megfelelője fennáll a háromváltozós logikára is. Megjegyezzük, hogy mivel a háromváltozós logika nem-teljes, a Gödel nem-teljességi tétel analogonjának bizonyításakor szemantikusan ellentmondásos T elméletekkel is dolgozni kellett.

A II.3 fejezetben most következő bizonyítás lényegéről: A [TG]-beli eredményeket felhasználva*/, a II.1 fejezetben lévő (*) állításhoz lényegében csak a relációkompozíció asszociativitását kellett valahogy mégis "visszahozni". Pongyolán szólva, az asszociativitás bizonyításához azért kell négy változójel, mert "kettőt lefoglalnak a relációk" és kell még legalább kettő "dolgozó-rekesz". A fő ötlet bizonyításunkban az, hogy a projekció-függvények segítségével a kétargumentumú relációkat "összenyomjuk" egyváltozóssá, így 3 változójel esetén is marad még két segédváltozó. Arra kell azonban vigyázni, hogy a számolások során is, minden egyes lépésben mindig maradjon még két segéd-változó. Ez a második cél az, amibe az energiát fektetni kell (hiszen egy "jelentéstartó" $f : Fm^2_\omega \to Fm^1_3$ függvényt nem nehéz definiálni).

---

*/ A 18.Mj-ben megmutatjuk, hogy hogyan néz ki egy direkt, a [TG]-beli eredményekre nem támaszkodó bizonyítás.

II.3. A tétel kimondása, bizonyítása és diszkutálása.

1. FŐTÉTEL $\mathfrak{Fr}_1 CA_3$ nem atomos.

Később, a 14. Tételben az 1. Főtételnél többet bizonyítunk. Azért korlátozódtunk az 1. Főtétel kimondásában a $\beta=1$ és $\alpha=3$ esetre, mert ez az igazán nehéz eset.

Rátérünk az 1. Főtétel bizonyítására. Minden, ami e fejezetben a diszkussziókig (15.T) található, az 1. Főtétel bizonyításához tartozik. A bizonyítást egyéb tételek és definiciók kimondása és bizonyítása során végezzük.

Legyen $\Lambda = \langle 3, t \rangle$ egy tetszőleges nyelv. Rögzítsünk két formulát, $p_0, p_1 \in Fm_3^{\Lambda,2}$ -t. (Úgy fogunk erre a két formulára tekinteni, mint a két projekció-függvény definiciójára.) Mostantól fogva, a II. fejezeten végig, ez a két formula rögzítve lesz. Ez a két formula, p_0 és p_1, paramétere lesz sok, a II. fejezetben definiált fogalomnak, pl. a most következő $x_i = y_j$ formula definiciójának is. Az egyszerűbb jelölésmód érdekében azonban nem tüntetjük fel a jelölésekben, hogy p_0, p_1 paraméter.

2^{*} jelöli a 0,1 -ből álló véges hosszú sorozatok halmazát, beleértve a 0 hosszú $\langle\rangle$ sorozatot is. Ha $i, j \in 2^{*}$, akkor ij -vel jelöljük azt a sorozatot, melyet az i, j egymásután való írásakor kapunk (ezt gyakran $i^\frown j$ -vel is jelölik az irodalomban), és $|i|$ jelöli az i sorozat hosszát. Ha $k \in 2$, akkor gyakran csak "k" -t írunk a $\langle k \rangle$ 1-hosszú sorozat helyett. Ennek megfelelően pl. 00 -val fogjuk jelölni a $\langle 0,0 \rangle$ sorozatot is.

Legyen $i, j \in 2^{*}$, mondjuk $i = \langle i_0, \dots, i_n \rangle$ és $j = \langle j_0, \dots, j_k \rangle$, és legyen $u, v \in \{x, y, z\}$. Az alábbiakban definiálni fogjuk az "$u_i = v_j$" formulát, a következő intuitív jelentéssel: Ha p_0, p_1 parciális (unér) függvényt jelent egy $\mathfrak{M}$ modellben, akkor "$u_i = v_j$" azt jelenti $\mathfrak{M}$-ben, hogy "$p_{i_n}^{\mathfrak{M}} \dots p_{i_0}^{\mathfrak{M}} u = p_{j_k}^{\mathfrak{M}} \dots p_{j_0}^{\mathfrak{M}} v$", ahol $p_k^{\mathfrak{M}}$ $(k \in 2)$ a p_0 ill. p_1 által jelölt unér függvény $\mathfrak{M}$-ben. (Pl. $x_0 = y_{01}$ azt jelenti, hogy $p_0 x = p_1 p_0 y$.)

6. DEFINICIÓ

(i) Legyen $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$ és $i,j\in 2^*$, $k\in 2$.

$u_{<>}=v_{<>} \overset{df}{\iff} u=v$.

A későbbiekben $u_i=v_{<>}$ és $u_{<>}=v_j$ helyett csak $u_i=v$ -t ill. $u=v_j$ -t írunk.

$u_k=v \overset{df}{\iff} v=u_k \overset{df}{\iff} p_k(\!(u,v)\!)$.

$u_{ik}=v \overset{df}{\iff} v=u_{ik} \overset{df}{\iff} \exists w(u_i=w, w_k=v)$ ha $i\neq <>$,

$u_i=v_j \overset{df}{\iff} \exists w(u_i=w, v_j=w)$ ha $i\neq <> \neq j$.

$x_i=x_j \overset{df}{\iff} \exists y(x=y, x_i=y_j)$,

$y_i=y_j \overset{df}{\iff} \exists x(x=y, x_i=y_j)$,

$z_i=z_j \overset{df}{\iff} \exists xy(x=y, y=z, x_i=y_j)$.

Ezzel az "$u_i=v_j$" formula definiálva lett, minden $u,v\in\{x,y,z\}$ és $i,j\in 2^*$ esetén.

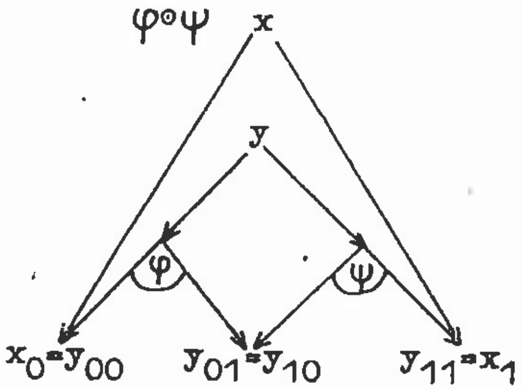
(ii) $Ax' \overset{d}{=} \{ (u_i=v_j, v_j=w_k \rightarrow u_i=w_k), (u_i=u_i, v_j=v_j \rightarrow \exists w(w_0=u_i, w_1=v_j))$: $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$, $i,j\in 2^*$, $|i|, |j|, |k| \leq 3\}$.

Vegyük észre, hogy $Ax'\subseteq Fm_3$ <u>véges</u> formulahalmaz.

$Ax \overset{d}{=} \forall xyz \wedge Ax'$. Tehát $Ax\in Fm_3^{\wedge,0}$. ■

<u>7. MEGJEGYZÉS</u> (i) Mivel a p_0,p_1-ről csak azt fogjuk feltenni, hogy <u>parciális</u> (és nem feltétlenül totális) unér függvényt jelentenek, "$u_i=u_i$" annak kifejezése, a parciális algebrák elméletében szokásos módon, hogy "u_i" definiálva van. Ennek megfelelően, később majd belátjuk, pl., hogy $Ax\vdash_3 (u_i=u_i \leftrightarrow \exists w(u_i=w))$, ahol $i\in 2^*$, $|i|\leq 3$ és $|\{u,w\}|=2$, $u,w\in \{x,y,z\}$.

(ii) Ax a π-nek egy átfogalmazása: könnyen látható, hogy $\models \pi\leftrightarrow Ax$. Azonban, mint később látni fogjuk, $\not\vdash_3 \pi\leftrightarrow Ax$, nevezetesen $\not\vdash_3 \pi\rightarrow Ax$ (ld. 15.T(i)), míg $\vdash_3 Ax\rightarrow\pi$. Mint a hamarosan következő 9.T-ből is látható, Ax egy olyan átfogalmazása π-nek, hogy Ax -ből már sok minden $\vdash_3$ -bizonyítható (ami π -ből még nem $\vdash_3$ -bizonyítható). Nagyon lényeges lesz később, hogy $Ax\in Fm_3^{\wedge,0}$, vagyis, hogy Ax' véges. ■



1. ÁBRA

(A $\varphi\circ\psi$ illusztrációja.)

Készen vagyunk arra, hogy definiáljuk a reláció-műveleteket az egyváltozós formulákon.

8. DEFINICIÓ Legyen $\varphi,\psi \in Fm_3^{\wedge,1}$.

(i) $\varphi u_i \overset{df}{\iff} \exists x(x=u_i,\ \varphi)$ ha $u\in\{y,z\}$ és $i\in 2^*$, és

$\text{pár}(x) \overset{d}{=} \exists y p_0(\!(x,y)\!) \wedge \exists y p_1(\!(x,y)\!)$.

(ii) $\varphi\circ\psi \overset{df}{\iff} \exists y(\varphi y_0, \psi y_1, x_0=y_{00}, y_{01}=y_{10}, y_{11}=x_1)$, ld. az 1.ábrát a túloldalon!

$\varphi^{\smile} \overset{df}{\iff} \exists y(\varphi y, y_0=x_1, y_1=x_0)$,

$\varepsilon \overset{df}{\iff} x_0=x_1$,

$\dot{1} \overset{df}{\iff} \text{pár}(x)$, $\dot{0} \overset{df}{\iff} \mathbf{F}$,

$\dot{-}\varphi \overset{df}{\iff} \text{pár}(x) \wedge \neg\varphi$,

$\varphi+\psi \overset{df}{\iff} \varphi\vee\psi$, $\varphi\cdot\psi \overset{df}{\iff} \varphi\wedge\psi$.

(iii) $Ev^{\wedge} \overset{d}{=} Ev \overset{d}{=} \{\varphi\in Fm_3^{\wedge,1} : Ax \vdash_3 \varphi \leftrightarrow \varepsilon\circ\varphi\}$, $\mathcal{E}v^{\wedge} \in RTA$,

$\mathcal{E}v^{\wedge} \overset{d}{=} \mathcal{E}v \overset{d}{=} \langle Ev, +, \cdot, \dot{-}, \dot{0}, \dot{1}, \circ, ^{\smile}, \varepsilon \rangle$. ■

A II. fejezet "szíve" a következő 9.T (ii) pontja.

9. TÉTEL (i) $\mathcal{E}v$ algebra, azaz a $\circ$, $^{\smile}$, ε stb. műveletek nem vezetnek ki Ev -ből; és $\equiv_{Ax}$ kongruencia $\mathcal{E}v$ -n. Továbbá $Ev \supseteq \{\varphi\circ\psi : \varphi,\psi \in Fm^{\wedge,1}\}$.

(ii) $\mathcal{E}v/_{\equiv_{Ax}} \in RA$, sőt $\mathcal{E}v/_{\equiv_{Ax}}$ reprezentálható reláció-algebra.

Bizonyítás: Mivel a jelen bizonyításban sok $\vdash_3$ -levezetés megadására lesz szükségünk, néhány kényelmi megállapodást teszünk $\vdash_3$ -levezetések leírására.

A $\vdash_3$ bizonyítási rendszer következő 3 lényeges tulajdonságára fogunk támaszkodni:

(CA) $\mathfrak{Fm}_3^{\wedge}/{\equiv_{Ax}} \in CA_3$.

(SZ) $\vdash_3 \varphi \leftrightarrow \exists v\varphi$, ha $v \notin szv(\varphi)$.

(D) Ha $\varphi \vdash_3 \psi$ a (G) használata nélkül, akkor $\vdash_3 \varphi \rightarrow \psi$. (Dedukciós tétel.)

A gyakori használat miatt (előre bizonyítjuk és) nevet adunk (CA), (SZ), (D) következő következményeinek:

(SZV) $\vdash_3 (\exists v\varphi)\wedge\psi \leftrightarrow \exists v(\varphi\wedge\psi)$, ha $v \notin szv(\psi)$.

(UV) $\vdash_3 \varphi \leftrightarrow \exists w(v{=}w \wedge \varphi)$, ha $w \notin szv(\varphi)$ és

$\vdash_3 \exists v\varphi \leftrightarrow \exists w\exists v(v{=}w\wedge\varphi)$, ha $w \notin szv(\varphi)$.

(KV) Ha $\vdash_3 \varphi \rightarrow \psi$, akkor $\vdash_3 \exists v\varphi \rightarrow \exists v\psi$.

(Rendre a "<u>sz</u>abad <u>v</u>áltozó", "<u>ú</u>j <u>v</u>áltozó" és "<u>k</u>ötött <u>v</u>áltozó" rövidítései.)

A (CA) tulajdonság [HMT]4.3.22-ként van kimondva és bizonyítva. A (SZ) tulajdonságot a következőképpen lehet belátni: Legyen $i \in 3$ tetszőleges. Ekkor $\vdash_3 \varphi \rightarrow \exists \mathbf{v}_i\varphi$ a (CA) miatt, hiszen $CA_3 \models x \leq c_i x$, emiatt $\mathfrak{Fm}_3^{\wedge}/{\equiv} \models (\varphi/{\equiv}) \leq (\exists\mathbf{v}_i\varphi/{\equiv})$, vagyis $\mathfrak{Fm}_3^{\wedge}/{\equiv} \models [(\varphi/{\equiv}) \rightarrow (\exists\mathbf{v}_i\varphi/{\equiv})]=1$ (mert minden $\mathcal{B}$ Boole algebrára és $b,a \in B$ -re igaz, hogy $[\mathcal{B} \models a \leq b \iff \mathcal{B} \models (a\rightarrow b)=1]$ ahol $a \rightarrow b \overset{d}{=} -a+b$), ez pedig azt jelenti, hogy $\vdash_3 \varphi \rightarrow \exists\mathbf{v}_i\varphi$. Mielőtt folytatnánk (SZ) bizonyítását, megjegyezzük, hogy ez egyben illusztráció is volt a (CA) használatára. A későbbiekben nem fogjuk ilyen részletesen kiírni ezeket a lépéseket, csak utalunk (CA) -ra, esetleg odaírjuk, hogy mely azonosságra gondolunk. Pl. a fenti meggondoláshoz hasonlóan, $CA_3 \models d_{01}\cdot d_{02} \leq d_{12}$ -ből arra fogunk következtetni, hogy

$\vdash_3 x=y \wedge x=z \rightarrow y=z$. Tfh. $v \notin szv(\varphi)$. Ekkor $v \notin szv(\neg\varphi)$ és így ⟪4⟫ szerint $\vdash_3 \neg\varphi \rightarrow \forall v \neg\varphi$, ebből ⟪1⟫,(MP) -vel kapjuk, hogy $\vdash_3 \neg\forall v \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$, ekkor ⟪9⟫,⟪1⟫ és (MP) -vel $\vdash_3 \exists v\varphi \rightarrow \varphi$. Tehát (SZ) -t beláttuk. Mivel $\vdash_3$ teljesen szokásos Hilbert-tipusú bizonyítási rendszer, azért nem nehéz belátni, hogy (D) teljesül. Egyébként ez meg is van említve [HMT]-ben, ld. p.161_4. (D) -t a későbbiekben "dedukciós tételnek" is fogjuk hívni. (KV) következik $CA_3 \models x \leq y \rightarrow c_i x \leq c_i y$ -ból. (SZV) bizonyítása: $(\exists v\varphi)\wedge\psi \vdash_3 (\exists v\varphi)\wedge(\exists v\psi)$, (SZ) és ⟪1⟫,(MP) -vel $(\exists v\varphi)\wedge(\exists v\psi) \vdash_3 \exists v(\varphi \wedge \exists v\psi)$, mivel $CA_3 \models c_i x \cdot c_i y = c_i(x \cdot c_i y)$, $\exists v(\varphi \wedge \exists v\psi) \vdash_3 \exists v(\varphi\wedge\psi)$, (SZ) és (KV) -vel. A (D) szerint ekkor $\vdash_3 (\exists v\varphi)\wedge\psi \rightarrow \exists v(\varphi\wedge\psi)$. A másik irányt, $\vdash_3 \exists v(\varphi\wedge\psi) \rightarrow (\exists v\varphi)\wedge\psi$ -t, teljesen hasonlóan kapjuk. (SZV) -t beláttuk. (UV) bizonyítása: Legyen $w \notin szv(\varphi)$. Ekkor $\varphi \vdash_3 \exists w\varphi$ (SZ) -vel (és ⟪1⟫,(MP) -vel), $\exists w\varphi \vdash_3 \exists w(v=w, \exists w\varphi)$, mert $CA_3 \models c_i x = c_i(d_{ji} \cdot c_i x)$, ebből (SZ) és (D) -vel kapjuk, hogy $\vdash_3 \varphi \rightarrow \exists w(v=w,\varphi)$. A másik irány: $\exists w(v=w,\varphi) \vdash_3 \exists w\varphi$ az ⟪1⟫,(MP) és (KV) -vel, ebből (SZ) és (D) -vel kapjuk, hogy $\vdash_3 \exists w(v=w,\varphi) \rightarrow \varphi$. Tehát (UV) első állítását beláttuk. Ebből (KV) -vel és (CA) -val kapjuk a második állítást azt használva, hogy $CA \models C_4$. Ezzel beláttuk, hogy a (CA),...,(KV) tulajdonságok teljesülnek.

A (SZ) -vel kapcsolatban gyakran fogjuk használni a következő (*) állítást, melyet nem nehéz ellenőrizni:

(*) Legyen $\varphi \in Fm_3^{\wedge,1}$, $u,v \in \{x,y,z\}$ és $i,j \in 2^*$. Akkor
$szv(\varphi u_i) = \{u\}$ és $szv(u_i=v_j) = \{u,v\}$.

A $\vdash_3$ -levezetéseket az alábbiakban a következőképpen fogjuk prezentálni:

$\varphi_1 \vdash_3 \quad m_1$

$\vdots$

$\varphi_n \vdash_3 \quad m_n$

φ_{n+1}.

Itt $\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1}$ formula, úgy, hogy $\varphi_1 \vdash_3 \varphi_2,\dots, \varphi_n \vdash_3 \varphi_{n+1}$ ..., m_n "magyarázat", úgy, hogy m_1 azt magyarázza, hogy $\varphi_1 \vdash_3 \varphi_2$ 1 fenn, stb. A "magyarázatokban" használni fogjuk a fenti (CA),...,(KV) -t, (CA) -t néha olyan alakban, hogy pl. $CA_3 \models d_{01} \cdot d_{02} \leq d_{12}$; már bizonyított állításokat, vagy Ax' egy bizonyos elemét. Néha abból, hogy $\hat{\mathfrak{Fm}}_3/\equiv_{Ax} \in CA_3$ csak azt használjuk, hogy $\hat{\mathfrak{Fm}}_3/\equiv_{Ax} \in BA$, ilyenkor (CA) helyett azt írjuk, hogy (BA) . (Ez ekvivalens azzal, hogy (1) és (MP) -t használjuk.) A .(D) használatát sosem, a (KV) használatát majdnem sosem és a (CA) használatát gyakran nem írjuk ki.

A fenti megállapodásokat használva, (SZV) bizonyítása pl. a következően néz ki:

$(\exists v\varphi)\wedge\psi \ \vdash_3$ (SZ), (BA)
$(\exists v\varphi)\wedge(\exists v\psi) \ \vdash_3$ $CA_3 \models c_i x \cdot c_i y = c_i(x \cdot c_i y)$
$\exists v(\varphi \wedge \exists v\psi) \ \vdash_3$ (SZ), (KV)
$\exists v(\varphi\wedge\psi)$.

Az utolsó lépésben pl. (SZ) és (KV) mellé nem írtuk ki (BA) -t, pedig azt is használtuk.

Rátérünk a 9.T bizonyítására. A bizonyításban $\vdash$ -t írunk $\vdash_3$ helyett (a gyakori előfordulás miatt).

Legyen $H \overset{d}{=} \{i \in 2^* : |i| \leq 3\}$. Bizonyos formulasémáknak nevet adunk, pl.

(A1) $u_i = v_j, v_j = w_k \to u_i = w_k$, ha $\{u,v,w\} = \{x,y,z\}$ és $i,j,k \in H$.

(A2) $u_i = u_i, v_j = v_j \to \exists w(w_0 = u_i, w_1 = v_j)$, ha $\{u,v,w\} = \{x,y,z\}$ és $i,j \in H$.

Tehát Ax' az (A1),(A2) séma uniója.

Első lépésként Ax' -ből levezetjük az alábbi, kényelmesebben használható sémákat, ahol $u,v,w \in \{x,y,z\}$ (tehát u,v,w nem feltétlenül különbözők), $\tau,\sigma,\delta \in \{u_i : u \in \{x,y,z\},\ i \in H\}$ és $i,j,k \in H$, $i\ell, jm, kn \in H$.

$(A0)'$ $\quad u_i=v_j \rightarrow v_j=u_i$

$(A1)'$ $\quad u_i=v_j, v_j=w_k \rightarrow u_i=w_k$

$(A3)'$ $\quad u_i=v_j, u_{i\ell}=\tau \rightarrow u_{i\ell}=v_{j\ell}$, ha $j\ell \in H$.

$(A4)'$ $\quad u_{i\ell}=\tau \rightarrow \exists v(u_i=v)$ ha $v \notin \{u\}$.

$(A2)'$ $\quad u_{i\ell}=\tau, v_{jm}=\sigma \rightarrow \exists w(w_0=u_i, w_1=v_j)$, ha $w \notin \{u,v\}$.

$(A2)''$ $\quad u_{i\ell}=\tau, u_{jm}=\sigma, u_{kn}=\delta \rightarrow \exists w(w_0=u_i, w_{10}=u_j, w_{11}=u_k)$ és

$\quad u_{i\ell}=\tau, u_{jm}=\sigma, u_{kn}=\delta \rightarrow \exists w(w_1=u_i, w_{01}=u_j, w_{00}=u_k)$ ha $w \notin \{u\}$.

$(A0)', (A1)', (A3)'$ -ra úgy fogunk hivatkozni, hogy "szimmetria", "tranzitivitás", "kongruencia".

Rátérünk $(A0)'$ - $(A2)''$ levezetésére. Az alábbiakban, ha nem mondunk semmit, akkor $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$ -t feltételezzük. A gyengébb $u,v,w \in \{x,y,z\}$ feltételt használó sémákat vesszővel jelöljük majd. Továbbá, $i,j,k,\ell,m,n \in H$, és valahányszor leírjuk pl. ik -t, akkor feltételezzük, hogy $ik \in H$. Tehát az ik, $jk \in H$ stb. feltételeket az alábbiakban nem írjuk ki.

$u_i=v_j$ definiciójából közvetlenül belátható, hogy

$(A0)$ $\quad \vdash u_i=v_j \rightarrow v_j=u_i$.

$(S0)$ $\quad Ax \vdash u_i=v_j \rightarrow \exists w(u_i=w, v_j=w)$.:

Mert, ha $i \neq \langle\rangle \neq j$, akkor a definicióból közvetlenül adódik. Egyébként, ha $i=\langle\rangle$ vagy $j=\langle\rangle$, akkor

$u=v_j \vdash$ (UV)
$\exists w(u=w, u=v_j) \vdash$ (AO),(A1)
$\exists w(u=w, v_j=w)$.

$u_i=v \vdash$ (AO)
$v=u_i \vdash$ előző eset
$\exists w(v=w, u_i=w) \vdash$
$\exists w(u_i=w, v=w)$. ⊠

(S1) $Ax \vdash \exists w(u_i=w) \rightarrow \exists v(u_i=v)$.:

$\exists w(u_i=w) \vdash$ (UV)
$\exists v \exists w(w=v, u_i=w) \vdash$ (A1),(SZ)
$\exists v(u_i=v)$. ⊠

(S2) $\vdash u_{ie}=v \leftrightarrow \exists w(u_i=w, w_e=v)$, ha $e \in 2$.:

Ha $i \neq \langle\rangle$, akkor definició szerint igaz. Tfh. $i=\langle\rangle$. Akkor definició szerint $u_e=v \Leftrightarrow p_e(\!(u,v)\!)$ és $w_e=v \Leftrightarrow p_e(\!(w,v)\!)$. A $\varphi(\!(u,v)\!)$ definiciójából (ld. 1.D.(ii)) ellenőrizhető (az esetek végignézésével), hogy

$\vdash (u=w, \varphi(\!(u,v)\!)) \leftrightarrow (u=w, \varphi(\!(w,v)\!))$ így
$\vdash \exists w(u=w, u_e=v) \leftrightarrow \exists w(u=w, w_e=v)$ és (UV) szerint
$\vdash u_e=v \leftrightarrow \exists w(u=w, u_e=v)$. ⊠

(S3) $Ax \vdash u_{ik}=v_j \rightarrow \exists v(u_i=v)$.:

$|k|$-ra vonatkozó indukcióval: Ha $k=\langle\rangle$, akkor

$u_i=v_j \vdash$ (SO),(CA)
$\exists w(u_i=w) \vdash$ (S1)
$\exists v(u_i=v)$.

Tfh. k -ra már igaz az (S3), $e \in 2$ és $ike \in H$. Akkor

$u_{ike}=v_j \vdash$ előző lépés
$\exists v(u_{ike}=v) \vdash$ (S2)
$\exists v \exists w(u_{ik}=w, w_e=v) \vdash$ (CA),(SZ)
$\exists w(u_{ik}=w) \vdash$ indukciós hipotézis
$\exists w(u_i=w) \vdash$ (S1)
$\exists v(u_i=v)$. ⊠

(S4) $Ax \vdash w=u_i, u_{ie}=v \rightarrow w_e=u_{ie}$, ha $e \in 2$.:

$w=u_i, u_{ie}=v \vdash$ (S2),(SZV)
$w=u_i, \exists w(u_i=w, w_e=v, u_{ie}=v) \vdash$ (AO),(A1)
$w=u_i, \exists w(u_i=w, w_e=u_{ie}) \vdash$ (UV)
$\exists v(v=w, w=u_i, \exists w(u_i=w, w_e=u_{ie})) \vdash$ (A1),(SZV)
$\exists v(v=w, \exists w(v=u_i, u_i=w, w_e=u_{ie})) \vdash$ (A1), $CA \models (C_7)'$
$\exists v(v=w, w_e=u_{ie}) \vdash$ (UV)
$w_e=u_{ie}$. ⊠

(S5) $Ax \vdash v_j=w, w_e=u \rightarrow v_{je}=u$, ha $e \in 2$.:

$v_j=w, w_e=u \vdash$ (CA)
$\exists w(v_j=w, w_e=u) \vdash$ (S2)
$v_{je}=u$. ⊠

(A3) $Ax \vdash u_i=v_j, u_{ik}=w \rightarrow u_{ik}=v_{jk}$.:

k -ra vonatkozó indukcióval. Ha $k=\langle\,\rangle$, akkor az állítás triviális. Tfh. $k \in 2$.

$u_i=v_j, u_{ik}=w \vdash$ (SO),(CA)
$\exists w(u_i=w, v_j=w), \exists w(u_{ik}=w) \vdash$ (S1),(SZV)
$\exists w(u_i=w, v_j=w, \exists v(u_{ik}=v)) \vdash$ (SZV),(S4),(AO), (SZ)
$\exists w(u_{ik}=w_k, v_j=w) \vdash$ (AO),(S3),(SZV)
$\exists w(u_{ik}=w_k, \exists u(w_k=u, v_j=w)) \vdash$ (S5)
$\exists w(u_{ik}=w_k, \exists u(v_{jk}=u, v_j=w)) \vdash$ (AO),(S4),(SZ)
$\exists w(u_{ik}=w_k, w_k=v_{jk}) \vdash$ (A1),(SZ)
$u_{ik}=v_{jk}$.

Tfh. (A3) igaz k -ra, $e \in 2$ és $ike \in H$. Akkor

$u_i=v_j, u_{ike}=w \vdash$ (S3)
$u_i=v_j, \exists w(u_{ik}=w), u_{ike}=w \vdash$ (SZV), indukciós hipotézis, (SZ)
$u_{ik}=v_{jk}, u_{ike}=w \vdash$ előző lépés
$u_{ike}=v_{jke}$. ⊠

(S6) $Ax \vdash u=v, u_i=v_j \rightarrow u_j=v_i$.:

$u_i=v_j \vdash$ (S0),(SZV)
$\exists w(u=v, u_i=w, v_j=w) \vdash$ (A3)
$\exists w(u_i=v_i, u_i=w, u_j=v_j, v_j=w) \vdash$ (A1),(A0)
$\exists w(v_i=w, u_j=w) \vdash$ (A0),(A1),(SZ)
$u_j=v_i$. ⊠

(A0)′ $Ax \vdash u_i=v_j \rightarrow v_j=u_i$, ha $u,v \in \{x,y,z\}$.:

(A0) miatt elég azt az esetet nézni, amikor $|\{u,v\}|=1$.

$x_i=x_j \vdash$ definició
$\exists y(x=y, x_i=y_j) \vdash$ (S6)
$\exists y(x=y, x_j=y_i) \vdash$ definició
$x_j=x_i$.

$y_i=y_j \vdash$ definició
$\exists x(x=y, x_i=y_j) \vdash$ (S6)
$\exists x(x=y, x_j=y_i) \vdash$ definició
$y_j=y_i$.

$z_i=z_j \vdash$ definició
$\exists xy(y=z, x=y, x_i=y_j) \vdash$ (S6)
$\exists xy(y=z, x=y, x_j=y_i) \vdash$ definició
$z_j=z_i$. ⊠

(S7) $Ax \vdash u=v, u_i=u_j \rightarrow u_i=v_j$.:

Először megmutatjuk, hogy ha v -re igaz (S7), akkor w -re is:

$u=w, u_i=u_j \vdash$ (UV),(CA)
$\exists v(v=w, u=v, u_i=u_j) \vdash$ hipotézis
$\exists v(v=w, u_i=v_j) \vdash$ (A3),(A1),(SZ)
$u_i=w_j$.

$x=y, x_i=x_j \vdash$ definició
$x=y, \exists y(x=y, x_i=y_j) \vdash$ (CA)
$x_i=y_j$.

$y=x, y_i=y_j \vdash$ (AO)′, definició
$y=x, \exists x(x=y, x_j=y_i) \vdash$ (CA),(AO)
$y_i=x_j$.

$z=x, z_i=z_j \vdash$ (AO)′, definició
$z=x, \exists xy(x=y=z, x_j=y_i) \vdash$ (A3),(A1)
$z=x, \exists xy(x=y=z, x_j=z_i) \vdash$ (CA),(AO),(SZ)
$z_i=x_j$. ⊠

(S8) $Ax \vdash u=v, u_i=v_k \rightarrow u_i=u_k$.:

Ismét, ha (S8) igaz v -re, akkor igaz w -re is.

$x=y, x_i=y_k \vdash$ (CA), definició
$x_i=x_k$.

$y=x, y_i=x_k \vdash$ (AO), definició, (AO)′
$y_i=y_k$.

$z=x, z_i=x_k \vdash$ (CA),(UV)
$\exists xy(x=y=z, z_i=x_k) \vdash$ (A3),(A1)
$\exists xy(x=y=z, y_i=x_k) \vdash$ (AO), definició
$z_k=z_i \vdash$ (AO)′
$z_i=z_k$. ⊠

(S9) $Ax \vdash u_i=u_j, u_j=w_k \rightarrow u_i=w_k$.:

$u_i=u_j, u_j=w_k \vdash$ (UV)
$\exists v(u=v, u_i=u_j, u_j=w_k) \vdash$ (S7),(A3),(A1)
$\exists v(u=v, u_i=v_j, v_j=w_k) \vdash$ (A1)
$\exists v(u=v, u_i=w_k) \vdash$ (UV)
$u_i=w_k$. ⊠

(S10) $Ax \vdash u_i=u_j, u_j=u_k \rightarrow u_i=u_k$.:

$u_i=u_j, u_j=u_k \vdash$ (UV)
$\exists w(u=w, u_i=u_j, u_j=u_k) \vdash$ (S7)
$\exists w(u=w, u_i=u_j, u_j=w_k) \vdash$ (S9)
$\exists w(u=w, u_i=w_k) \vdash$ (S8),(SZ)
$u_i=u_k$. ⊠

(S11) $Ax \vdash u_i=v_j, v_j=u_k \rightarrow u_i=u_k$.:

$u_i=v_j, v_j=u_k \vdash$ (UV),(A3),(A1)
$\exists w(u=w, u_i=v_j, v_j=w_k) \vdash$ (A1)
$\exists w(u=w, u_i=w_k) \vdash$ (S8),(SZ)
$u_i=u_k$. ⊠

A fenti (S9)-(S11) -ből kapjuk, hogy

(A1)′ $Ax \vdash u_i=v_j, v_j=w_k \rightarrow u_i=w_k$, ha $u,v,w \in \{x,y,z\}$.

(A4)′ $Ax \vdash u_{ik}=\tau \rightarrow \exists w(u_i=w)$.:

Ha τ nem u_j alakú, akkor (S3) és (S1) szerint készen vagyunk.

$u_{ik}=u_j \vdash$ (UV)
$\exists w(u=w, u_{ik}=u_j) \vdash$ (S7)
$\exists w(u_{ik}=w_j) \vdash$ (S3),(SZ)
$\exists w(u_i=w)$. ⊠

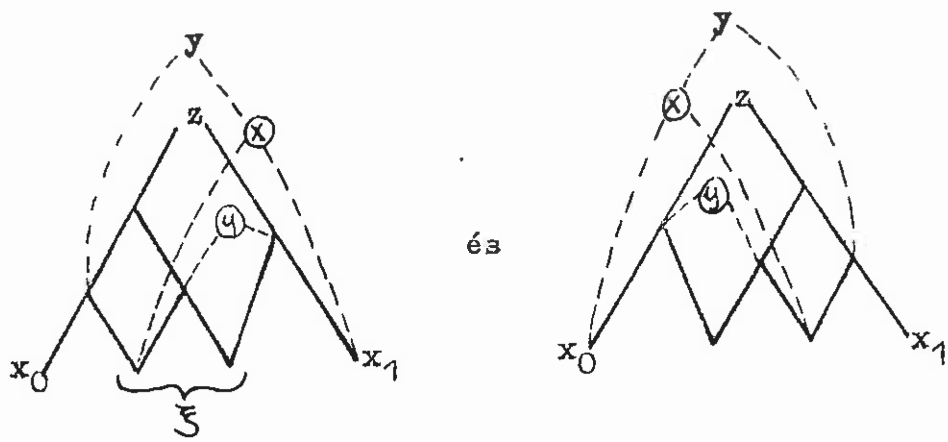
(S0)′ $Ax \vdash u_i=u_j \rightarrow \exists w(u_i=w, u_j=w)$.:

$u_i=u_j \vdash$ (A4)′ ,(SZV)
$\exists w(u_i=w, u_i=u_j) \vdash$ (A1)′ ,(A0)′
$\exists w(u_i=w, u_j=w)$. ⊠

(A3)′ $Ax \vdash u_i=v_j, u_{ik}=\tau \rightarrow u_{ik}=v_{jk}$, ha $u,v \in \{x,y,z\}$.:

Ha $|\{u,v\}|=2$, akkor (A4)′ és (A3) szerint készen vagyunk. Az állítás másik részének bizonyítása (itt ismét $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$-t feltételezzük):

$u_i=u_j, u_{ik}=\tau \vdash$ (A4)′ ,(SZV)
$\exists w(u_i=u_j, u_{ik}=w) \vdash$ (UV),(SZV)
$\exists vw(u=v, u_i=u_j, u_{ik}=w) \vdash$ (S7)
$\exists vw(u=v, u_i=v_j, u_{ik}=w) \vdash$ (A3),(SZ)
$\exists v(u=v, u_{ik}=v_{jk}) \vdash$ (S8),(SZ)
$u_{ik}=u_{jk}$. ⊠



2. ÁBRA
(Az (S13) és szimmetrikus párja illusztrációja.)

(S12) $Ax \vdash u_{ik}=\tau \to u_i=u_i$.:

$u_{ik}=\tau \vdash$ (A4)'
$\exists w(u_i=w) \vdash$ (A0),(A1)',(SZ)
$u_i=u_i$. ⊠

(A2)' $Ax \vdash u_{ik}=\tau, v_{j\ell}=\sigma \to \exists w(w_0=u_i, w_1=v_j)$, ha $u,v \in \{x,y,z\}$, $w \notin \{u,v\}$.:

A bizonyításban legyen $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$.

$u_{ik}=\tau, v_{j\ell}=\sigma \vdash$ (S12)
$u_i=u_i, v_j=v_j \vdash$ (A2)
$\exists w(w_0=u_i, w_1=v_j)$.

$u_{ik}=\tau, u_{j\ell}=\sigma \vdash$ (S12)
$u_i=u_i, u_j=u_j \vdash$ (UV),(A3),(A1)',(A0)'
$\exists v(u=v, u_i=u_i, v_j=v_j) \vdash$ (A2),(SZV)
$\exists vw(u=v, w_0=u_i, w_1=v_j) \vdash$ (A3),(SZ)
$\exists w(w_0=u_i, w_1=u_j)$. ⊠

(A2)'' $Ax \vdash u_{ik}=\tau, u_{j\ell}=\sigma, u_{mn}=\delta \to \exists w(w_0=u_i, w_{10}=u_j, w_{11}=u_m)$, és a szimmetrikus párja .:

$u_{ik}=\tau, u_{j\ell}=\sigma, u_{mn}=\delta \vdash$ (S12)
$u_i=u_i, u_j=u_j, u_m=u_m \vdash$ (A2)',(SZV)
$\exists v(u_i=u_i, v_0=u_j, v_1=u_m) \vdash$ (A2)',(SZV)
$\exists wv(w_0=u_i, w_1=v, v_0=u_j, v_1=u_m) \vdash$ (A3),(A1),(SZ)
$\exists w(w_0=u_i, w_{10}=u_j, w_{11}=u_m)$. ⊠

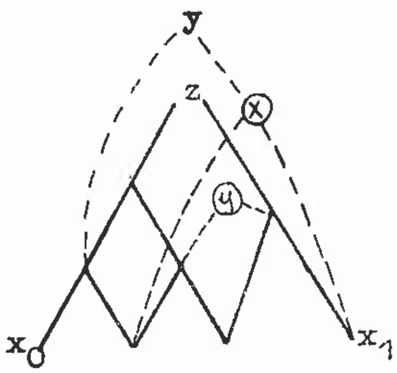
Ezzel a kényelmesebben használható (A0)'-(A2)'' állításokat levezettük. A következő (S13) segédállítást később fogjuk használni. (A bizonyítást érdemes lekövetni a szemben lévő 2. Ábrán.)

(S13) $Ax \vdash \chi \to \exists y(z_{00}=y_0, \Delta(x,y), \exists x[x=y_1, \eta])$, ahol

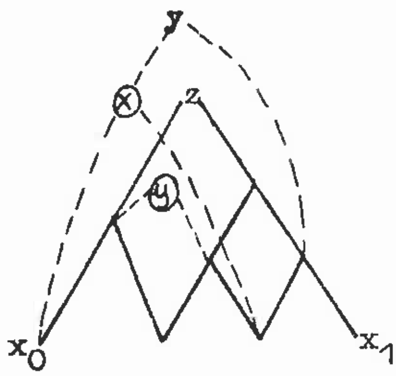
$\eta \overset{d}{=} \exists y[z_{01}=y_0, z_1=y_1, \Delta(x,y)]$, $\chi \overset{d}{=} (\delta \wedge \xi)$,

$\delta \overset{d}{=} (x_0=z_{000}, x_1=z_{11})$, $\xi \overset{d}{=} (z_{001}=z_{010}, z_{011}=z_{10})$, és

$\Delta(x,y) \overset{d}{=} (x_0=y_{00}, y_{01}=y_{10}, x_1=y_{11})$.:



és



2. ÁBRA

(Az (S13) és szimmetrikus párja illusztrációja.)

$$\chi = \delta \wedge \xi ,$$

$$\delta = (x_0 = z_{000},\ x_1 = z_{11}),$$

$$\xi = (z_{001} = z_{010},\ z_{011} = z_{10}),$$

$$\eta = \exists y [z_{01} = y_0,\ z_1 = y_1,\ \Delta(x,y)]$$

$$Ax \vdash \chi \to \exists y (z_{00} = y_0,\ \Delta(x,y),\ \exists x [x = y_1,\ \eta]).$$

$\chi \vdash \quad (A2)', (SZV)$

$\delta, \exists x(x_0=z_{001}, x_1=z_{11}, \xi) \vdash \quad (A2)', (SZV)$

$\delta, \exists xy(x_0=z_{001}, x_1=z_{11}, \xi, y_0=z_{01}, y_1=z_1) \vdash$ kongr., szimm., tranz.,

$\delta, \exists xy(x_0=z_{001}, x_1=z_{11}, z_{01}=y_0, z_1=y_1, \Delta(x,y)) \vdash \quad (SZV)$

$\delta, \exists x(x_0=z_{001}, x_1=z_{11}, \eta) \vdash \quad (A2)', (SZV)$

$\delta, \exists xy(y_0=z_{00}, y_1=x, x_0=z_{001}, x_1=z_{11}, \eta) \vdash$ kongr., szimm., tranz.,

$\delta, \exists xy(y_0=z_{00}, y_1=z_{11}, y_{01}=y_{10}, x=y_1, \eta) \vdash$ (SZV), kongr., szimm., tranz.

$\exists y(z_{00}=y_0, \Delta(x,y), \exists x[x=y_1, \eta])$. ⊠

Az (S13) szimmetrikus párját ugyanígy lehet megkapni (tehát a 0 -t és az 1 -et mindenütt felcseréljük, a kimondásban is és a bizonyításban is).

Rátérünk most $\mathcal{E}\!\mathcal{W}/\equiv_{Ax} \in$ RRA bizonyítására. Először megmutatjuk, hogy Ax -ból bizonyítható, hogy $\odot$ asszociatív és bizonyítható a Δ-szabály, még $Fm_3^{\Lambda,1}$ -ban is. Ezután bizonyítjuk majd, hogy $\mathcal{E}\!\mathcal{W}$ algebra és $\equiv_{Ax}$ kongruencia $\mathcal{E}\!\mathcal{W}$-n.

Az alábbiakban $\varphi, \psi, \gamma \in Fm_3^{\Lambda,1}$, $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$ és i,j,k,ℓ -re az előzőekben használt megállapodás érvényes. A levezetések magyarázat részében (A0)', (A1)', (A3)', (A4)' használataira csak úgy fogunk hivatkozni, hogy "Ax" , (A2)', (A2)'' használatait kiírjuk.

Használni fogjuk (csak a bizonyításban) a következő jelöléseket:

$\varphi x_i \overset{d}{=} \exists y(y=x_i, \varphi y)$ és

$\Delta(u_i, v_j) \overset{d}{=} (u_{i0}=v_{j00}, v_{j01}=v_{j10}, v_{j11}=u_{i1})$,

$u_{\langle\rangle}$ ill. $v_{\langle\rangle}$ helyett csak u ill. v -t írunk.

Az alábbi (0) arra való csak, hogy dolgokat szimmetrikusan lehessen felírni.

(0) $Ax \vdash \varphi x \leftrightarrow \varphi$.:

$\vdash$ definició

$\varphi x \leftrightarrow \exists y(y=x, \exists x(x=y, \varphi)) \vdash \quad \varphi \in Fm_3^{\Lambda,1}$, (SZ), $CA \models C_7'$

$\varphi x \leftrightarrow \varphi$. ⊠

Az alábbi (2/a) a későbbi (2) speciális esete.

(2/a) $Ax \vdash \varphi u, u=v \rightarrow \varphi v$.:

$\varphi x, x=v \vdash$ (O),(CA)

$\exists x(x=v,\varphi) \vdash$ definició

φv , ha $u\in\{x\}$.

$\varphi u, u=x \vdash$ definició

$x=u, \exists x(x=u,\varphi) \vdash$ $CA \models d_{ij}\cdot c_i(d_{ij}\cdot x)=d_{ij}\cdot x$

$\varphi \vdash$ (O)

φx , ha $v\in\{x\}$.

Tegyük fel, hogy $x\notin\{u,v\}$.

$\varphi u, u=v \vdash$ definició,(SZV)

$\exists x(x=u,\varphi,u=v) \vdash$ Ax

$\exists x(x=v,\varphi) \vdash$ definició

φv . $\boxtimes$

A most következő állításcsoport (a (2) kivételével) azt mutatja, hogy segédváltozókat (kvantorral lekötött változókat) általában ki lehet cserélni más, a formulában nem szereplő változóra.

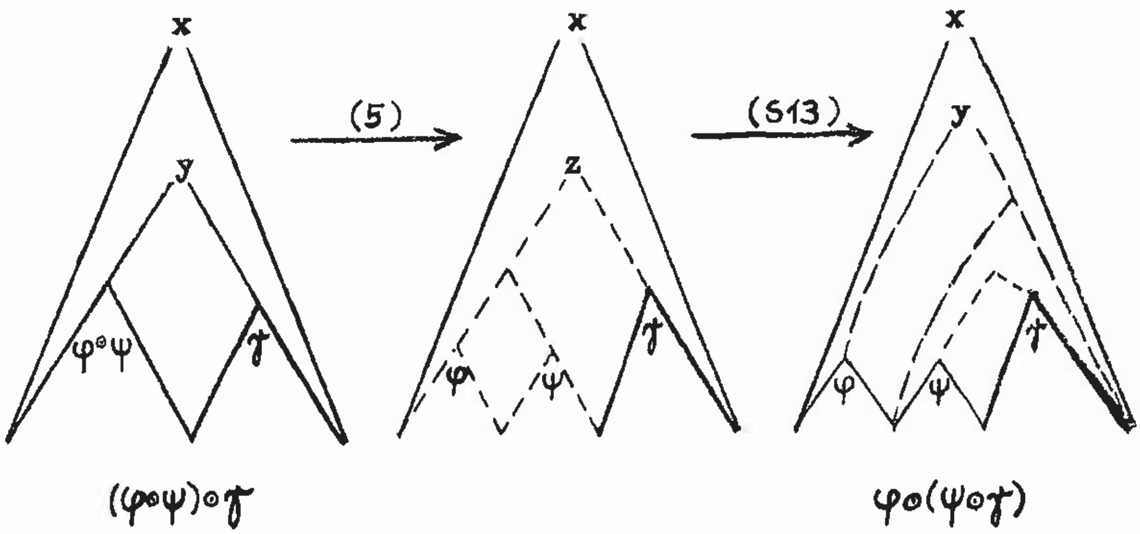
(1) $Ax \vdash \varphi u_i \leftrightarrow \exists v(v=u_i,\varphi v)$.:

$\exists v(v=u_i,\varphi v) \vdash$ (UV)

$\exists vw(w=v,v=u_i,\varphi v) \vdash$ Ax,(2/a),(SZ)

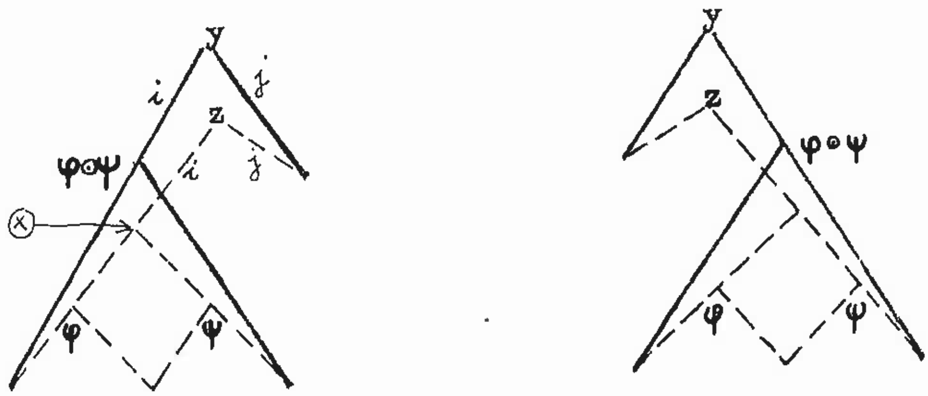
$\exists w(w=u_i,\varphi w)$.

Ebből (1) következik, hiszen $\varphi u_i \leftrightarrow \exists v(v=u_i,\varphi v)$ valamelyik $v\in$ $\{x,y,z\}\sim\{u\}$ -ra definició szerint. $\boxtimes$



4. ÁBRA

(A (6) bizonyításának illusztrációja.)



3. ÁBRA

(Az (5) illusztrációja.)

(2) $Ax \vdash \varphi u_{ki}, u_k = w_j \to \varphi w_{ji}$, ha $ki, ji \in H$.:

$\varphi u_{ki}, u_k = w_j \vdash$ (1),(SZV)
$\exists v(\varphi v, v = u_{ki}, u_k = w_j) \vdash$ Ax
$\exists v(\varphi v, v = w_{ji}) \vdash$ (1)
φw_{ji} . ⊠

(3) $Ax \vdash \varphi \circ \psi \to \exists z(\varphi z_0, \psi z_1, \Delta(x,z))$.:

$\varphi \circ \psi \vdash$ definició
$\exists y(\varphi y_0, \psi y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (UV)
$\exists yz(z=y, \varphi y_0, \psi y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (2),Ax
$\exists z(\varphi z_0, \psi z_1, \Delta(x,z))$. ⊠

(4) $Ax \vdash (\varphi \circ \psi) y_i \to \exists x(\varphi x_0, \psi x_1, \Delta(y_i, x))$, ha $i \in 2$.:

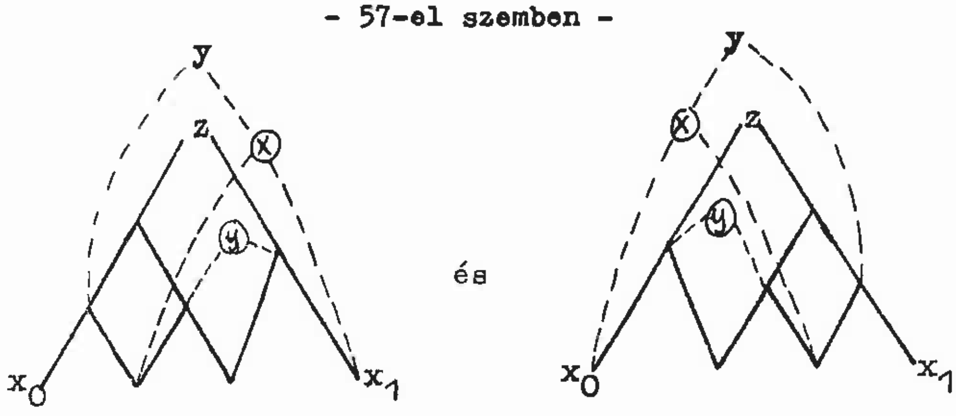
$(\varphi \circ \psi) y_i \vdash$ definició
$\exists x(x = y_i, \varphi \circ \psi) \vdash$ (3),(SZV)
$\exists xz(x = y_i, \varphi z_0, \psi z_1, \Delta(x,z)) \vdash$ Ax,(SZ)
$\exists z(\varphi z_0, \psi z_1, \Delta(y_i, z)) \vdash$ (UV)
$\exists xz(x=z, \varphi z_0, \psi z_1, \Delta(y_i, z)) \vdash$ (2),Ax
$\exists x(\varphi x_0, \psi x_1, \Delta(y_i, x))$. ⊠

(5) $Ax \vdash (\varphi \circ \psi) y_i, y_j = y_j \to \exists z(\varphi z_{i0}, \psi z_{i1}, \Delta(y_i, z_i), z_j = y_j)$, ha $\{i,j\} = \{0,1\}$.:

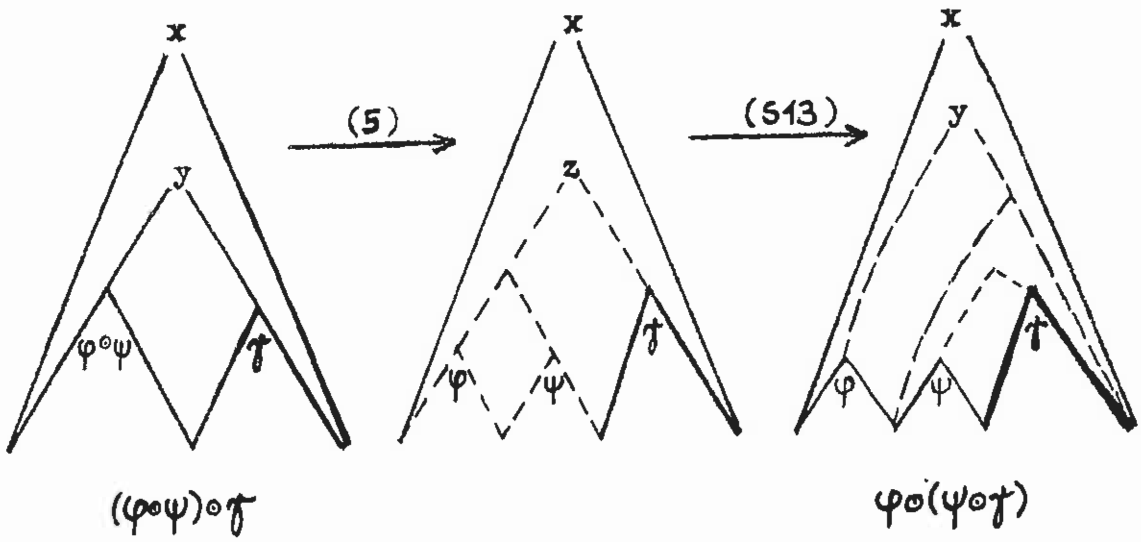
(Lásd a 3. Ábrát a túloldalon.)
$(\varphi \circ \psi) y_i \vdash$ (4)
$\exists x(\varphi x_0, \psi x_1, \Delta(y_i, x)) \vdash$ $y_j = y_j$, (A2)
$\exists xz(z_i = x, z_j = y_j, \varphi x_0, \psi x_1, \Delta(y_i, x)) \vdash$ (2),Ax, (SZ)
$\exists z(\varphi z_{i0}, \psi z_{i1}, \Delta(y_i, z_i), z_j = y_j)$. ⊠

(6) $Ax \vdash (\varphi \circ \psi) \circ \gamma \leftrightarrow \varphi \circ (\psi \circ \gamma)$.:

(Ld. a 4. Ábrát a túloldalon.)
$(\varphi \circ \psi) \circ \gamma \vdash$ definició
$\exists y((\varphi \circ \psi) y_0, \gamma y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ Ax,(5),(SZV)
$\exists yz(\varphi z_{00}, \psi z_{01}, \gamma y_1, y_1 = z_1, \Delta(y_0, z_0), \Delta(x,y)) \vdash$ (2),Ax
$\exists z(\varphi z_{00}, \psi z_{01}, \gamma z_1, x_0 = z_{000}, x_1 = z_{11}, z_{001} = z_{010}, z_{011} = z_{10}) \vdash$ (S13),(SZV)

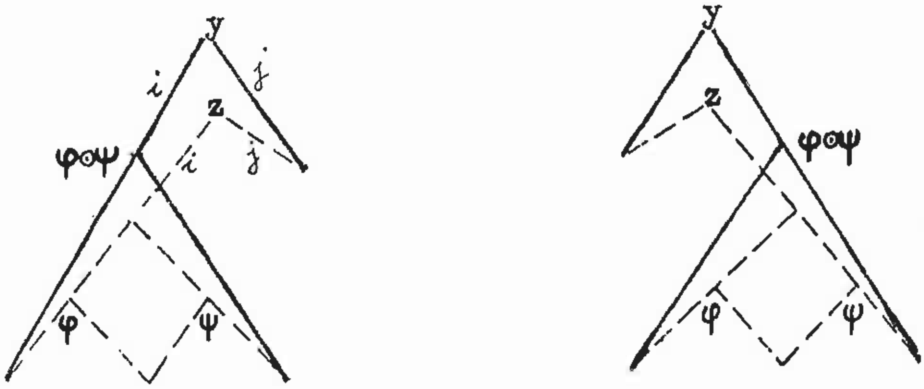


(Az (S13) és szimmetrikus párja illusztrációja.)



4. ÁBRA

(A (6) bizonyításának illusztrációja.)



(Az (5) illusztrációja.)

$\exists zy(\varphi z_{00},\psi z_{01},\gamma z_1,z_{00}=y_0,\exists x(x=y_1,\exists y[z_{01}=y_0,z_1=y_1,\Delta(x,y)]),\Delta(x,y))$
$\vdash$ (2),(SZV)

$\exists y(\varphi y_0,\exists x(x=y_1,\exists y[\psi y_0,\gamma y_1,\Delta(x,y)]),\Delta(x,y))$ $\vdash$ definició

$\varphi\circ(\psi\circ\gamma)$ $\vdash$ definició

$\exists y(\varphi y_0,(\psi\circ\gamma)y_1,\Delta(x,y))$ $\vdash$ Ax,(5),(SZV)

$\exists yz(\varphi y_0,\psi z_{10},\gamma z_{11},\Delta(y_1,z_1),y_0=z_0,\Delta(x,y))$ $\vdash$ (2),Ax,(SZ)

$\exists z(\varphi z_0,\psi z_{10},\gamma z_{11},x_1=z_{111},x_0=z_{00},z_{110}=z_{101},z_{100}=z_{01})$ $\vdash$ (S13),(SZV)

$\exists zy(\varphi z_0,\psi z_{10},\gamma z_{11},z_{11}=y_1,\exists x(x=y_0,\exists y[z_{10}=y_1,z_0=y_0,\Delta(x,y)]),\Delta(x,y))$
$\vdash$ (SZV),(2)

$\exists y(\gamma y_1,\exists x(x=y_0,\exists y[\psi y_1,\varphi y_0,\Delta(x,y)]),\Delta(x,y))$ $\vdash$ definició

$(\varphi\circ\psi)\circ\gamma$. $\boxtimes$

Eddig beláttuk, hogy A_x -ból bizonyítható, hogy $\circ$ asszociatív. Ez volt a bizonyítás legfontosabb lépése. Most rátérünk az $^{\cup}$ inverz művelet tulajdonságainak vizsgálatára.

(7) $Ax\vdash \gamma z_i,x_0=z_{i1},x_1=z_{i0}\rightarrow\gamma^{\cup}$, ha $|i|\leq 2$.:

$\gamma z_i,x_0=z_{i1},x_1=z_{i0}$ $\vdash$ (1),(SZV)

$\exists y(y=z_i,\gamma y,x_0=z_{i1},x_1=z_{i0})$ $\vdash$ Ax

$\exists y(\gamma y,x_0=y_1,x_1=y_0)$ $\vdash$ definició

$\gamma^{\cup}$. $\boxtimes$

(8) $Ax\vdash \gamma z_i,y_{00}=z_{i1},y_{01}=z_{i0}\rightarrow\gamma^{\cup}y_0$, ha $|i|\leq 2$.:

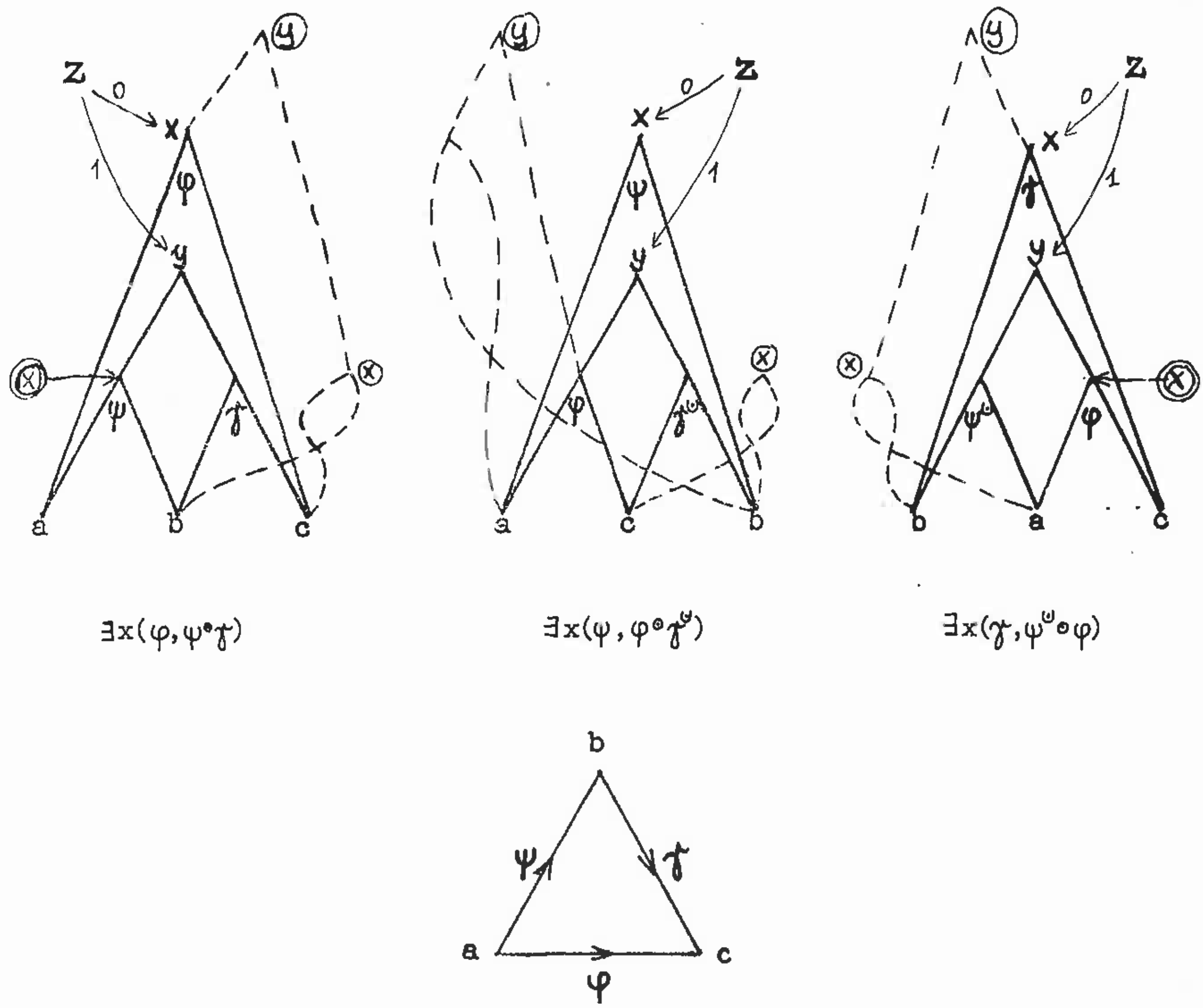
$\gamma z_i,y_{00}=z_{i1},y_{01}=z_{i0}$ $\vdash$ Ax,(SZV)

$\exists x(x=y_0,\gamma z_i,y_{00}=z_{i1},y_{01}=z_{i0})$ $\vdash$ Ax

$\exists x(x=y_0,\gamma z_i,x_0=z_{i1},x_1=z_{i0})$ $\vdash$ (7)

$\exists x(x=y_0,\gamma^{\cup})$ $\vdash$ definició

$\gamma^{\cup}y_0$. $\boxtimes$



5. ÁBRA

(A (10) bizonyításának illusztrációja.)

(9) $Ax \vdash \gamma^{\omega} z_i \to \exists u(\gamma u, u_0 = z_{i1}, u_1 = z_{i0})$, ha $|i| \leq 2$, $u \in \{x,y\}$.:

$\gamma^{\omega} z_i \vdash$ definició

$\exists x(x = z_i, \exists y(\gamma y, y_0 = x_1, y_1 = x_0)) \vdash$ (SZV), Ax, (SZ)

$\exists y(\gamma y, y_0 = z_{i1}, y_1 = z_{i0}) \vdash$ (UV)

$\exists xy(x = y, \gamma y, y_0 = z_{i1}, y_1 = z_{i0}) \vdash$ (2/a), (1), Ax, (SZ)

$\exists x(\gamma, x_0 = z_{i1}, x_1 = z_{i0})$. ⊠

Készen vagyunk a "Δ-szabály" bizonyítására. Ld. az 5. Ábrát.

(10) $Ax \vdash \exists x(\varphi, \varphi \circ \gamma) \to \exists x(\varphi, \varphi \circ \gamma^{\omega})$,
$\exists x(\varphi, \varphi \circ \gamma^{\omega}) \to \exists x(\gamma, \varphi^{\omega} \circ \varphi)$,
$\exists x(\gamma, \varphi^{\omega} \circ \varphi) \to \exists x(\varphi, \varphi \circ \gamma)$.:

$\exists x(\varphi, \varphi \circ \gamma) \vdash$ definició, (SZV)

$\exists xy(\varphi, \varphi y_0, \gamma y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (A2), (SZV)

$\exists xyz(z_0 = x, z_1 = y, \varphi, \varphi y_0, \gamma y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (2), Ax, (SZ)

$\exists z(\varphi z_0, \varphi z_{10}, \gamma z_{11}, \underbrace{z_{00} = z_{100}, z_{01} = z_{111}, z_{101} = z_{110}}_{\eta}) \vdash$ (A2)

$\exists zx(x_0 = z_{111}, x_1 = z_{110}, \varphi z_0, \varphi z_{10}, \gamma z_{11}, \eta) \vdash$ (7)

$\exists zx(\varphi z_0, \varphi z_{10}, \gamma^{\omega}, x_0 = z_{111}, x_1 = z_{110}, \eta) \vdash$ (A2)

$\exists xyz(y_0 = z_0, y_1 = x, \varphi z_0, \varphi z_{10}, \gamma^{\omega}, x_0 = z_{111}, x_1 = z_{110}, \eta) \vdash$ (2), (1), Ax

$\exists yz(\varphi y_0, \gamma^{\omega} y_1, \varphi z_{10}, y_0 = z_0, y_{10} = z_{111}, y_{11} = z_{110}, \eta) \vdash$ def., Ax, (SZV)

$\exists yz(\varphi y_0, \gamma^{\omega} y_1, \exists x[x = z_{10}, \varphi, \Delta(x,y)]) \vdash$ (SZV)

$\exists x(\varphi, \exists y(\varphi y_0, \gamma^{\omega} y_1, \Delta(x,y))) \vdash$ definició

$\exists x(\varphi, \varphi \circ \gamma^{\omega}) \vdash$ definició, (SZV)

$\exists xy(\varphi, \varphi y_0, \gamma^{\omega} y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (A2), (SZV)

$\exists xyz(z_0 = x, z_1 = y, \varphi, \varphi y_0, \gamma^{\omega} y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (2), Ax, (SZ)

$\exists z(\varphi z_0, \varphi z_{10}, \gamma^{\omega} z_{11}, z_{00} = z_{100}, z_{01} = z_{111}, z_{101} = z_{110}) \vdash$ (A2)"

$\exists yz(y_1 = z_{10}, y_{00} = z_{111}, y_{01} = z_{100}, \varphi z_0, \varphi z_{10}, \gamma^{\omega} z_{11}, \eta) \vdash$ Ax, (8), (2)

$\exists yz(\varphi^{\omega} y_0, \varphi y_1, \gamma^{\omega} z_{11}, y_1 = z_{10}, y_{00} = z_{111}, y_{01} = z_{100}, \eta) \vdash$ (9), (SZV)

$\exists xyz(\varphi^{\cup} y_0, \varphi y_1, \gamma, x_0=z_{111}, x_1=z_{110}, y_1=z_{10}, y_{00}=z_{111}, y_{01}=z_{100}, \eta) \vdash$ Ax,(SZV)

$\exists x(\gamma, \exists y(\varphi^{\cup} y_0, \varphi y_1, \Delta(x,y))) \vdash$ definició

$\exists x(\gamma, \varphi^{\cup}\circ\varphi) \vdash$ definició,(SZV)

$\exists xy(\gamma, \varphi^{\cup} y_0, \varphi y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (A2)

$\exists xyz(z_0=x, z_1=y, \gamma, \varphi^{\cup} y_0, \varphi y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ Ax,(2)

$\exists z(\gamma z_0, \varphi^{\cup} z_{10}, \varphi z_{11}, \underbrace{z_{00}=z_{100}, z_{101}=z_{110}, z_{01}=z_{111}}_{\eta}) \vdash$ (9)

$\exists zx(\gamma z_0, \varphi, \varphi z_{11}, x_0=z_{101}, x_1=z_{100}, \eta) \vdash$ (A2)

$\exists xyz(y_0=x, y_1=z_0, \gamma z_0, \varphi, \varphi z_{11}, x_0=z_{101}, x_1=z_{100}, \eta) \vdash$ (2),Ax

$\exists yz(\gamma y_1, \varphi y_0, \varphi z_{11}, y_{00}=z_{101}, y_{01}=z_{100}, y_1=z_0, \eta) \vdash$ (1),(0)

$\exists xyz(x=z_{11}, \varphi, \gamma y_1, \varphi y_0, y_{00}=z_{101}, y_{01}=z_{100}, y_1=z_0, \eta) \vdash$ Ax

$\exists xy(\varphi, \varphi y_0, \gamma y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (SZV), definició

$\exists x(\varphi, \varphi\circ\gamma)$,

ahol $\eta \overset{d}{=} (z_{00}=z_{100}, z_{01}=z_{111}, z_{101}=z_{110})$. ⊠

(10)-ből a következő (∗) állítás használatával következik a Δ-szabály:

(∗) $Ax \vdash \exists x\psi \to \exists x\varphi$ -ből következik, hogy $\varphi/{\equiv_{Ax}}=0 \Rightarrow \psi/{\equiv_{Ax}}=0$.

A (∗) állítás (CA) -ból következik, mert $CA \models \{x \leq c_i x,\ c_i 0=0\}$.

Mint látni fogjuk később (15.T(iii)), Ax -ból nem következik (szemantikusan), tehát nem is bizonyítható, hogy ε egysége lenne a ⊙ kompozíciónak. Ezért kellett az $\mathfrak{Er}$ relációalgebra univerzumát $Fm_3^{\wedge,1}$ helyett Ev -re lekorlátozni. Ha Ax -ban megkövetelnénk a párok unicitását (tehát felvennénk axiómának "$x_0=y_0, x_1=y_1 \to x=y$" -t), akkor Ax -ből már bizonyítható lenne, hogy ε egysége ⊙-nek (a pár(x)∧φ alakú formuláknál). Az alábbi (11) állítás rámutat annak lényegére, hogy miért lehet a párok unicitásának megkövetelése helyett lekorlátozódnunk az Ev -beli formulákra.

(11) $\mathrm{Ax} \vdash z_0=x_0, z_1=x_1 \Rightarrow [(\varphi\circ\psi)z \leftrightarrow (\varphi\circ\psi)]$.:

$(\varphi\circ\psi)z \vdash$ definició,(SZV)

$\exists xy(x=z, \Delta(x,y), \varphi y_0, \psi y_1) \vdash$ Ax

$\exists y(\Delta(z,y), \varphi y_0, \psi y_1) \vdash (z_0=x_0, z_1=x_1, \mathrm{Ax})$

$\exists y(\Delta(x,y), \varphi y_0, \psi y_1) \vdash$ definició

$\varphi\circ\psi \vdash$ definició, Ax, $z_0=x_0, z_1=x_1$

$\exists y(\Delta(z,y), \varphi y_0, \psi y_1) \vdash$ Ax,(UV)

$\exists x(x=z, \exists y(\Delta(x,y), \varphi y_0, \psi y_1)) \vdash$ definició

$(\varphi\circ\psi)z$. ⊠

(12) $\mathrm{Ax} \vdash \text{pár}(x)\wedge\varphi \rightarrow \varepsilon\circ\varphi$, és

$\mathrm{Ax} \vdash \varphi\circ\psi \rightarrow \text{pár}(x)$,

$\mathrm{Ax} \vdash \varphi^{\cup} \rightarrow \text{pár}(x)$,

$\mathrm{Ax} \vdash \varepsilon \rightarrow \text{pár}(x)$,

$\mathrm{Ax} \vdash \text{pár}(x) \leftrightarrow (x_0=x_0, x_1=x_1)$.

Az utolsó négy állítást könnyű belátni a definiciók és Ax használatával, az olvasóra bízzuk belátásukat.

$\varphi \vdash (A2)^{\eta}, x_0=x_0$

$\exists y(y_{00}=y_{01}=x_0, y_1=x, \varphi) \vdash$ Ax,(2), $x_1=x_1$

$\exists y(\exists x(x=y_0, x_0=x_1), \varphi y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ definició

$\varepsilon\circ\varphi$. ⊠

Az alábbi (13)-(17),(19) állításoknak csak egyik irányát bizonyítjuk, mert a másik irány következik (12) -ből.

(13) $\mathrm{Ax} \vdash \varepsilon\circ(\varphi\circ\psi) \leftrightarrow (\varphi\circ\psi)$.:

$\varepsilon\circ(\varphi\circ\psi) \vdash$ definició,(1)

$\exists yz(\varepsilon y_0, z=y_1, (\varphi\circ\psi)z, \Delta(x,y)) \vdash$ Ax, definició

$\exists z((\varphi\circ\psi)z, z_0=x_0, z_1=x_1) \vdash$ (11)

$\varphi\circ\psi$. ⊠

(14) $Ax \vdash \; \varepsilon \circ \varphi^{\cup} \leftrightarrow \varphi^{\cup}$.:

$\varepsilon \circ \varphi^{\cup} \vdash$ (3)
$\exists z(\varepsilon z_0, \varphi^{\cup} z_1, \Delta(x,z)) \vdash$ (9)
$\exists zy(\varphi y, y_0 = z_{11}, y_1 = z_{10}, \Delta(x,z), \varepsilon z_0) \vdash$ Ax
$\exists y(\varphi y, y_0 = x_1, y_1 = x_0) \vdash$ definició
$\varphi^{\cup}$. ⊠

(15) $Ax \vdash \; \varepsilon \circ \varepsilon \leftrightarrow \varepsilon$.:

$\varepsilon \circ \varepsilon \vdash$ definició
$\exists y(\varepsilon y_0, \varepsilon y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ definició
$\exists y(\exists x(x = y_0, x_0 = x_1), \exists x(x = y_1, x_0 = x_1), \Delta(x,y)) \vdash$ Ax
$\exists y(y_{00} = y_{01}, y_{10} = y_{11}, \Delta(x,y)) \vdash$ Ax
$x_0 = x_1 \vdash$ definició
ε . ⊠

(16) $Ax \vdash \; \varepsilon \circ \dot{1} \leftrightarrow \dot{1}$.:

$\varepsilon \circ 1 \vdash$ (12)
pár(x) $\vdash$ definició
$\dot{1}$. ⊠

(17) $Ax \vdash \; \varepsilon \circ (\varphi + \psi) \leftrightarrow [(\varepsilon \circ \varphi) + (\varepsilon \circ \psi)]$.:

$\varepsilon \circ (\varphi + \psi) \vdash$ definició
$\exists y(\varepsilon y_0, \exists x(x = y_1, \varphi \vee \psi), \Delta(x,y)) \vdash$ (CA)
$\exists y(\varepsilon y_0, (\exists x(x = y_1, \varphi) \vee \exists x(x = y_1, \psi)), \Delta(x,y)) \vdash$ (CA)
$\exists y(\varepsilon y_0, \varphi y_1, \Delta(x,y)) \vee \exists y(\varepsilon y_0, \psi y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ definició
$(\varepsilon \circ \varphi) + (\varepsilon \circ \psi)$, a másik irányban ugyanígy megy a bizonyítás. ⊠

(18) $Ax \vdash \varepsilon\circ(\dot{-}(\varepsilon\circ\varphi)) \leftrightarrow \dot{-}(\varepsilon\circ\varphi)$.:

$\vdash \varepsilon\circ\varphi \to pár(x)$, tehát elég belátni $\vdash \varepsilon\circ(\dot{-}(\varepsilon\circ\varphi)) \to \neg(\varepsilon\circ\varphi)$ -t.

$\varepsilon\circ\dot{-}(\varepsilon\circ\varphi) \vdash$ definició

$\exists y(\varepsilon y_0, \exists x[x=y_1, pár(x)\wedge\neg(\varepsilon\circ\varphi)], \Delta(x,y)) \vdash$ (CA), definició

$\exists y(\varepsilon y_0, (\neg[\varepsilon\circ\varphi])y_1, \Delta(x,y)) \vdash$ (1), Ax

$\exists z(z=y_1, (\neg[\varepsilon\circ\varphi])z, z_0=x_0, z_1=x_1) \vdash$ (11), (SZV), (CA)

$\neg(\varepsilon\circ\varphi)$. ⊠

A fenti (13)-(18) -ból rögtön következik, hogy Ev zárt a $\circ, ^{\cup}, \varepsilon, \dot{1}, +, \dot{-}$ műveletekre. Belátható, hogy $\vdash \dot{0} \leftrightarrow \dot{-}\dot{1}$, és $\vdash [pár(x)\wedge\varphi\wedge\psi] \leftrightarrow \dot{-}(\dot{-}\varphi+\dot{-}\psi)$, így (12) -ből adódik, hogy Ev zárt $\dot{0}$ és $\cdot$-ra is. Tehát $\mathcal{E}v$ algebra. $\equiv_{Ax}$ kongruencia $\mathcal{E}v$-n, mert $\equiv_{Ax}$ kongruencia $\mathfrak{Fm}_3^{\wedge}$ -on [HMT]4.3.20 szerint, és $\mathcal{E}v$ általános reduktuma $\mathfrak{Fm}_3^{\wedge}$ -nak, azaz $\mathcal{E}v$ minden művelete $\mathfrak{Fm}_3$ műveleteivel van definiálva. Továbbá $\{\varphi\circ\psi : \varphi,\psi \in Fm_3^{\wedge,1}\} \subseteq Ev$ a (13) szerint.

Folytatjuk annak bizonyítását, hogy $\mathcal{E}v/\equiv_{Ax} \in RA$. Belátjuk, hogy ε egységeleme $\circ$-nek. Először megjegyezzük, hogy a (13)-hoz teljesen analóg módon belátható, hogy

(13)' $Ax \vdash (\varphi\circ\psi)\circ\varepsilon \leftrightarrow (\varphi\circ\psi)$, minden $\varphi\psi \in Fm_3^{\wedge,1}$ -re.

Legyen $\varphi \in Ev$. Akkor $Ax \vdash \varphi \leftrightarrow \varepsilon\circ\varphi$ definició szerint, tehát ε baloldali egységeleme a $\circ$-nak. Továbbá $Ax \vdash (\varepsilon\circ\varphi)\circ\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon\circ\varphi$ a (13)' szerint, így $\varphi \in Ev$ miatt $Ax \vdash \varphi\circ\varepsilon \leftrightarrow \varphi$, tehát ε jobboldali egységeleme is $\circ$-nak. Beláttuk, hogy ε egységeleme $\circ$-nak. A (BA) és (12) használatával könnyen belátható, hogy $\langle Ev, +, \cdot, \dot{-}, \dot{0}, \dot{1}\rangle/\equiv_{Ax}$ Boole-algebra. Mivel beláttuk hamarabb, hogy $\circ$ asszociatív, és beláttuk a Δ-szabályt is, ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{E}v/\equiv_{Ax} \in RA$.

Következőképp azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{E}v/\equiv_{Ax} \in QRA$, azaz $\mathcal{E}v/\equiv_{Ax}$ kvázi-projektív reláció-algebra.

Legyen $q_0 \stackrel{d}{=} (x_{00}=x_1)$, $q_1 \stackrel{d}{=} (x_{01}=x_1)$.

Először belátjuk, hogy $q_0, q_1 \in Ev$. Legyen $k\in 2$.

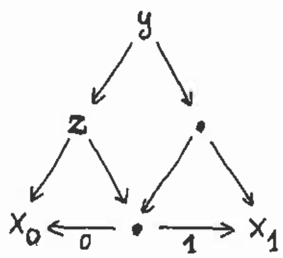
(19) $Ax \vdash \varepsilon\circ(x_{0k}=x_1) \leftrightarrow x_{0k}=x_1$.:

$\varepsilon\circ(x_{0k}=x_1) \vdash$ definició
$\exists y(\varepsilon y_0, \exists x(x=y_1, x_{0k}=x_1), \Delta(x,y)) \vdash$ Ax
$\exists y(\varepsilon y_0, y_{10k}=y_{11}, \Delta(x,y)) \vdash$ Ax
$x_{0k}=x_1$.
A másik irány (12)-ből és Ax -ből következik. ⊠

Tehát, (19) szerint $q_0, q_1 \in Ev$.

(20) $Ax \vdash q_k^{\cup}\circ q_k \to \varepsilon$.:

$q_k^{\cup}\circ q_k \vdash$ (3)
$\exists z(q_k^{\cup} z_0, q_k z_1, \Delta(x,z)) \vdash$ (9), definició
$\exists z(\exists x(x_{0k}=x_1, x_0=z_{01}, x_1=z_{00}), \exists x(x=z_1, x_{0k}=x_1), \Delta(x,z)) \vdash$ Ax
$\exists z(z_{01k}=z_{00}, z_{10k}=z_{11}, \Delta(x,z)) \vdash$ Ax
$x_0=x_1$. ⊠



(21) $Ax \vdash q_0^{\cup}\circ q_1 \leftrightarrow$ pár(x) .:

pár(x) $\vdash$ definició,Ax
$x_0=x_0, x_1=x_1 \vdash$ (A2)''
$\exists z(z_0=x_0, z_{10}=x_0, z_{11}=x_1) \vdash$ (A2)''
$\exists yz(z_0=x_0, z_{10}=x_0, z_{11}=x_1, y_0=z, y_{10}=z_1, y_{11}=z_{11}) \vdash$ Ax
$\exists y(\Delta(x,y), y_{010}=y_{00}, y_{101}=y_{11}) \vdash$ Ax
$\exists y(\Delta(x,y), \exists x(x=y_0, x_{10}=x_0), \exists x(x=y_1, x_{01}=x_1)) \vdash$ (A2)'
$\exists y(\Delta(x,y), \exists x(x=y_0, \exists y(y_0=x_1, y_1=x_0, y_{00}=y_1)), q_1 y_1) \vdash$ definició,Ax
$\exists y(\Delta(x,y), q_0^{\cup} y_0, q_1 y_1) \vdash$ definició
$q_0^{\cup}\circ q_1$. A másik irány (12)-ből következik. ⊠

A fenti (20)-(21) azt mondja ki, hogy $q_0/{\equiv_{Ax}}$, $q_1/{\equiv_{Ax}}$ projekció-párt alkot $\mathcal{E}v/{\equiv_{Ax}}$ -ban. Tehát $\mathcal{E}v/{\equiv_{Ax}} \in QRA$. Tarski tétele szerint (ld. 5.L), $QRA \subseteq RRA$, tehát $\mathcal{E}v/{\equiv_{Ax}}$ reprezentálható.

QED(9. Tétel)

10. MEGJEGYZÉS (a) Megjegyzések arról, hogy miért cseréltük ki π-t Ax -ra: $\mathcal{E}v/{\equiv_\pi} \notin RA$, nevezetesen $\circ$ nem asszociatív $\mathcal{E}v/{\equiv_\pi}$-ben, mint később látni fogjuk (15.T.(ii)). Tehát π -t szükséges volt kicserélni egy nála (bizonyítási értelemben) erősebb formulára. Mivel π-ből szemantikusan következik, hogy a $\circ$, $^\smile$, ... műveletek relációalgebrát alkotnak (tehát $\mathcal{E}v/{_s\equiv_\pi} \in RA$, ahol $_s\equiv_\pi = \{(\varphi,\psi)\in {}^2Fm_3^{\Lambda,1} :$ $\pi\models \varphi\leftrightarrow\psi\}$) azért lehetett megoldani, hogy $\models \pi\leftrightarrow Ax$ legyen, tehát π -t szemantikusan nem, csak bizonyítóerő szempontjából kellett "erősíteni". Noha fektettünk némi energiát abba, hogy Ax' szemléletes és "kicsi" legyen, a tételben a fő poén mégis az, hogy van véges Ax' a tételbeli tulajdonsággal.: Ez egyáltalán nem volt várható, hiszen a véges Ax' segítségével formulasémákat, tehát végtelen sok formulát kell bizonyítani.

(b) Megjegyzések arról, hogy miért szűkítettük le az alaphalmazt $Fm_3^{\Lambda,1}$ -ról Ev -re.: A $\circ$ és $^\smile$ definiciójából rögtön következik, hogy $\vdash_3 \varphi\circ\varepsilon \to pár(x)$ és $\vdash_3 \varphi^\smile \to pár(x)$. Tehát $\pi \nvdash \varepsilon\circ\varphi \leftrightarrow \varphi$ és $\pi\nvdash \varphi^{\smile\smile} \leftrightarrow \varphi$ ha $\pi\nvdash \varphi \to pár(x)$. Ezen könnyü segíteni úgy, hogy csak az $F \overset{d}{=} \{pár(x)\wedge\varphi : \varphi\in Fm_3^{\Lambda,1}\}$ elemeit tekintjük[*]. (Vagy, hogy felvesszük Ax -hoz $\forall x pár(x)$ -et.) De még így is, $\pi \nvdash \varphi\circ\varepsilon\to\varphi$ és $\pi\nvdash \varphi^{\smile\smile}\to\varphi$ valamely $\varphi\in F$ -re, mint azt 15.T.(iii) mutatja. Megjegyezzük, hogy az RA-t definiáló R_0-R_7 azonosság közül csak (ez a kettő, azaz) R_3 és R_4 nem következik, a többit Ax -ból már bizonyítani is lehet. Viszont, Ax -ból bizonyítható $\varphi \to \varphi\circ\varepsilon$, $\varphi \to \varphi^{\smile\smile}$ (minden $\varphi\in F$ -re), és $\varepsilon\circ\varphi^{\smile\smile} \leftrightarrow \varepsilon\circ\varphi$, $\varphi\circ\varepsilon\to \exists y(\varphi y, y_0{=}x_0, y_1{=}x_1)$, $\varphi^{\smile\smile} \to \exists y(\varphi y, y_0{=}x_0, y_1{=}x_1)$ minden $\varphi\in Fm_3^{\Lambda,1}$ -ra. A bizonyításban láttuk (ld. (11)), hogy $Ax \vdash_3 x_0{=}y_0, x_1{=}y_1 \to (\varphi y \leftrightarrow \varphi)$, minden $\varepsilon\circ\psi$ alakú $\varphi\in Fm_3^{\Lambda,1}$ formulára, tehát minden $\varphi\in Ev$ -re. Ebből az is látható, hogy ha $Ax^+ \overset{d}{=} Ax\wedge\forall xy(x_0{=}y_0, x_1{=}y_1 \to x{=}y)$, akkor

[*] Ezt tükrözi már $\dot{1}$ és $\dot{-}$ definiciója is!

$\mathfrak{F}/\!\equiv_{Ax^+} \in RRA$ (ahol $\mathfrak{F}/\!\equiv_{Ax^+}$ az $F/\!\equiv_{Ax^+}$-on $\circ$, $^{\cup}$, stb. -vel értelemszerűen definiált algebra). Tehát ahelyett, hogy F -et leszűkítettük volna Ev -re, vehettük volna Ax helyett Ax^+-ot. Többek között azért is nem ezt az utat választottuk, mert Tarski is nagy súlyt fektetett arra, hogy ne követelje meg a "párok unicitását" (innen a név: kvázi-projekciópár olyan projekciópár, ahol a párok unicitása nincs megkövetelve). ∎

Mostantól kezdve a Λ nyelvben csak kétargumentumú relációjeleket engedünk meg. A következőkben (végig a II. fejezeten) $\varepsilon : Fm^2_\omega \to RAT$ egy tetszőleges olyan függvényt jelöl, mely teljesíti a 3.L -ban kimondott tulajdonságokat. A κ, stb. most következő definiciójában tehát $p_0, p_1 \in Fm^2_3$ -on kívül ε is paraméter, amit szintén nem tüntetünk fel.

11. DEFINICIÓ

(i) Legyen $\varphi \in Fm_\omega$ tetszőleges. Akkor
$\varphi(x_0,x_1) \stackrel{d}{=} \exists yz(z=x_0, y=x_1, \varphi(z,y))$.

(ii) A $h : RAT \to Fm^1_3$ függvényt a következőképpen definiáljuk:
$h(R) \stackrel{d}{=} R(x_0,x_1)\circ\varepsilon$ minden $R\in\mathcal{R}$-re, és
$h : \underset{\sim}{RAT} \to \mathfrak{Ev}$ homomorfizmus, azaz
$h(\tau;\sigma) \stackrel{d}{=} h(\tau)\circ h(\sigma)$, $h(\tau^{\cup}) \stackrel{d}{=} h(\tau)^{\cup}$, $h(1') \stackrel{d}{=} \varepsilon$,
$h(-\tau) \stackrel{d}{=} \text{pár}(x)\wedge\neg h(\tau)$, $h(\tau\cdot\sigma) \stackrel{d}{=} h(\tau)\wedge h(\sigma)$, $h(\tau+\sigma) \stackrel{d}{=} h(\tau)\vee h(\sigma)$,
$h(1) \stackrel{d}{=} \text{pár}(x)$, $h(0) \stackrel{d}{=} F$.

(iii) A $\kappa, \bar{\kappa}, \kappa' : Fm^2_\omega \to Fm^1_3$ függvényeket a következőképp definiáljuk:

$\bar{\kappa}\varphi \stackrel{d}{=} \forall x(\text{pár}(x) \to \kappa'\varphi)$, $\kappa'\varphi \stackrel{d}{=} h\varepsilon\varphi$,
$\kappa\varphi \stackrel{d}{=} \forall x([Ax^*\wedge \text{pár}(x)] \to \kappa'\varphi)$, ahol $Ax^* \stackrel{d}{=} Ax\wedge\bar{\kappa}\pi$. ∎

Megjegyezzük, hogy $Rng\,\kappa' \subseteq Ev$, a 9.T (i) szerint.

12. TÉTEL (a [TG] 3.78 oldalon levő probléma megoldása)

(i) $\pi \models \varphi \iff \pi \vdash_3 \kappa\varphi \iff \vdash_3 \kappa\varphi$, minden $\varphi\in Fm^2_\omega$-ra.

(ii) $\pi \models \varphi \leftrightarrow \kappa\varphi$, minden $\varphi \in Fm^0_\omega$-ra.

Bizonyítás: Bevezetünk egy általános jelölést (melyet később, más bizonyításokban is fogunk használni): Legyen az $\mathfrak{M}$ modell olyan, hogy $\mathfrak{M} \models \pi$. Legyen $i \in \{0,1\}$ és

$$p_i^{\mathfrak{M}} \stackrel{d}{=} \{(a,b) \in {}^2M \ : \ \mathfrak{M} \models p_i[a,b]\}.$$

$\mathfrak{M} \models \pi$ miatt $p_i^{\mathfrak{M}}$ parciális függvény M -en. Definiáljuk

$$\text{Pár}^{\mathfrak{M}} \stackrel{d}{=} \{a \in M \ : \ p_0^{\mathfrak{M}} \text{ és } p_1^{\mathfrak{M}} \text{ definiálva van a-n}\} = \{a \in M \ : \ \mathfrak{M} \models \text{pár}(x)[a]\},$$

$$a_0 \stackrel{d}{=} p_0^{\mathfrak{M}}(a) \quad \text{és} \quad a_1 \stackrel{d}{=} p_1^{\mathfrak{M}}(a) \quad , \quad \text{ha} \quad a \in \text{Pár}^{\mathfrak{M}}.$$

Ekkor könnyen látható, hogy $[\mathfrak{M} \models (x_i = y_j)[a,b] \iff a_i = b_j]$, minden $i,j \in 2^{*}$ és $a,b \in M$ esetén (ha a_i nem létezik, akkor $a_i = b_j$ hamis). Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{M} \models \pi$ miatt $\text{Pár}^{\mathfrak{M}} \neq 0$. Legyen továbbá

$$m^{\mathfrak{M}}(\tau) \stackrel{d}{=} \tau^{\mathcal{R}(M)}(\langle R^{\mathfrak{M}} : R \in \mathcal{R}\rangle) \quad \text{minden} \quad \tau \in \text{RAT -ra.}$$

Legyen $\mathfrak{M} \models \pi$. A következő (1) állítás a κ' fordítófüggvény "jelentéstartóságáról" szól:

(1) $\mathfrak{M} \models \varphi[a_0, a_1] \iff \mathfrak{M} \models \kappa'\varphi[a]$, minden $\varphi \in Fm_{\omega}^2$ -ra és minden $a \in \text{Pár}^{\mathfrak{M}}$ -re.

Legyen $\varphi \in Fm_{\omega}^2$ és $a \in \text{Pár}^{\mathfrak{M}}$ tetszőleges. A 3.L szerint $[\mathfrak{M} \models \varphi[a_0,a_1] \iff (a_0,a_1) \in m^{\mathfrak{M}}(\mathbf{g}\varphi)]$, ezért $\kappa'\varphi = \mathbf{h}\mathbf{g}\varphi$ miatt az (1) állítás bizonyításához elég a következő (2) állítást bizonyítani (mely a 3.L analogonja a $\mathbf{h}$ függvényre):

(2) $\mathfrak{M} \models \mathbf{h}\tau[a] \iff (a_0,a_1) \in m^{\mathfrak{M}}(\tau)$, minden $\tau \in \text{RAT}$ -ra.

(Megjegyezzük, hogy $\mathbf{h}\tau \in Fm_3^1$, tehát a $\mathfrak{M} \models \mathbf{h}\tau[a]$ jelölés értelmes.) A (2) állítást τ-ra vonatkozó indukcióval látjuk be. Legyen $R \in \mathcal{R}$. Akkor $\mathbf{h}R = R(x_0,x_1) \circ \varepsilon$, és könnyen ellenőrizhető, hogy $\pi \models R(x_0,x_1)\circ\varepsilon \leftrightarrow R(x_0,x_1)$. Ezért $\mathfrak{M} \models \mathbf{h}R[a] \iff \mathfrak{M} \models R(x_0,x_1)[a] \iff$ ($R(x_0,x_1)$ és $m^{\mathfrak{M}}$ definiciói szerint) $(a_0,a_1) \in R^{\mathfrak{M}} = m^{\mathfrak{M}}R$. Tfh. a (2) állítás teljesül $\tau, \sigma \in \text{RAT}$-ra. Akkor $\mathfrak{M} \models \mathbf{h}(-\tau)[a] \iff \mathfrak{M} \models (\text{pár}(x) \wedge \neg\mathbf{h}(\tau))[a] \iff \mathfrak{M} \models \neg\mathbf{h}(\tau)[a] \iff \mathfrak{M} \not\models \mathbf{h}(\tau)[a] \iff$ (indukciós feltevés szerint) $(a_0,a_1) \notin m^{\mathfrak{M}}(\tau) \iff (a_0,a_1) \in {}^2M \sim m^{\mathfrak{M}}(\tau) = m^{\mathfrak{M}}(-\tau)$. Az $\mathfrak{M} \models \mathbf{h}(\tau+\sigma)[a] \iff (a_0,a_1) \in m^{\mathfrak{M}}(\tau+\sigma)$ állítás hasonlóan látható be. A $\tau;\sigma$ ellenőrzése: $\mathfrak{M} \models h(\tau;\sigma)[a] \iff \mathfrak{M} \models ((\mathbf{h}\tau)\circ(\mathbf{h}\sigma))[a] \iff$ ($\circ$ definiciója szerint[*]) $(\exists c \in M)[a_0 = c_{00}, a_1 = c_{11}, c_{01} = c_{10}, \mathfrak{M} \models \mathbf{h}\tau[c_0],$ $\mathfrak{M} \models \mathbf{h}\sigma[c_1]] \iff$ (mivel $\mathfrak{M} \models \pi$) $(\exists b,d,e \in M)[d_0 = a_0, d_1 = b, \mathfrak{M} \models \mathbf{h}\tau[d],$

---

[*] Felhasználjuk, hogy $\mathfrak{M} \models x_i = y_j[a,b] \iff a_i = b_j$, mert $\mathfrak{M} \models \pi$.

$e_0=b, e_1=a_1$, $\mathfrak{M}\models h\sigma[e]]$ $\iff$ (indukciós feltevés szerint) $(\exists b)[(a_0,b)\in m^{\mathfrak{M}}(\tau),(b,a_1)\in m^{\mathfrak{M}}(\sigma)]$ $\iff$ $(a_0,a_1)\in m^{\mathfrak{M}}(\tau)|m^{\mathfrak{M}}(\sigma)$ $= m^{\mathfrak{M}}(\tau;\sigma)$.
A $\tau^{\cup}$ ellenőrzése teljesen analóg módon végezhető: $\mathfrak{M}\models h(\tau^{\cup})[a]$ $\iff$ $\mathfrak{M}\models (h\tau)^{\circ}[a]$ $\iff$ $(\exists c\in M)[\mathfrak{M}\models (h\tau)[c], a_0=c_1, a_1=c_0]$ $\iff$ (indukciós feltevés szerint) $(a_1,a_0)\in m^{\mathfrak{M}}(\tau)$ $\iff$ $(a_0,a_1)\in m^{\mathfrak{M}}(\tau)^{-1} = m^{\mathfrak{M}}(\tau^{\cup})$. Az (1) és (2) állítást ezzel beláttuk.

Az (1) állításból azonnal következik, hogy $[\mathfrak{M}\models\varphi \iff \mathfrak{M}\models\bar{\varkappa}\varphi]$, minden $\varphi\in Fm^2_\omega$ -ra, és mivel $\models\pi\leftrightarrow Ax$, azért

(3) $\mathfrak{M}\models\varphi$ $\iff$ $\mathfrak{M}\models\varkappa\varphi$, minden $\varphi\in Fm^2_\omega$ -ra, ha $\mathfrak{M}\models\pi$, és

(4) $\models\pi\leftrightarrow Ax^{*}$.

Vegyük észre, hogy $\varkappa\varphi\in Fm^0_3$ minden $\varphi\in Fm^2_\omega$ -ra (hiszen $\varkappa'\varphi\in Fm^1_3$, $Ax^{*}\in Fm^0_3$ és $\varkappa\varphi = \forall x(Ax^{*}\wedge pár(x)\to\varkappa'\varphi))$. Ezért, ha $\varphi\in Fm^0_\omega$, akkor (3) -ból következik $\pi\models\varphi\leftrightarrow\varkappa\varphi$. A 12.T (ii) -t ezzel bizonyítottuk.

Az (i) állítás bizonyítása: Elég azt bizonyítani, hogy $Ax^{*}\models\varphi$ $\iff Ax^{*}\vdash_3\bar{\varkappa}\varphi$, minden $\varphi\in Fm^2_\omega$ -ra, mert (4) fennáll és mert könnyen ellenőrizhető, hogy $\vdash_3\varkappa\varphi\leftrightarrow(Ax^{*}\to\bar{\varkappa}\varphi)$. Az egyik irány: $Ax^{*}\vdash_3\bar{\varkappa}\varphi$ $\Rightarrow$ $Ax^{*}\models\bar{\varkappa}\varphi$ $\Rightarrow$ ((3),(4) miatt) $Ax^{*}\models\varphi$. Most rátérünk a 12.T lényegét képező $Ax^{*}\nvdash_3\bar{\varkappa}\varphi\Rightarrow Ax^{*}\nvDash\varphi$ állítás bizonyítására. Legyen $\approx\stackrel{d}{=}\ \equiv_{Ax^{*}}$ és $\mathfrak{R}\stackrel{d}{=}\mathfrak{Fr}/_{\approx}$. Akkor $\mathfrak{R}$ homomorf képe $\mathfrak{Fr}/\equiv_{Ax}$ -nak, tehát a 9.T szerint $\mathfrak{R}\in RRA$ (mivel RRA zárt homomorfizmusra)*/. Tegyük fel, hogy $Ax^{*}\nvdash_3\bar{\varkappa}\varphi$. Ekkor $Ax^{*}\nvdash_3\forall x(pár(x)\to\varkappa'\varphi)$, tehát $Ax^{*}\nvdash_3 pár(x)\leftrightarrow\varkappa'\varphi$, ami azt jelenti, hogy $\varkappa'\varphi/_{\approx}\neq pár(x)/_{\approx}=1^{\mathfrak{R}}$. Mivel az $\mathfrak{R}$ reprezentálható, van egy U halmaz és egy $r:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}(U)$ homomorfizmus, melyre

(5) $r(\varkappa'\varphi/\approx)\neq U\times U$.

Rögzítsük U -t és r -et úgy, hogy (5) teljesüljön. Megjegyezzük, hogy $\bar{\varkappa}\pi\in Ax^{*}$ miatt

(6) $r(\varkappa'\pi/_{\approx}) = U\times U$.

---

*/Itt nem lenne szükséges használni ezt az erős tételt, hiszen a 9.T -ben azt bizonyítottuk, hogy $\mathfrak{Fr}/\equiv_{Ax}\in QRA$, tehát $\mathfrak{R}\in QRA\subseteq RRA$.

Definiáljuk az $\mathfrak{M}$ modellt a következőképpen:

$$\mathfrak{M} = \langle U, R^{\mathfrak{M}} \rangle_{R\in\mathcal{R}} \quad , \quad \text{ahol} \quad R^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} r(\,\mathbf{h}R/_{\approx}\,)\,.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathfrak{M} \models Ax^{*}$ de $\mathfrak{M} \not\models \varphi$; ebből $Ax^{*} \not\models \varphi$ rögtön adódik. Legyen $H(\tau) \overset{d}{=} r(\mathbf{h}\tau/_{\approx})$, minden $\tau \in RAT$ -ra. Ekkor $H : \underset{\sim}{RAT} \to \mathcal{R}(U)$ homomorfizmus, hiszen $\underset{\sim}{RAT} \xrightarrow{\mathbf{h}} \mathfrak{Fr} \xrightarrow{/\approx} \mathcal{R} \xrightarrow{r} \mathcal{R}(U)$. Mivel $m^{\mathfrak{M}} : \underset{\sim}{RAT} \to \mathcal{R}(U)$ is homomorfizmus és minden $R\in\mathcal{R}$ -re $H(R) = R^{\mathfrak{M}} = m^{\mathfrak{M}}(R)$, azért $m^{\mathfrak{M}}$ és H mindenütt megegyezik, azaz $r(\mathbf{h}\tau/_{\approx}) = m^{\mathfrak{M}}(\tau)$ minden $\tau \in RAT$ -ra. Akkor $\kappa'\psi = \mathbf{h}g\psi$ és $g\psi \in RAT$ szerint

(7) $r(\kappa'\psi/_{\approx}) = m^{\mathfrak{M}}(g\psi)$, minden $\psi \in Fm^{2}_{\omega}$ -ra.

Most (6)-ból és 3.L (ii)-ből, mivel $\pi \in Fm^{2}_{3}$, azt kapjuk, hogy $\mathfrak{M} \models \pi$, így (4) szerint $\mathfrak{M} \models Ax^{*}$ is. Ekkor viszont (5),(7) és 3.L.(ii) -ből azt is kapjuk, hogy $\mathfrak{M} \not\models \varphi$. QED(12. Tétel)

13. MEGJEGYZÉS (i) Mint egy későbbi ellenpéldából látni fogjuk (17. T.(i)), van φ, hogy $\pi \models \varphi$ de $\pi \not\vdash_{3} \bar{\kappa}\varphi$, tehát a 12.T -ben nem lehet κ-t $\bar{\kappa}$-al helyettesíteni, azaz nem lehet Ax^{*} -ot kihagyni a κ definiciójából. Nem tudjuk, hogy Ax^{*} -ot lehet-e Ax -al helyettesíteni a κ definiciójában.

(ii) A 12.T ekvivalens alakjai a következők:

$$\begin{aligned} \pi \models \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \vdash_{3} \kappa\varphi \\ Ax \models \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad Ax \vdash_{3} (\bar{\kappa}\pi \to \bar{\kappa}\varphi), \\ Ax^{*} \models \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad Ax^{*} \vdash_{3} \bar{\kappa}\varphi\,. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy π , Ax és Ax^{*} szemantikusan ekvivalensek. ∎

14. TÉTEL (a [HMT]4.14 Probléma megoldása)

Legyen $1 \le \beta < \omega$, és $3 \le \alpha < \omega$. Akkor $\mathfrak{Fr}_{\beta}\, CA_{\alpha}$ nem atomos, sőt $\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_{\beta} CA_{\alpha}$ sem atomos.

Bizonyítás: Legyen $1 \le \beta < \omega$ és $3 \le \alpha < \omega$. Belátjuk, hogy $\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_{\beta}\, CA_{\alpha}$ nem atomos. Ebből [HMT]1.10.3(i) szerint következik, hogy $\mathfrak{Fr}_{\beta}\, CA_{\alpha}$ sem atomos.

A bizonyítás két részből áll: (I) $\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_{\beta}\, CA_{\alpha}$ atomosságának kérdését visszavezetjük egy $\mathfrak{Fm}^{0}_{\alpha}/_{\equiv}$ formulaalgebra atomosságának kérdésére, és (II) felhasználva a κ fordítófüggvény jó tulajdonságait vala-

m. .sőrendű logika nem-teljességi tételét, bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{Fm}_\alpha$ .em atomos.

(I) Legyen $\mathcal{R}$ (a binér relációjeleink halmaza) olyan, hogy $|\mathcal{R}| = \beta$. Akkor [HMT]4.3.25 szerint $\mathfrak{Fm}_\alpha/\equiv\ \cong \mathfrak{Fr}_\beta^{(\rho)}CA_\alpha$, ahol $\rho = \beta\times\{2\}$. Legyen $\mathfrak{Fm}_\alpha^0 \overset{d}{=} \langle Fm_\alpha^0, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{F}, \mathbf{T}\rangle \in CTA_0$. Megmutatjuk, hogy ($\alpha<\omega$ miatt) $\mathfrak{Fm}_\alpha^0/\equiv\ \cong \mathfrak{Zd}(\mathfrak{Fm}_\alpha/\equiv)$.: Legyen $f \overset{d}{=} \langle \exists v_0 \ldots \exists v_{\alpha-1}\varphi : \varphi\in Fm_\alpha\rangle$. Akkor $f : Fm_\alpha \rightarrow Fm_\alpha^0$ és $\models_\alpha \varphi\leftrightarrow f\varphi$ ha $\varphi\in Fm_\alpha^0$. Ebből könnyen belátható a kívánt izomorfia. Tehát a fentiek szerint $\mathfrak{Fm}_\alpha^0/\equiv\ \cong \mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta^{(\rho)}CA_\alpha$. Elég tehát azt megmutatni, hogy "$\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta^{(\rho)}CA_\alpha$ nem atomos $\Rightarrow$ $\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ nem atomos". Legyen $\mathfrak{A}\in CA_\alpha$ és $b\in A$. Akkor $\mathfrak{Rl}_b\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle\{a\in A : a\le b\}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, -, 0^{\mathfrak{A}}, b, c_i, b\cdot d_{ij}^{\mathfrak{A}}\rangle_{i,j\in\alpha} \in CTA_\alpha$, ahol minden $a\in A$, $a\le b$ és $i\in\alpha$ -ra $-a \overset{d}{=} b -^{\mathfrak{A}} a$ és $c_i a \overset{d}{=} b\cdot c_i^{\mathfrak{A}} a$. ($\mathfrak{Rl}_b\mathfrak{A}$ az $\mathfrak{A}$ b-vel való "relativizáltja".) [HMT]2.5.49 szerint, mivel $\alpha,\beta<\omega$, azért $\mathfrak{Fr}_\beta^{(\rho)}CA_\alpha \cong \mathfrak{Rl}_b\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ valamely $b\in Zd\,\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ -ra. Most [HMT]2.2.12 szerint $\mathfrak{Rl}_b\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha \cong \mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Rl}_b\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha \cong \mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta^{(\rho)}CA_\alpha$, tehát

(1) $\mathfrak{Fm}_\alpha^0/\equiv\ \cong \mathfrak{Rl}_b\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$.

Ismert tény (és könnyű belátni), hogy "$\mathfrak{Rl}_b\mathfrak{B}$ nem atomos $\Rightarrow$ $\mathfrak{B}$ nem atomos" teljesül minden $\mathfrak{B}$ Boole-algebrára és $b\in B$ -re. Tehát "$\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta^{(\rho)}CA_\alpha$ nem atomos $\Rightarrow$ $\mathfrak{Zd}\,\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ nem atomos", és ezt akartuk belátni*/. Tehát (1) szerint elég belátni, hogy $\mathfrak{Fm}_\alpha^0/\equiv$ nem atomos.

(II) Idézzük fel a logika könyvekből (pl. [M76] Def.15.7,p.266), hogy egy $\lambda\in Fm_\omega^{\Lambda,0}$ formulát nem-szeparálhatónak (inszeparábilisnek) nevezünk, ha nincs olyan rekurzív $T\subseteq Fm_\omega^{\Lambda,0}$ formulahalmaz, melyre $\{\varphi\in Fm_\omega^{\Lambda,0} : \lambda\models\varphi\} \subseteq T \subseteq \{\varphi\in Fm_\omega^{\Lambda,0} : \lambda\not\models\neg\varphi\}$. Ismert tény, a Gödel nem-teljességi tételhez kapcsolódóan szokás bizonyítani, hogy van nem-szeparálható λ formula, pl. az aritmetikának is és a halmazelméletnek is van véges nem-szeparálható elmélete. Nekünk itt azonban ennél többre lesz szükségünk, nevezetesen arra, hogy

(i) csak egyetlen kétargumentumú relációjelet használjunk, és

(ii) legyen $\lambda\wedge\pi$ konzisztens (szemantikailag) valamely $p_0, p_1\in Fm_3^2$ formulákhoz tartozó π-re.

---

*/A [HMT]-ből itt idézett 2.5.49 és 2.2.19 tételek bizonyítása nem nehéz.

A logikairodalmat ismerve nem nehéz olyan λ nem-szeparálható formulát találni, amely ráadásul még (i)-(ii) -t is teljesíti, az alábbiakban vázolunk egy ilyen λ nem-szeparálható formulát.

A most következő részben E -t (a "kitüntetett" kétargumentumú relációjelünket) $\in$ -nal fogjuk jelölni, az intuició megtámogatása végett. A halmazelmélet szokásos jelöléseit fogjuk használni, pl. $x=\{y\}$ azt jelenti, hogy "$\forall z(z\in x \leftrightarrow z=y)$" stb. Definiáljuk a következő formulákat:

$0(x) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ "x az üres halmaz" $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall y\, y\notin x$.

$s(x,y) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ "y az x rákövetkezője" $\overset{df}{\Longleftrightarrow} y=x\cup\{x\}$,

$\omega(x) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ "x a legkisebb halmaz, melynek az üres halmaz eleme és mely zárt rákövetkezőre" ,

$+(x,y,z) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ "z az x és y diszjunkt úniója" $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists w(z=x\cup w,\ x\cap w=0,$ van egy bijekció y és w között),

$\cdot(x,y,z) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ "van egy bijekció z és $x\times y$ között".

Legyen F_n az az elsőrendű nyelv, melynek jelei a $0,s,+,\cdot$ rendre 0,1,2 és 2-argumentumú függvényjelek. A fenti $0(x),\ldots$ formulák segítségével definiáljuk a $tr : F_n \to Fm_\omega$ fordítófüggvényt a következőképpen: Legyen $\varphi\in F_n$. Előbb relativizáljuk φ-t V -re, ahol V egy tetszőleges egyargumentumú relációjel, majd az így kapott φ^V formulában a 0, $s,+,\cdot,V$ helyett rendre beírjuk a $0(x),\ldots,\omega(x)$ formulákat a szokásos módon (itt most nem térünk ki a részletekre); $tr(\varphi)$ az így kapott formula Fm_ω-beli alakja (ld. pl. [HMT]4.3.6).

[M76] Def.14.17, Prop.14.18, Thm.16.1 szerint van inszeparábilis $Q\in F_n$, úgy hogy $\underset{\sim}{N}\models Q$ ahol $\underset{\sim}{N}=\langle\omega,0,s,+,\cdot\rangle$ a "sztenderd aritmetika". Legyen $\lambda \overset{d}{=} tr(Q)\wedge$ "$0(x),s(x,y),+(x,y,z),\cdot(x,y,z)$ rendre 0,1,2 és 2-argumentumú függvények $\omega(x)$ -en". Nem nehéz belátni, hogy λ nem-szeparálható, mert Q az és mert tr rekurzív. λ teljesíti már (i)-t. Következőképp megadjuk $p_0,p_1\in Fm_3^2$ -at. A p_0,p_1 megadásánál ügyelnünk kell arra, hogy csak 3 változójelet használjunk. Intuitíve, $p_0(x,y) \overset{d}{=}$ "$\exists z(x=\langle y,z\rangle)$" és $p_1(x,y) \overset{d}{=}$ "$\exists z(x=\langle z,y\rangle)$" lesz, ahol $\langle x,y\rangle \overset{d}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$. Ezeket a definiciókat most részletesen kiírjuk annak ellenőrzésére, hogy Fm_3^2 -beli formulát kapjunk végül.

Legyen $u,v\in\{x,y,z\}$. Az alábbiakban $u\epsilon v$ azt jelöli, hogy $\epsilon(\!(u,v)\!)$, ahol $\epsilon \overset{d}{=}$ "$x\epsilon y$", és ha pl. $\{x\}\epsilon y$ -al jelölünk egy $\chi\in Fm_3^2$ formulát, akkor $\{u\}\epsilon v$ -vel $\chi(\!(u,v)\!)$ -t jelöljük.

$$x=\{y\} \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall z(z\epsilon x \leftrightarrow z=y)\ ,$$

$$\{x\}\epsilon y \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists z(z=\{x\},z\epsilon y)\ ,$$

$$x=\{\{y\}\} \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists z(z=\{y\},x=\{z\})\ ,$$

$$x\epsilon\cup y \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists z(x\epsilon z,z\epsilon y)\ ,$$

$$\text{pár}(x) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists y\forall z(\{z\}\epsilon x \leftrightarrow y=z)\ ,\ \forall yz[(y\epsilon\cup x,\{y\}\notin x,z\epsilon\cup x,\{z\}\notin x)\to y=z],$$
$$\forall y\exists z(y\epsilon x \to z\epsilon y)\ ,$$

$$p_0(x,y) \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\text{pár}(x)\wedge\{y\}\epsilon x)\ ,$$

$$p_1(x,y) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \text{pár}(x)\wedge[x=\{\{y\}\}\vee(y\epsilon\cup x,\{y\}\notin x)]\ .$$

Tehát $p_0,p_1\in Fm_3^2$ -at megadtuk. Legyen a π formula ezzel a p_0,p_1 -el felírva. Megmutatjuk, hogy $\lambda\wedge\pi$ konzisztens. Legyen $\mathcal{H} \overset{d}{=} \cup\{H_n : n\in\omega\}$ ahol $H_0 \overset{d}{=} \omega$ és $H_{n+1} \overset{d}{=} H_n\cup(H_n\times H_n)$. Akkor nem nehéz leellenőrizni, hogy $\langle\mathcal{H},\in\rangle\models\lambda\wedge\pi$. Tehát λ teljesíti mind (i) mind (ii) -t.

Legyen tehát mostantól $\lambda\in Fm_\omega^0$ és $p_0,p_1\in Fm_3^2$ rögzítve úgy, hogy λ nem-szeparálható és $\lambda\wedge\pi$ -nek van modellje.

Legyen $\psi \overset{d}{=} Ax^*\wedge\kappa\lambda$. Akkor $\psi\in Fm_3^0$. Megmutatjuk, hogy $\psi/\equiv$ alatt nincs atom az $\mathfrak{F} \overset{d}{=} \mathfrak{Fm}_\alpha^0/\equiv$ formulaalgebrában. Indirekte, tegyük fel, hogy mégis, $\delta/\equiv\ \leq \psi/\equiv$ és $\delta/\equiv$ atom $\mathfrak{F}$-ben valamely $\delta\in Fm_\alpha^0$ -ra. Legyen $T \overset{d}{=} \{\varphi\in Fm_\omega^0 : \vdash_\alpha \delta\to\kappa\varphi\}$. Be fogjuk látni, hogy T rekurzívan szeparálja λ következményeit a λ következményeinek negáltjaitól, ami ellentmond λ választásának. Először azt mutatjuk meg, hogy

(2) T rekurzív .

Mivel a κ függvény rekurzív, azért $\vdash_\alpha$ definiciója miatt T rekurzívan felsorolható. Elég tehát belátni, hogy T komplementuma is rekurzívan felsorolható. Ez abból fog következni, hogy $\delta/\equiv$ atom: Tegyük fel, hogy $\varphi\in Fm_\omega^0\sim T$. Akkor $\not\vdash_\alpha \delta\to\kappa\varphi$, azaz $\delta/\equiv\ \not\leq \kappa\varphi/\equiv$. Mivel $\delta/\equiv$ atom, ebből az következik, hogy $\delta/\equiv\ \leq\neg\kappa\varphi/\equiv$, azaz $\vdash_\alpha \delta\to\neg\kappa\varphi$. Mivel $\delta/\equiv$ atom, azért $\not\vdash_\alpha \delta\to \mathbf{F}$, emiatt

(3) $\vdash_{\alpha} \delta \to \varkappa\varphi \;\Rightarrow\; \not\vdash_{\alpha} \delta \to \neg\varkappa\varphi$.

A fentiekből adódik, hogy $Fm^0_\omega \sim T = \{\varphi \in Fm^0_\omega : \vdash_{\alpha} \delta \to \neg\varkappa\varphi\}$, amiről könnyen látni, hogy szintén rekurzívan felsorolható. Tehát beláttuk, hogy T rekurzív.

A jelen bizonyítás további részeiben szükségünk lesz a $\varkappa$ függvény alábbi tulajdonságaira[*/]:

(4) $\vdash_3 \varkappa(\varphi \to \psi) \to (\varkappa\varphi \to \varkappa\psi)$

(5) $Ax^* \vdash_3 \varkappa(\neg\varphi) \to \neg\varkappa\varphi$, és

(6) $\vdash_3 \varkappa(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varkappa\varphi \wedge \varkappa\psi)$, minden $\varphi,\psi \in Fm^0_\omega$ -ra.

A (4)-(6) bizonyításában használni fogjuk a 9.T bizonyításában bevezetett megállapodásokat $\vdash_3$ -bizonyítások prezentálására. Legyen $\varphi,\psi \in Fm^0_\omega$. Vegyük észre, hogy **h** , **g** tulajdonságai miatt

(*) $\varkappa'(\varphi \vee \psi) = \varkappa'\varphi \vee \varkappa'\psi$, $\varkappa'(\neg\varphi) = \text{pár}(x) \wedge \neg\varkappa'\varphi$, $\varkappa'(\varphi \wedge \psi) = \varkappa'\varphi \wedge \varkappa'\psi$,
és $\varkappa'(\varphi \to \psi) = (\text{pár}(x) \wedge \neg\varkappa'\varphi) \vee \varkappa'\psi$.

Legyen $\chi(x) \overset{d}{=} Ax^* \wedge \text{pár}(x)$. Akkor $\varkappa\varphi = \forall x(\chi(x) \to \varkappa'\varphi)$ minden $\varphi \in Fm^0_\omega$ -ra. Most

$\chi(x) \to \varkappa'(\varphi \to \psi) \vdash$ (*),(BA)
$(\chi(x) \to \varkappa'\varphi) \to (\chi(x) \to \varkappa'\psi)$,

tehát (D),(G),(2) -vel ebből megkapjuk (4)-et. (CA)-val kapjuk, hogy

(**) $\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x \neg\varphi$, minden φ-re, tehát

$\varkappa(\neg\varphi) \vdash$ definició,(*),(BA)
$\forall x(\chi(x) \to \neg\varkappa'\varphi) \vdash$ (**),(BA)
$\neg\exists x(\chi(x) \wedge \varkappa'\varphi)$,

$Ax^* \vdash$ definició,(CA)
$Ax^* \wedge \exists x\,\text{pár}(x) \vdash$ definició,(CA),(SZV)
$\exists x\chi(x) \vdash$ (CA)
$\exists x(\chi(x) \wedge \varkappa'\varphi) \vee \exists x(\chi(x) \wedge \neg\varkappa'\varphi)$, tehát

---
[*/] A (6) tulajdonságra csak később lesz szükségünk, hasonló természete miatt érdemes mégis itt bizonyítani (4,),(5) -el együtt.

$\varkappa(\neg\varphi)$ ⊢ a fenti két levezetés, Ax^*
$\exists x(\chi(x)\wedge\neg\varkappa'\varphi)$ ⊢ (BA),(KV),(9)
$\neg\forall x(\chi(x)\to\varkappa'\varphi)$ ⊢ definició
$\neg\varkappa\varphi$.

Ezzel (5)-öt bizonyítottuk.

$\varkappa(\varphi\wedge\psi)$ ⊢ definició,(*),(BA)
$\forall x([\chi(x)\to\varkappa'\varphi]\wedge[\chi(x)\to\varkappa'\psi])$ ⊢ (CA), definició
$\varkappa\varphi\wedge\varkappa\psi$,

és $\varkappa\varphi\wedge\varkappa\psi\to\varkappa(\varphi\wedge\psi)$ bizonyítása teljesen ugyanúgy végezhető, mint fent, csak az ellenkező irányban haladva. Ezzel (6)-ot beláttuk.

Visszatérünk most annak bizonyítására, hogy

(7) $\lambda\models\varphi \implies \varphi\in T$, minden $\varphi\in Fm^0_\omega$-ra.

Tegyük fel, hogy $\varphi\in Fm^0_\omega$ olyan, hogy $\lambda\models\varphi$. Akkor $\models\lambda\to\varphi$, speciálisan $\pi\models\lambda\to\varphi$, és ekkor a 12.T szerint $\vdash_3\varkappa(\lambda\to\varphi)$, tehát (4) szerint $\vdash_3$ $\varkappa\lambda\to\varkappa\varphi$, a (MP) szerint $\varkappa\lambda\vdash_3\varkappa\varphi$. Ekkor $Ax^*\wedge\varkappa\lambda\vdash_3\varkappa\varphi$, vagyis $\varphi\vdash_3\varkappa\varphi$. Namármost $\delta/_\equiv\leq\psi/_\equiv$ azt jelenti, hogy $\vdash_\alpha\delta\to\psi$, tehát $\vdash_\alpha\delta\to\varkappa\varphi$, azaz $\varphi\in T$.

Következőként azt bizonyítjuk, hogy

(8) $\lambda\models\neg\varphi \implies \varphi\notin T$.

Tfh. $\lambda\models\neg\varphi$. Akkor $(\neg\varphi)\in T$, azaz $\vdash_\alpha\delta\to\varkappa(\neg\varphi)$, a fenti (7) szerint. Ekkor $\vdash_\alpha\delta\to\psi$ miatt $\vdash_\alpha\delta\to Ax^*$, és így $\vdash_\alpha\delta\to\varkappa(\neg\varphi)$ és (5) szerint $\vdash_\alpha\delta\to\neg\varkappa\varphi$, ekkor (3) szerint $\not\vdash_\alpha\delta\to\varkappa\varphi$, azaz $\varphi\notin T$.

A fenti (2),(7),(8) állítások ellentmondanak λ választásának, tehát $\mathfrak{F}$-ben nincs atom $\psi/_\equiv$ alatt. Ahhoz, hogy $\mathfrak{F}$ nem atomos, tehát csak azt kell még belátni, hogy $\psi/_\equiv\neq 0$ $\mathfrak{F}$-ben. Ez utóbbi abból következik, hogy $\lambda\wedge\pi$-nek van modellje.: A 12.T(ii) és a 12.T bizonyításabeli (4) szerint $\models(\lambda\wedge\pi)\leftrightarrow(\varkappa\lambda\wedge Ax^*)$, azaz ψ-nek is van modellje és ezért $\psi/_\equiv\neq 0$ $\mathfrak{F}$-ben. QED(14. Tétel)

Rátérünk a 9,12.T diszkussziójára. A 14.T diszkussziója tulajdonképpen megtörtént a II.1 fejezetben. A következő 15,17.T bizonyításában az algebrai gondolatok lényegesek, ilyen tipusú bizonyításokban a cilindrikus algebrák nélkülözhetetlenek.

A következő 15.T (i)-(ii) pontja azt mutatja meg, hogy nem írhattunk volna Ax helyett π-t a 9.T -ben, (iii) azt mutatja, hogy nem írhattunk volna Fm_3^1 -at az Ev helyett és (iv) azt mutatja, hogy szükséges volt a kompozíció szokásos ; definicióját kicserélni a mi "egyváltozós" $\circ$ kompozíciónkra. Megjegyezzük, hogy az ismert volt, hogy ; asszociativitása nem $\vdash_3$ -bizonyítható (McKinsey 1950 körül bizonyította) de az nem volt ismert, hogy π mellett $\vdash_3$ -bizonyítható-e vagy sem. A 15.T (iii) -al kapcsolatban megjegyezzük, hogy valószínűnek látszik, hogy $Ax^* \not\vdash_3 \varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon \to \varphi(x_0,x_1)$ is igaz valamely φ -re. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy noha nincs expliciten feltüntetve, π-nek, Ax -nak és $\mathcal{E}v$ -nek paramétere a $p_0,p_1 \in Fm_3^2$.

<u>15. TÉTEL</u> (a 9.T diszkussziója)

(i) $\pi \not\vdash_3 Ax$ valamely $p_0,p_1 \in Fm_3^2$ -ra; sőt

(ii) $\mathcal{E}v/{\equiv_\pi} \notin RA$, nevezetesen

$\pi \not\vdash_3 (\varphi\circ\psi)\circ\gamma \leftrightarrow \varphi\circ(\psi\circ\gamma)$ valamely $\varphi,\psi,\gamma\in Ev$ és $p_0,p_1 \in Fm_3^2$ esetén.

(iii) $\pi \not\models \varphi\circ\varepsilon \to \varphi$, $\pi \not\models \varphi^{\cup\cup} \to \varphi$ valamely $\varphi \in Fm_3^1$ és $p_0,p_1 \in Fm_3^2$ esetén, ahol ráadásul φ még $pár(x)\land\psi$ alakú is; és

$\pi \not\vdash_3 \varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon \to \varphi(x_0,x_1)$ valamely $p_0,p_1,\varphi \in Fm_3^2$ esetén.

(iv) $\overline{Ax} \not\vdash_3 (\varphi;\psi);\gamma \leftrightarrow \varphi;(\psi;\gamma)$ valamely $\varphi,\psi,\gamma\in Fm_3^2$ és $p_0,p_1 \in Fm_3^2$ esetén, ahol $\varphi;\psi \overset{d}{=} \exists z(\varphi(\!(x,z)\!) \land \psi(\!(z,y)\!))$ a "szokásos" kompozíció és $Ax \subseteq \overline{Ax}$ a π egy erős kiterjesztése, ld. a következő 16.D -t.

A 15.T -t a következő 17.T -el együtt bizonyítjuk. ∎

<u>16. DEFINICIÓ</u> (i) $\mathcal{K} \overset{d}{=} \kappa^* Fm_\omega^0$.

(ii) Legyen $T \subseteq Fm_\omega^0$, $\varphi \in Fm_\omega^0$. Akkor $T \models_\pi \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} T\cup\{\pi\} \models \varphi$.

(iii) Legyen H egy tetszőleges halmaz. Definiáljuk:

$P_0(H) \overset{d}{=} H$, $P_{n+1}(H) \overset{d}{=} P_n(H)\cup(P_n(H)\times P_n(H))$, $P_\omega(H) \overset{d}{=} \bigcup\{P_n(H) : n\in\omega\}$,

legyen $U \overset{d}{=} P_\omega(H)$, akkor

$pj_0^H \overset{d}{=} \{(a,b)\in {}^2U : (\exists c\in U)a=(b,c)\}$ és

$pj_1^H \overset{d}{=} \{(a,b)\in {}^2U : (\exists c\in U)a=(c,b)\}$, azaz pj_0^H, pj_1^H a szokásos halmazelméleti projekciófüggvények[x] $P_\omega(H)$ -n.
Legyen $\mathfrak{h}$ az a relációs tipus, melyben 2 db. kétargumentumú relációjel van, p és q, azaz $\mathfrak{h} = \{p,q\}\times\{2\}$. Akkor

$$\mathfrak{G}(H) \overset{d}{=} \langle P_\omega(H), pj_0^H, pj_1^H\rangle \in Mod(\mathfrak{h}) \text{ [xx]}.$$

$\mathfrak{G}(H)$ -t <u>sztenderd projekciómodellnek</u> nevezzük.

(iv) Legyen $\overline{Ax}'$ a p,q projekciópár "sztenderd elmélete", azaz $\overline{Ax}'$ a p,q -ról szóló összes olyan háromváltozós elsőrendű formula halmaza, mely igaz a $\mathfrak{G}(\omega)$ sztenderd modellben.: Legyen $\Lambda=\langle 3,\mathfrak{h}\rangle$, akkor

$$\overline{Ax}' \overset{d}{=} \{\varphi\in Fm_3^{\Lambda,0} : \mathfrak{G}(\omega)\models\varphi\}.$$

Legyen $p_0,p_1\in Fm_3^2$ és $\varphi\in Fm_3^{\Lambda,0}$. Akkor $\varphi(p_0,p_1)\in Fm_3^0$ az a formula, melyet úgy kapunk φ-ből, hogy $p(x,y)$, $q(x,y)$ helyébe mindenütt p_0, p_1-et írunk. Most

$$\overline{Ax} \overset{d}{=} \overline{Ax}(p_0,p_1) \overset{d}{=} \{\varphi(p_0,p_1) : \varphi\in\overline{Ax}'\}, \qquad \overline{Ax}^{*} \overset{d}{=} \overline{Ax}\cup\{\bar{\varkappa}\pi\}.$$

Tehát $\overline{Ax}$, $\overline{Ax}^{*}\subseteq Fm_3^0$.

(v) $\mathfrak{R}_H$ jelöli azt a relációalgebrát, amit pj_0^H és pj_1^H generál, azaz $\mathfrak{R}_H \overset{d}{=} \mathfrak{S}\mathfrak{g}^{(\mathfrak{R})}\{pj_0^H, pj_1^H\}$, ahol $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P_\omega(H))$.

(vi) Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}\in CA_3$ erős kváziprojektív, jelben $\mathfrak{A}\in\bar{Q}CA_3$, ha $\mathfrak{Rn}\,\mathfrak{A}$ -nak van $\mathfrak{R}_\omega$-val izomorf részalgebrája.

$${}_1\bar{Q}CA_3 \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in CA_3 : \mathfrak{R}_\omega\in \mathbf{IS}\{\mathfrak{Rn}\,\mathfrak{A}\} \text{ és } (\exists e\in Nr_2\mathfrak{A})A=Sg\{e\}\}. \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy van olyan L.3-t teljesítő $\mathfrak{g}$, melyre $\mathcal{K}$ rekurzív. Továbbá $\overline{Ax}$ a π-nek egy olyan megerősítése, melynél erősebbet már nem is célszerű feltenni (ha projekciófüggvényekről akarunk beszélni). Megjegyezzük továbbá, hogy $\overline{Ax}$ definiciójában $\mathfrak{G}(\omega)$ helyett használhattuk volna $\mathfrak{G}(n)$ -et is, tetszőleges $4\leq n\in\omega$ -ra. Noha más formulahalmazt kaptunk volna, a következő 17.T ugyanúgy igaz maradt volna. Az erős kváziprojektív CA_3 fogalma a kváziprojektív RA fogalmának általánosítása.

---

[x] Némi eltérés lehet, ha H elemei között már eleve vannak párok - de ez a mi szempontunkból nem érdekes, mert H-t a legtöbbször $n\leq\omega$-nak választjuk majd.

[xx] Ismét rögzítettünk egy sorrendet, az első reláció p-nek és a második a q-nak megfelelő.

Azt mondjuk, hogy "p_0,p_1,ε jó", ha $p_0,p_1 \in Fm_3^2$ és $\varepsilon : Fm_3^2 \to RAT$ teljesíti a 3.L -ban kimondott tulajdonságokat. Megjegyezzük, hogy $\pi \wedge Ax \in \overline{Ax}$, de általában $Ax^* \notin \overline{Ax}$, mivel általában $\mathcal{K}\pi \notin \overline{Ax}$. (Sőt valószínüleg $\overline{Ax} \not\vdash_3 \mathcal{K}\pi$ valamely jó p_0,p_1,ε esetén.)

A következő 17.T (i) pontja azt mutatja, hogy Ax^* -ot nem lehet elhagyni a $\varkappa$ definiciójából, (ii)-(iii) azt mutatják, hogy 12.T (ii)-ben $\models$ -t nem lehet $\vdash_3$ -ra cserélni, még a kváziprojektív függvényekre tett "legerősebb" feltételek mellett sem. A (iv),(vi) állítások a 12.T (i) lehetséges erősítései: (iv) teljességi tétel a $\langle \mathcal{K}, \models_\pi \rangle$ nyelvre és (vi) tetszőleges formulahalmazok következményeit vizsgálja. Az (v), (vii) állítások azt mutatják, hogy (iv)-ben $\mathcal{K}$-t nem lehet Fm_3^0 -ra és (vi)-ben $\varkappa^*T$ -t nem lehet T -re cserélni. A (viii) állítás azt mutatja, hogy Tarski $QRA \subseteq RRA$ tétele nem terjed ki CA_3 -ra. Lényeges tartalmi oka van annak, hogy miért került a (viii) állítás a 12.T diszkussziójába - erről és a 17.T állításainak (valamint a II. fejezet többi eredményének) a [TG] könyvbeli eredményekkel, problémákkal való kapcsolatáról szól a 17.T utáni 18.Mj.

<u>17.TÉTEL</u> (a 12.T diszkussziója)

(i) $\pi \models \varphi$ és $\pi \not\vdash_3 \overline{\varkappa}\varphi$ valamely $\varphi \in Fm_3^2$ és jó p_0,p_1,ε esetén.

(ii) $\pi \not\vdash_3 \varphi \leftrightarrow \varkappa\varphi$ valamely $\varphi \in Fm_3^0$ és jó p_0,p_1,ε -re, sőt

(iii) a) $\overline{Ax}^* \not\vdash_3 \varphi \to \varkappa\varphi$ valamely $\varphi \in Fm_3^0$ és jó p_0,p_1,ε esetén, és

b) $\overline{Ax}^* \not\vdash_3 \varkappa\varphi \to \varphi$ valamely $\varphi \in Fm_3^0$ és jó p_0,p_1,ε esetén.

(iv) $T \models_\pi \varphi \iff T \vdash_3 \varphi$, minden $T \subseteq \mathcal{K} \ni \varphi$ esetén.

(v) $T \models \varphi \;\not\Rightarrow\; T \vdash_3 \varphi$ valamely $\overline{Ax}^* \subseteq T \subseteq Fm_3^0$, $\varphi \in \varkappa^* Fm_3^0$ és jó p_0,p_1,ε -re.

(vi) $T \models_\pi \varphi \iff \varkappa^* T \vdash_3 \varkappa\varphi$, minden $T \subseteq Fm_\omega^0 \ni \varphi$ esetén.

(vii) $T \models \varphi \;\not\Rightarrow\; T \vdash_3 \varkappa\varphi$ és $T \models \varkappa\psi \;\not\Rightarrow\; T \vdash_3 \psi$, valamely $\overline{Ax}^* \subseteq T \subseteq Fm_3^0 \ni \varphi,\psi$ és jó p_0,p_1,ε esetén.

(viii) ${}_1\tilde{Q}CA_3 \not\subseteq RCA_3$.

A 15. és 17. Tétel bizonyítása:

A 17.T (ii)-(viii) bizonyítása:: Először a "pozitív" állításokat, azaz (iv)-et és (vi)-ot bizonyítjuk. (vi) bizonyítása: Legyen $T\subseteq Fm^0_\omega \ni \varphi$. Tfh. $T\models_{\pi}\varphi$. A kompaktsági tétel miatt ekkor van véges $T_0\subseteq T$, hogy $\pi\models \bigwedge T_0\to\varphi$. A 12.T szerint ekkor $\vdash_3 \mathcal{K}(\bigwedge T_0\to\varphi)$, a 14.T bizonyításában szereplő (4),(6) állítások miatt $\vdash_3 \bigwedge\mathcal{K}^* T_0\to\mathcal{K}\varphi$, és (MP)-vel ekkor $\mathcal{K}^*T\vdash_3\mathcal{K}\varphi$. A $\vdash_3$ bizonyítási rendszer "épsége" miatt $\mathcal{K}^*T\vdash_3\mathcal{K}\varphi$ -ből $\mathcal{K}^*T\models\mathcal{K}\varphi$ következik, ekkor a 12.T (ii) miatt $T\models_{\pi}\varphi$. A (vi) állítást beláttuk. (iv) bizonyítása: Legyen $T\cup\{\varphi\}\subseteq\mathcal{K}$. Ekkor $T=\mathcal{K}^*\Sigma$ és $\varphi=\mathcal{K}\psi$ valamely $\Sigma\cup\{\psi\}\subseteq Fm^0_\omega$ -ra. Tfh. $T\models_{\pi}\varphi$, aazaz hogy $\mathcal{K}^*\Sigma\models_{\pi}\mathcal{K}\psi$. Ekkor a 12.T (ii) miatt $\Sigma\models_{\pi}\psi$, és a 17.T (vi) szerint $\mathcal{K}^*\Sigma\vdash_3\mathcal{K}\psi$, azaz $T\vdash_3\psi$. Nyilvánvalóan ($\vdash_3$ épsége miatt), $T\vdash_3\varphi$ -ből $T\models_{\pi}\varphi$ következik. Beláttuk (iv)-et is.

A "negatív" állításokat két lépésben bizonyítjuk: Első lépésben megmutatjuk, hogy mindegyik következik az algebrai (viii) állítás egy erősebb (viii)′ változatából, melyet a második lépésben bizonyítunk.

Jelölje (viii)′ a következő állítást:

(viii)′ van $\mathfrak{A}\in CA_3\sim RCA_3$, $m:\mathfrak{R}_\omega \twoheadrightarrow \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$, $e\in Nr_2\mathfrak{A}$ és jó p_0,p_1,ε hogy $t(\mathfrak{K}\pi)=1^{\mathfrak{A}}$, $t(p_0)=m(pj^\omega_0)$, $t(p_1)=m(pj^\omega_1)$ és $A=Sg\{e\}$, ahol $t:\mathfrak{Fm}_3\to\mathfrak{A}$, $t(\mathbf{E}(x,y))=e$.

A következő 17.1 lemmában szereplő (iii) stb. állítások a 17.T megfelelő állításait jelentik.

17.1. LEMMA

(1) (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vii) , (iii) $\Rightarrow$ (ii)

(2) (iii)a) $\Longleftrightarrow$ (iii)b) $\Longleftrightarrow$ (viii)′ $\Rightarrow$ (viii) .

Bizonyítás: (iii) $\Rightarrow$ (v) bizonyítása: Tfh. $\overline{Ax}^*\not\vdash_3\varphi\to\mathcal{K}\varphi$. Legyen $T\overset{d}{=}\{\psi\in Fm^0_3 : \overline{Ax}^*\cup\{\varphi\}\vdash_3\psi\}$. Akkor $\overline{Ax}^*\subseteq T\subseteq Fm^0_3$ és $\varphi\in T$. A 12.T (ii) miatt (mivel $\pi\in\overline{Ax}\subseteq T$), ekkor $T\models\mathcal{K}\varphi$, $\mathcal{K}\varphi\in\mathcal{K}^*Fm^0_3$. Megmutatjuk, hogy $T\not\vdash_3\mathcal{K}\varphi$. Feltételezésünk szerint $\overline{Ax}^*\not\vdash_3\varphi\to\mathcal{K}\varphi$, tehát a dedukciós tétel miatt $\overline{Ax}^*\cup\{\varphi\}\not\vdash_3\mathcal{K}\varphi$, a T definiciója szerint tehát

$T \not\vdash_3 \varkappa\varphi$. Beláttuk (iii) $\Rightarrow$ (v) -öt. (v) $\Rightarrow$ (vii) bizonyítása: Tfh. (v) teljesül, azaz $T \models \varphi$ és $T \not\vdash_3 \varphi$ valamely $\overline{Ax}^{*} \subseteq T \subseteq Fm_3^0$ és $\varphi \in \varkappa^{*}Fm_3^0$ esetén. Akkor $\varphi = \varkappa\psi$ valamely $\psi \in Fm_3^0$ -ra. Most a 12.T (ii) miatt $T \models \psi$ és $T \models \varkappa\varphi$. Ugyanakkor $\varphi,\psi \in Fm_3^0$ és $T \not\vdash_3 \varkappa\psi$, $T \not\vdash_3 \varphi$, tehát (vii) teljesül. A (iii) $\Rightarrow$ (ii) nyilvánvaló mert $\overline{Ax}^{*} \vdash_3 \pi$. Ugyanígy, (viii)$'$ $\Rightarrow$ (viii) nyilvánvalóan teljesül. (viii)$'$ $\Rightarrow$ (iii) bizonyítása: Legyen $\mathfrak{A}$, m, e, t és p_0, p_1, ε olyan mint a (viii)$'$ kimondásában. Legyen $T \stackrel{d}{=} \{\varphi \in Fm_3^0 : t(\varphi) = 1^{\mathfrak{A}}\}$. Megmutatjuk először, hogy $\overline{Ax}(p_0,p_1) \subseteq T$. Legyen $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{G}(\omega)$ "jelentésalgebrája", azaz legyen $U \stackrel{d}{=} P_\omega(\omega)$, $\bar{p} \stackrel{d}{=} \{(u,v,w) \in {}^3U : (u,v) \in pj_0^\omega\}$, $\bar{q} \stackrel{d}{=} \{(u,v,w) \in {}^3U : (u,v) \in pj_1^\omega\}$ és $\mathfrak{B} \stackrel{d}{=} \mathfrak{Gs}_3^{(\mathfrak{Sb}\,{}^3U)}\{\bar{p},\bar{q}\}$. [HMT]5.3.12 szerint $Nr_2\mathfrak{B} = Sg^{(\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{B})}\{\bar{p},\bar{q}\}$, azaz $\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{B} \cong \mathfrak{R}_\omega$. Maddux[Ma78]10.8.T (p.136) tétele szerint minden RA-t (SA -t) csak egyféleképpen lehet CA_3 -ba "beágyazni", azaz van $f : \mathfrak{B} \rightarrowtail \mathfrak{A}$ izomorf beágyazás, melyre $f(\bar{p}) = t(p_0)$, $f(\bar{q}) = t(p_1)$. Legyen $\varphi \in Fm_3^{\Lambda,0}$ (ahol $\Lambda = \langle 3, h \rangle$ mint a 16.D -ban) olyan, hogy $\mathfrak{G}(\omega) \models \varphi$. Legyen $t' : \mathfrak{Fm}_3^{\Lambda} \to \mathfrak{B}$, $t'(p(x,y)) = \bar{p}$, $t'(q(x,y)) = \bar{q}$. Akkor $t'(\varphi) = 1^{\mathfrak{B}}$, tehát $ft'(\varphi) = 1^{\mathfrak{A}}$. Mivel $ft'(p(x,y)) = t(p_0)$ és $ft'(q(x,y)) = t(p_1)$, ebből $t(\varphi(p_0,p_1)) = 1^{\mathfrak{A}}$ következik. Tehát $\varphi(p_0,p_1) \in T$. Beláttuk, hogy $\overline{Ax} \subseteq T$. A (viii)$'$ szerint $t(\bar{\varkappa}\pi) = 1^{\mathfrak{A}}$, tehát $\bar{\varkappa}\pi \in T$, és így $\overline{Ax}^{*} \subseteq T$. Mivel $\mathfrak{A} \notin RCA_3$, azért van $\varphi \in Fm_3^0$, hogy $\models \varphi$ de $t(\varphi) \neq 1^{\mathfrak{A}}$. (Mert ellenkező esetben $\mathfrak{A}$ homomorf képe lenne ${}_s\mathfrak{Fm}_3 \stackrel{d}{=} \mathfrak{Fm}_3/{}_s{\equiv}$ -nak, ahol ${}_s{\equiv} \stackrel{d}{=} \{(\varphi,\psi) \in {}^2Fm_3 : \models \varphi \leftrightarrow \psi\}$, és [HMT] 4.3.16,3.1.107,108 szerint ${}_s\mathfrak{Fm}_3 \in RCA_3 = \mathbf{H}RCA_3$.)

Mivel $\varphi \in Fm_3^0$, azért $t(\varphi) \in Zd^{\mathfrak{A}}$. Legyen $a \stackrel{d}{=} -t(\varphi)$ és $rl_a \stackrel{d}{=} \langle a \cdot c : c \in A \rangle$. [HMT]2.3.26 szerint rl_a homomorfizmus. Legyen $\mathfrak{A}' \stackrel{d}{=} rl_a{}^{*}\mathfrak{A}$, $t' \stackrel{d}{=} t \circ rl_a$ és $T' \stackrel{d}{=} \{\psi \in Fm_3^0 : t'\psi = 1^{\mathfrak{A}'}\}$. Akkor továbbra is $\overline{Ax}^{*} \subseteq T'$ és mostmár $t'(\varphi) = 0$.

Tehát $\models \varphi$ és $t'(\varphi) = 0$. Vegyük észre, hogy T' definiciója és $\mathfrak{A}' \in CA_3$ miatt

(*) $T' \vdash_3 \psi \implies \psi \in T'$, minden $\psi \in Fm_3^0$ -ra.

A 12.T (i) és $\models \varphi$ -ből $\vdash_3 \varkappa\varphi$ következik, tehát (*) szerint $\varkappa\varphi \in T'$. De $\varphi \notin T'$ hiszen $t'(\varphi) = 0 \neq 1^{\mathfrak{A}'} = -t(\varphi)$ mert $t(\varphi) \neq 1^{\mathfrak{A}}$.

Igy $\overline{Ax}^{*} \subseteq T'$ és (*) szerint $\overline{Ax}^{*} \not\vdash_3 \varkappa\varphi \to \varphi$. A 14.T bizonyításában levő (5) állítás miatt $\overline{Ax}^{*} \vdash_3 \varkappa(\neg\varphi) \to \neg\varkappa(\varphi)$, így (*)

és $\overline{Ax}^{*} \subseteq T'$, $\varkappa\varphi \in T'$ miatt[*] $\varkappa(\neg\varphi) \notin T'$. Mivel $t(\varphi)=0$, azért $\neg\varphi \in T'$, így (*), $\overline{Ax}^{*} \subseteq T'$, $\neg\varphi \in T'$, $\varkappa(\neg\varphi) \notin T'$-ből $\overline{Ax}^{*} \not\vdash_3 (\neg\varphi) \to \varkappa(\neg\varphi)$ is igaz. Beláttuk (iii)-at. <u>(iii)a) $\Rightarrow$ (viii)′, (iii)b) $\Rightarrow$ (viii)′</u> bizonyítása: Mivel ezt az állítást itt csak érdekessége miatt bizonyítjuk be, kevéssé részletesek leszünk. Legyen $p_0, p_1, \mathbf{E}$ jó, és legyen $\approx \overset{d}{=} \equiv_T$ ahol $T = \overline{Ax}^{*}$. Legyen $\mathfrak{A} \overset{d}{=} \mathfrak{Fm}_3/\approx$, $e = \mathbf{E}(x,y)/\approx$ és $t : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{A}$, $t(\mathbf{E}(x,y))=e$. Ekkor $\mathfrak{A} \in CA_3$ [HMT]4.3.22 szerint, és $e \in Nr_2\mathfrak{A}$, $A = Sg\{e\}$, $t(\varkappa\pi)=1^{\mathfrak{A}}$ (mert $\overline{Ax}^{*} \ni \varkappa\pi$). Tfh. $\overline{Ax}^{*}$ nem ellentmondásos, azaz $0^{\mathfrak{A}} \neq 1^{\mathfrak{A}}$. Megmutatjuk, hogy van $m : \mathfrak{R}_\omega \rightarrowtail \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$, melyre $m(pj_0^{\omega})=t(p_0)$ és $m(pj_1^{\omega})=t(p_1)$. Legyen $\mathfrak{F}$ a $\{p,q\}$-val generált szabad relációalgebra tipusú algebra. Ekkor $\mathfrak{F}$ univerzuma $RAT_{\{p,q\}}$. Legyen $k : \mathfrak{F} \to \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$ és $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{R}_\omega$ olyan, hogy $k(p)=t(p_0)$, $k(q)=t(p_1)$, $h(p)=pj_0^{\omega}$, $h(q)=pj_1^{\omega}$. Legyen $\tau \in RAT_{\{p,q\}}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $k\tau=1 \iff h\tau=1$. Ebből következik a kívánt beágyazás létezése[**]. Legyen φ a τ term cilindrikus algebrai átírtja (azaz $\varphi=t'(\tau)$), ahol $t' : \mathfrak{F} \to \mathfrak{Ra}'\mathfrak{Fm}_3^{\Lambda}$, ahol $\Lambda=\langle 3,\{p,q\}\times\{2\}\rangle$ és $t'(p)=p(x,y)$, $t'(q)=q(x,y)$). Ekkor $k(\tau)=\varphi(p_0,p_1)/\approx$ és $h(\tau)=1 \iff \mathfrak{G}(\omega) \models \varphi$. Ugyanakkor $\varphi(p_0,p_1)/\approx\, =1^{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{G}(\omega) \models \varphi$, hiszen $\mathfrak{G}(\omega) \models \varphi \iff \varphi(p_0,p_1) \in \overline{Ax}$ $\Rightarrow$ $\varphi(p_0,p_1)/\approx\, =1^{\mathfrak{A}}$ és $\mathfrak{G}(\omega) \not\models \varphi \Rightarrow \mathfrak{G}(\omega) \models \exists xyz\neg\varphi \Rightarrow \exists xyz\neg\varphi(p_0,p_1) \in \in \overline{Ax} \Rightarrow \overline{Ax}^{*} \not\vdash_3 \varphi(p_0,p_1) \Rightarrow \varphi(p_0,p_1)/\approx\, \neq 1^{\mathfrak{A}}$ (itt felhasználtuk, hogy $0^{\mathfrak{A}} \neq 1^{\mathfrak{A}}$). Beláttuk, hogy $k\tau=1 \iff h\tau=1$. Tehát létezik a kívánt m beágyazás. Tfh. hogy (iii)a) vagy (iii)b) teljesül. Legyen $\psi = (\varphi \to \varkappa\varphi)$ vagy $\psi = (\varkappa\varphi \to \varphi)$ úgy, hogy $\overline{Ax}^{*} \not\vdash_3 \psi$. Akkor, mivel $\overline{Ax}^{*} \models \psi$, ebből $\mathfrak{A} \notin RCA_3$ következik. Szintén, ekkor $0^{\mathfrak{A}} \neq 1^{\mathfrak{A}}$. Ezzel beláttuk (viii)′-t. <u>QED</u>(17.1. Lemma)

A bizonyítás második lépéseként bizonyítjuk most (viii)′-t.

---

[*] És mert $0^{\mathfrak{A}'} \neq 1^{\mathfrak{A}'}$ miatt $[\varphi \in T' \Rightarrow \neg\varphi \notin T']$.

[**] Hiszen ekkor $ker(h)=ker(k)$, így $\mathfrak{R}_\omega \cong \mathfrak{F}/ker(h) = \mathfrak{F}/ker(k) \cong | \subseteq \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$, és $m \overset{d}{=} \{(k\varphi, h\varphi) : \varphi \in F\}$ egy beágyazás.

<u>(viii)' bizonyítása:</u>[*] Először definiálunk egy $\mathfrak{A}\in CA_3$ cilindrikus algebrát (ennek egy egy-elemmel generált részalgebrája lesz a kívánt algebra). $\mathfrak{A}$-t úgy konstruáljuk, hogy kiindulunk egy $\mathfrak{A}'$ "jó" halmazalgebrából és ezt "elrontjuk" egy új atom hozzáadásával, úgy, hogy $\mathfrak{A}'$ nemreprezentálhatóvá válik, de a többi jó tulajdonság (pl. $\mathfrak{A}'\in CA_3$, $\mathfrak{R}_\omega \subseteq \mathfrak{R}\mathfrak{a}\mathfrak{A}'$) továbbra is megmarad.

A (viii)' bizonyítása egyes részeinek nevet adunk ((B1)-(B6)), mert ezekre a részekre a 15,17.T bizonyítása többi részeiből hivatkozni kívánunk.

<u>(B1) Az $\mathfrak{A}'$ algebra definiciója.</u> Legyen $U \overset{d}{=} P_\omega(\omega)$. Az A' elemei ${}^3U$-nek bizonyos permutációkra zárt részhalmazai lesznek. Ehhez bevezetünk néhány jelölést.

Jelölje Pm(4) a 4 permutációinak halmazát ($4=\{0,1,2,3\}$). Legyen $k\in Pm(4)$. Definiáljuk $\nu_k : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow U$-t a következőképp (ez k-nak egy természetes kiterjesztése lesz U-ra, pl. $\nu_k((2,(5,1)))=(k2,(5,k1))$ lesz) :

$$\nu_0 \overset{d}{=} k\cup(\omega\sim 4)\upharpoonright Id\ .\quad \text{Tfh.}\quad \nu_n : P_n(\omega) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P_n(\omega) \text{ már definiálva van.}$$

Akkor $\nu_{n+1} : P_{n+1}(\omega) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow P_{n+1}(\omega)$ definiciója a következő:

$$\nu_{n+1}(a) \overset{d}{=} \nu_n(a) \quad \text{ha} \quad a\in P_n(\omega) \quad \text{és}$$

$$\nu_{n+1}(\langle a,b\rangle) \overset{d}{=} \langle \nu_n(a),\nu_n(b)\rangle \quad \text{ha} \quad a,b\in P_n(\omega).$$

$$\nu_k \overset{d}{=} \bigcup\{\nu_n : n\in\omega\}.$$

(Mivel ellenőrizhető, hogy $(\forall n\in\omega)[P_n(\omega)\cap(P_n(\omega)\times P_n(\omega))=0]$, ez a definició értelmes.)

Most ν_k természetes módon definiál egy permutációt $Sb\,{}^3U$-n, ennek fixpontjait Fx_k-val jelöljük:

$$Fx_k \overset{d}{=} \{X\subseteq {}^3U : (\forall s\in{}^3U)[s\in X \iff \nu_k\circ s\in X]\}$$

(idézzük fel, hogy $\nu_k\circ s=\langle\nu_k(s_0),\nu_k(s_1),\nu_k(s_2)\rangle$). Legyen $K\subseteq Pm(4)$. Akkor

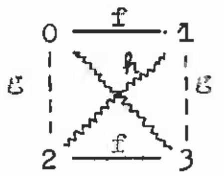
$$Fx(K) \overset{d}{=} \bigcap\{Fx_k : k\in K\}\ .$$

---

[*] $\bar{Q}CA_3 \notin RCA_3$ bizonyítása megjelent [N85e] -ben. A következő konstrukció lényegében egybeesik a [N85e] -beli konstrukcióval.

Ismert tény, és könnyű utánaszámolni, hogy Fx(K) zárt az $\mathfrak{Cb}^3U$ műveleteire nézve. $\mathfrak{Fx}(K)$ jelöli $\mathfrak{Cb}^3U$ -nak azt a részalgebráját, melynek univerzuma Fx(K). Definiáljuk 4 következő permutációit:

$$f \stackrel{d}{=} \{(0,1),(1,0),(2,3),(3,2)\},\quad g \stackrel{d}{=} \{(0,2),(2,0),(1,3),(3,1)\}$$
$$h \stackrel{d}{=} \{(0,3),(3,0),(1,2),(2,1)\},\quad \text{és}\quad i \stackrel{d}{=} \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$



Legyen $F \stackrel{d}{=} \{f,g,h,i\}$ és $\mathfrak{A}' \stackrel{d}{=} \mathfrak{Fx}(F)$. Minden $s\in{}^3U$ -re definiáljuk $\bar{s} \stackrel{d}{=} \{\nu_k\circ s : k\in F\}$. Könnyű látni, hogy $\mathfrak{A}'$ teljes*/ és atomos; $\mathfrak{A}'$ atomjainak halmaza pedig $At\mathfrak{A}' \stackrel{d}{=} B' \stackrel{d}{=} \{\bar{s} : s\in{}^3U\}$. Jelölje

$\mathfrak{B}' \stackrel{d}{=} \langle B', T'_i, E'_{ij}\rangle_{i,j<3}$ az $\mathfrak{A}'$ atom-strukturáját, azaz

$$E'_{ij} \stackrel{d}{=} \{\bar{s} : s_i=s_j,\ s\in{}^3U\} \subseteq B' \quad\text{és}$$
$$T'_i \stackrel{d}{=} \{(\bar{s},\overline{s(i/u)}) : s\in{}^3U,\ u\in U\} \subseteq {}^2B',\quad \text{minden } i,j<3 \text{ -ra.}$$

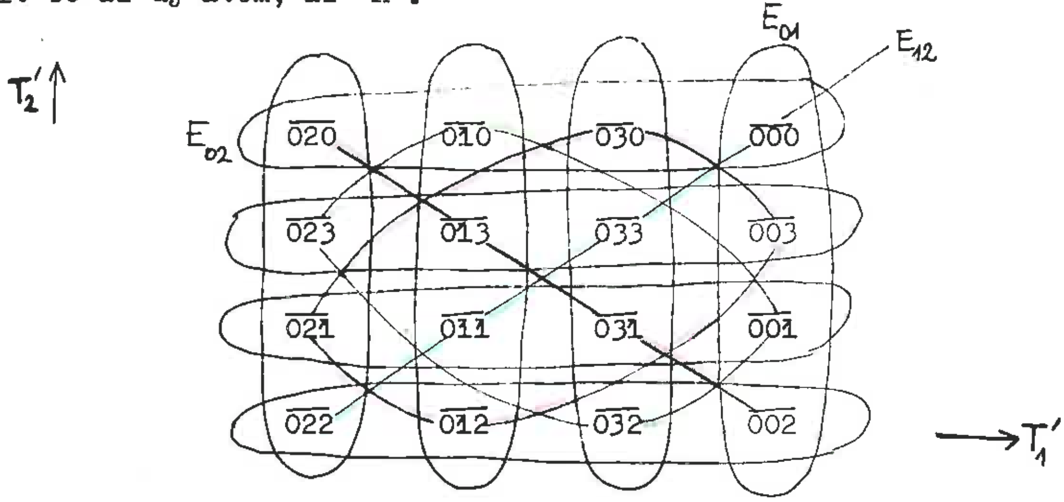
Megjegyezzük, hogy T'_i ekvivalencia-reláció B'-n, minden $i<3$ -ra és $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{Cm}\mathfrak{B}'$. A következőkben $(u,v,w)\in{}^3 10$ helyett csak uvw -t írunk (pl. (2,1,0) helyett 210 -t).

<u>(B2) Az $\mathfrak{A}$ algebra definiciója</u> Most megváltoztatjuk $\mathfrak{B}'$-t úgy, hogy "beszúrunk" egy új atomot: Legyen m egy új pont (azaz $m\notin B'$). Akkor $B \stackrel{d}{=} B'\cup\{m\}$, és T_0,T_1,T_2 az az ekvivalencia-reláció B -n amit rendre $T'_0\cup\{(m,\overline{023})\}$, $T'_1\cup\{(m,\overline{021})\}$ és $T'_2\cup\{(m,\overline{021})\}$ generál. $E_{ij}\stackrel{d}{=}E'_{ij}$, $E_{ii}\stackrel{d}{=}B$ ha $i,j<3$, $i\neq j$. $\mathfrak{B}\stackrel{d}{=}\langle B,T_i,E_{ij}\rangle_{i,j<3}$. (Ld. a 6,7.Ábrát!) Most [HMT]3.2.69 szerint, de nem is nehéz leellenőrizni, a $\mathfrak{B}$ cilindrikus atomstruktura, azaz $\mathfrak{B}\in At_3$. Akkor az $\mathfrak{A}\stackrel{d}{=}\mathfrak{Cm}\mathfrak{B}$ komplexus-algebra CA_3 -beli, azaz $\mathfrak{A}\in CA_3$.

---

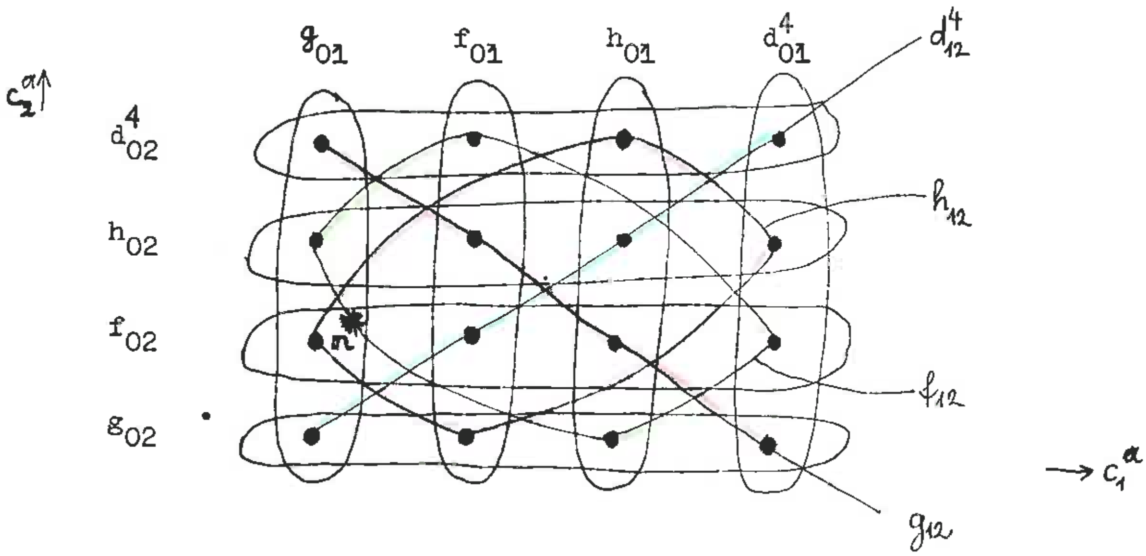
*/azaz $(\forall X\subseteq A')\ \bigcup X\in A'$.

Az alábbi ábrán szemléltetjük az eredeti $\mathcal{B}'$ atomstruktura $\{\bar{s} : s \in^3 4\}$ -ra eső részét, majd alatta szemléltetjük, hogy hova került be az új atom, az m .



6. ÁBRA

(A $\mathcal{B}'$ atomstruktura. A T_2' ekvivalenciarelációt a függőleges, a T_1'-et a vizszintes hurkák alkotják, míg a T_0' ekvivalenciarelációt a ferde ill. görbe vonalak.)



7. ÁBRA

A $\mathcal{B}$ atomstruktura.

Tehát használva az ábra jelöléseit: $m \in f_{12} \cap f_{02} \cap g_{01}$. Később is használni fogjuk a bizonyításban az f_{ij}, g_{ij} stb. $(i,j \in 3)$ jelöléseket.

(B3) Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{A}$ nem-reprezentálható. Legyen $\mathfrak{R} \stackrel{d}{=} \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$.
Legyen $\hat{f} = c_2 f_{01}$, $\hat{g} = c_2 g_{01}$, $\hat{h} = c_2 h_{01}$, $\hat{d} = c_2 d^4_{01}$, azaz
$\hat{f} = \{\overline{(0,1,u)} : u \in U\}$, $\hat{g} = \{\overline{(0,2,u)} : u \in U\} \cup \{m\}$, $\hat{h} = \{\overline{(0,3,u)} : u \in U\}$
és $\hat{d} = \{\overline{(0,0,u)} : u \in U\}$.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{R}$ -ben $\hat{g}^{\cup} ; \hat{g} \le 1'$, $\hat{h}^{\cup} ; \hat{h} \le 1'$, $\hat{f}^{\cup} ; \hat{f} \nleq 1'$ és $\hat{g} ; \hat{h} = \hat{f}$. Tehát $\mathfrak{R}$ szerint $\hat{g}$ és $\hat{h}$ "függvények", míg $\hat{f} = \hat{g} ; \hat{h}$ nem függvény. Ebből következik, hogy $\mathfrak{R}$, és így $\mathfrak{A}$ is, nem-reprezentálható. Valóban, a 7. Ábráról leolvashatók a következő egyenlőtlenségek: $\hat{f}^{\cup} = \hat{f}$, $\hat{g}^{\cup} = \hat{g}$, $\hat{h}^{\cup} = \hat{h}$, $\hat{g};\hat{g} = \hat{h};\hat{h} = \hat{d}$ és $\hat{f};\hat{f} = \hat{g}+\hat{d}$ (pl. az $s^1_2 \hat{f} = c_1 f_{02}$, $s^0_1 c_1 f_{02} = c_0 f_{12}$, $s^2_0 c_0 f_{12} = c_2 f_{01}$ tipusú állítások leellenőrzésével). Szintén ellenőrizhető, hogy $(\hat{f};1)\cdot(1;\hat{f}) = \hat{f}+\hat{g}+\hat{h}+\hat{d}$, tehát $\hat{g} = \hat{f};\hat{f} - 1'$ és $\hat{h} = (\hat{f};1)\cdot(1;\hat{f}) - (\hat{f}+\hat{g}+1')$, azaz $\mathfrak{R}$-ben, és így $\mathfrak{A}$-ban is, $\hat{f}$ generálja $\hat{g}$-t és $\hat{h}$-t. A fentiekből következik, hogy $\mathfrak{A}$-nak minden olyan részalgebrája, melynek $\hat{f}$ eleme, nem-reprezentálható.

(B4) $\mathfrak{A} \in \overline{Q}CA_3$. Bizonyításunk következő lépéseként megmutatjuk, hogy $\mathfrak{R}_\omega \subseteq \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$ (izomorfia erejéig).

Legyen $\mathfrak{G} \stackrel{d}{=} \mathfrak{Fx}(Pm(4))$ (azaz G elemei az ${}^3U$ -nek olyan részhalmazai, melyek a 4 összes permutációjá(nak kiterjesztésé)re zártak). Akkor $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{A}'$. Legyen $\hat{a} \stackrel{d}{=} \{s \in {}^3 4 : (\forall i<j<3) s_i \ne s_j\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\hat{a}$ atomja $\mathfrak{G}$-nek (pl. annak megmutatásával, hogy $\hat{a} \subseteq \{\nu_k \circ 012 : k \in Pm(4)\}$). Vegyük észre, hogy $B' = \{\bar{s} : s \in {}^3U\}$ partíciója ${}^3U$ nak. Jelölje $\approx$ az ehhez tartozó ekvivalencia-relációt.
Akkor $X/_\approx = \{\bar{s} : s \in X\}$, ha $X \subseteq {}^3U$.

Definiáljuk a következő $m : G \to A$ függvényt:

$$m(X) \stackrel{d}{=} \begin{cases} X/_\approx & \text{ha } \hat{a}\cdot X = 0 \\ X/_\approx \cup \{m\} & \text{ha } \hat{a} \subseteq X \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy $m : \mathfrak{G} \rightarrowtail \mathfrak{A}$ izomorf beágyazás. Nyilvánvalóan, m egy-egyértelmű Boole-homomorfizmus és $m(d^{\mathfrak{G}}_{01}) = d^{\mathfrak{A}}_{01}$. Legyen $X \in G$. Megmutatjuk, hogy $m(c_i X) = c^{\mathfrak{A}}_i m(X)$.

$m(c_i X) \subseteq c^{\mathfrak{A}}_i m(X)$ ellenőrzése: Tfh. $m \in m(c_i X)$. Akkor $\hat{a} \subseteq c_i X$. Van $s \in \hat{a}$, melyre $m \in c^{\mathfrak{A}}_i \{\bar{s}\}$. Mivel $\hat{a} \subseteq c_i X$, azért $s(i/u) \in X$ valamely $u \in U$ -ra, tehát $\overline{s(i/u)} \in mX$, és $m \in c^{\mathfrak{A}}_i \{\overline{s(i/u)}\}$, azaz $m \in c^{\mathfrak{A}}_i mX$. Tfh.

$s \in c_i X$. Akkor $s(i/u) \in X$ valamely $u \in U$ -ra, így $\overline{s(i/u)} \in mX$ és ezért $\bar{s} \in c_i^{\mathfrak{A}}\{\overline{s(i/u)}\} \subseteq c_i^{\mathfrak{A}} mX$. Mivel $m(c_i X) \subseteq \{\mathfrak{n}\} \cup (c_i X)/_{\approx}$, ezzel beláttuk, hogy $m(c_i X) \subseteq c_i^{\mathfrak{A}} mX$. A másik irány ellenőrzése: Tfh. $\mathfrak{n} \in c_i^{\mathfrak{A}} mX$. Ha $\mathfrak{n} \in mX$, akkor $\hat{a} \subseteq X \subseteq c_i X$ és így $\mathfrak{n} \in m(c_i X)$. Ha $\mathfrak{n} \notin mX$, akkor $(\exists s \in X)\mathfrak{n} \in c_i^{\mathfrak{A}}\{\bar{s}\}$, és van $u \in U$, hogy $s(i/u) \in \hat{a}$. Ekkor $s(i/u) \in \hat{a} \cap c_i X$, tehát $\hat{a} \subseteq c_i X$ mivel $\hat{a}$ atom G-ben, és így $\mathfrak{n} \in m(c_i X)$.
Tfh. $\bar{s} \in c_i^{\mathfrak{A}} mX$. Akkor $(\exists q \in mX)\bar{s} \in c_i^{\mathfrak{A}}\{q\}$. Ha $q = \mathfrak{n}$ akkor $\hat{a} \subseteq X$ és így $s \in c_i \hat{a} \subseteq c_i X$, tehát $\bar{s} \in m(c_i X)$. Ha $q \neq \mathfrak{n}$ akkor $q = \overline{s(i/u)}$ valamely $u \in U$ -ra. Mivel $q \in mX$, azért $s(i/u) \in X$, tehát $s \in c_i X$ és $\bar{s} \in mc_i X$.

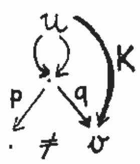
Beláttuk, hogy $m : \mathfrak{G} \rightarrowtail \mathfrak{A}$. Tehát $m : \mathfrak{Ra}\mathfrak{G} \rightarrowtail \mathfrak{Ra}\mathfrak{A}$ is fennáll.

Legyen $\bar{p} \overset{d}{=} \{(u,v,w) \in {}^3U : (u,v) \in pj_0^{\omega}\}$, $\bar{q} \overset{d}{=} \{(u,v,w) \in {}^3U : (u,v) \in pj_1^{\omega}\}$. Nyilvánvalóan, $\bar{p}, \bar{q} \in G$ és $\mathfrak{f} : \mathfrak{R}_{\omega} \twoheadrightarrow \mathfrak{R}'_{\omega} \overset{d}{=} \mathfrak{Sg}^{(\mathfrak{Ra}\mathfrak{G})}\{\bar{p},\bar{q}\}$ és $m : \mathfrak{R}'_{\omega} \rightarrowtail \mathfrak{Ra}\mathfrak{A}$, ahol $\mathfrak{f} \overset{d}{=} \langle\{(u,v,w) \in {}^3U : (u,v) \in R\} : R \subseteq {}^2U\rangle$. Tehát $m \circ \mathfrak{f} : \mathfrak{R}_{\omega} \rightarrowtail \mathfrak{Ra}\mathfrak{A}$.

<u>(B5) Az e generátorelem megadása</u>. A következőkben megadunk egy $e \in Nr_2\mathfrak{A}$ elemet, mely generálja $\hat{\mathfrak{f}}$, $m\bar{p}$ és $m\bar{q}$ -t. Ekkor $\mathfrak{Sg}^{(\mathfrak{A})}\{e\} \in {}_1\bar{Q}CA_3 \sim RCA_3$ már bizonyítva lesz.

Az alábbiakban ((B5)-ben), pj_0^{ω}, pj_1^{ω} helyett csak p,q -t írunk. Definiáljuk a következő binér relációkat az U -n:

$$K \overset{d}{=} \{(u,v) \in {}^2U : v = qqu,\ pu = qu,\ pqu \neq qqu\}, \quad \text{és}$$



$$R \overset{d}{=} p \cup q \cup K \cup K^{-1}.$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy K, és így R is, eleme $\mathfrak{R}_{\omega}$-nak (pl. $K = (q|q) \cap [(q|p^{-1} \cap Id_U)|{}^2U] \sim (p|p)$). Megmutatjuk, hogy R generálja p -t és q -t $\mathfrak{R}_{\omega}$-ban. Valóban, a következő állításokat nem nehéz ellenőrizni (az alábbiakban $\cap, \sim, {}^2U, Id_U, |, {}^{-1}$ helyett rendre $\cdot, -, 1, 1', ;, {}^{\smile}$ -t írunk):

$$K = R \cdot R^{\smile} \cdot (R;R) \quad , \quad p \cup q = R - (R \cdot R^{\smile}) \quad , \quad q - p = (p \cup q)^{\smile};K$$

$$p = (p \cup q) - (q - p) \quad , \quad p - q = p \cdot [(q-p);1] \quad , \quad q = (p \cup q) - (p - q) \quad .$$

Vegyük észre, hogy $R\cap Id_U = 0$ és $R\cap(\omega\times\omega)=0$; és hogy a fentiekben nem játszott szerepet, hogy $\mathfrak{R}_\omega$, pj_0^ω stb. volt, azaz a fentiek igazak tetszőleges $\mathfrak{R}_n$ -ban is, ahol $n\in\omega$.

Legyen $\bar{R} \overset{d}{=} \{(u,v,w)\in {}^3U : (u,v)\in R\}$. Akkor $\bar{R}$ generálja $\bar{p},\bar{q}$ -t $\mathfrak{G}$-ben, tehát $m(\bar{R})$ generálja $m(\bar{p}),m(\bar{q})$ -t $\mathfrak{A}$-ban $m : \mathfrak{G} \rightarrowtail \mathfrak{A}$ miatt. Legyen

$$e \overset{d}{=} m(\bar{R})\cup\hat{f}\cup\hat{d} \quad . \quad (\hat{f},\hat{d} \text{ -t (B3)-ban vezettük be}).$$

Nyilvánvalóan, $c_2e=e$, tehát $e\in Nr_2\mathfrak{A}$. Belátjuk, hogy e generálja $m(\bar{R})$ -et és $\hat{f}$ -t $\mathfrak{A}$-ban.: Valóban,

$$m\bar{R} = \bar{R}/_{\approx} \quad \text{mert} \quad \hat{a}\notin\bar{R} \quad \text{és így}$$

$$\bar{R}/_{\approx} = e - [c_0(e\cdot d_{01})\cdot c_1(e\cdot d_{01})] \quad \text{és}$$

$$\hat{f} = e\cdot[c_0(e\cdot d_{01})\cdot c_1(e\cdot d_{01})] - d_{01} \quad .$$

(B6) Legyen $t : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{A}$ olyan, hogy $t(\mathbf{E}(x,y))=e$. Rátérünk annak ellenőrzésére, hogy

(+) van jó $p_0,p_1,\mathbf{g}$ hogy $t(\mathfrak{K}\pi)=1$ és $t(p_0)=m\bar{p}$, $t(p_1)=m\bar{q}$.

Legyen

$$\varrho \overset{d}{=} \mathbf{E} - [1;(\mathbf{E}\cdot 1')]\cdot[(\mathbf{E}\cdot 1');1] \ , \qquad \eta \overset{d}{=} \varrho - (\varrho\cdot\varrho^{\cup}),$$

$$\xi \overset{d}{=} \eta^{\cup};(\varrho\cdot\varrho^{\cup}\cdot(\varrho;\varrho)) \ , \qquad \tau \overset{d}{=} \eta - \xi \ , \qquad \sigma \overset{d}{=} \eta - [\tau\cdot(\xi;1)] \quad .$$

Most tehát $\tau,\sigma\in RAT_{\{\mathbf{E}\}}$ és $\mathfrak{R} \overset{d}{=} \mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$ -ban $\tau^{\mathfrak{R}}(e)=m\bar{p}$, és $\sigma^{\mathfrak{R}}(e)=m\bar{q}$. (Ehhez az előzőek alapján csak azt kell leellenőrizni*/, hogy $\varrho^{\mathfrak{R}}(e)=m\bar{R}$.)

(B6.1.) p_0,p_1, és $\mathbf{g}$ megadása: Legyen p_0,p_1 a τ,σ termek cilindrikus átírtjai, azaz $p_0 \overset{d}{=} \tau^{(\mathfrak{Ra}'\mathfrak{Fm}_3)}(\mathbf{E}(x,y))$ és $p_1 \overset{d}{=} \sigma^{(\mathfrak{Ra}'\mathfrak{Fm}_3)}(\mathbf{E}(x,y))$. Ekkor a fentiek szerint $t(p_0)=\tau^{(\mathfrak{R})}(e) = m\bar{p}$ és $t(p_1)=m\bar{q}$. Úgy fogjuk $\mathbf{g} : Fm^2_\omega \to RAT$ -ot megadni, hogy $\mathbf{g}(p_0)=\tau$, $\mathbf{g}(p_1)=\sigma$ és $\mathbf{g}(\pi)=\pi_{RA} \overset{d}{=} (\tau^{\cup};\tau - 1')\cdot(\sigma^{\cup};\sigma - 1')\cdot(\tau^{\cup};\sigma)$ legyen.

Legyen $\mathbf{g}' : Fm^2_\omega \to RAT$ tetszőleges, de "jó". Definiáljuk $\mathbf{g} : Fm^2_\omega \to RAT$ -ot a következőképpen: Legyen π^- az a formula, melyre $\pi = \neg\pi^-$, azaz $\pi^- = \exists x\neg\forall y:[\ldots]$. (Idézzük fel, hogy $\forall x\varphi \overset{d}{=} \neg\exists x\neg\varphi$.)

*/ Ehhez meg elég azt látni, hogy minden $\mathfrak{C}\in CA_3$-ban, ha $x\in Nr_2\mathfrak{C}$, akkor $1;x=c_0x$ és $x;1=c_1x$.

Az alábbiakban a formulákra alkalmazott $^{\smile}$, $;$ $\mathfrak{Ru}'\mathfrak{Fm}_3$-ban értendő.

$$\mathbf{g}(\neg\varphi) \overset{d}{=} -\mathbf{g}(\varphi),\quad \mathbf{g}(\varphi\wedge\psi) \overset{d}{=} (\mathbf{g}\varphi)\cdot(\mathbf{g}\psi),\quad \mathbf{g}(\varphi\vee\psi) \overset{d}{=} (\mathbf{g}\varphi)+(\mathbf{g}\psi),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{F}) \overset{d}{=} 0,\quad \mathbf{g}(\mathbf{T}) \overset{d}{=} 1,$$

$$\mathbf{g}(\psi^{\smile}) \overset{d}{=} (\mathbf{g}\psi)^{\smile},\quad \mathbf{g}(\chi;\delta) \overset{d}{=} (\mathbf{g}\chi);(\mathbf{g}\delta),\quad \mathbf{g}(x=y) \overset{d}{=} 1',$$

$$\mathbf{g}(\pi) \overset{d}{=} --\pi_{RA},\quad \mathbf{g}(\pi^{-}) \overset{d}{=} -\pi_{RA},\quad \text{és egyébként}$$

$$\mathbf{g}(\varphi) \overset{d}{=} \mathbf{g}'(\varphi),\ \text{ha } \varphi \text{ nem a fenti alakú formula (ez eldönthető } \varphi\text{-ről).}$$

A fenti $\mathbf{g}$ egyértelműen van definiálva és rekurzív, ezenkívül a 3.L -ban előírt többi tulajdonságot is teljesíti, tehát jó. Ezenkívül $\mathbf{g}$ értékként felveszi RAT minden elemét, sőt $\mathbf{g} : Fm_3^2 \twoheadrightarrow RAT$. Mivel $\mathbf{g}$ homomorfizmus az $\mathfrak{Ru}'\mathfrak{Fm}_3$ -beli műveletekre, azért $\mathbf{g}(p_0)=\tau$ és $\mathbf{g}(p_1)=\sigma$.

<u>(B6.2.) $t(\bar{\mathcal{K}}\pi)=1^{\mathfrak{A}}$ ellenőrzése.</u> Már csak azt kell belátni, hogy $t(\bar{\mathcal{K}}\pi)=1^{\mathfrak{A}}$ (ahol persze a $\bar{\mathcal{K}}$ függvény a fenti $p_0,p_1,\mathbf{g}$ paraméterrel van definiálva). Ez elég számolásigényes feladat, mivel a $\bar{\mathcal{K}}\pi$ formula igen bonyolult. Ezért, amennyit csak tudunk, a reprezentálható $\mathfrak{A}'$-ban számoljuk végig. Tervünk a következő:

Legyen $t' : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{A}'$, $t'(\mathbf{E}(x,y))=\{(u,v,w)\in{}^3U : (u,v)\in R\cup f\cup i\}$. Megmutatjuk a következőket:

(1) $t'(\bar{\mathcal{K}}\pi)=1^{\mathfrak{A}'}$ és $t'(\mathbf{h}\varrho)\in G$, $t'(p_0)=\bar{p}$, $t'(p_1)=\bar{q}$.

(2) $t(\mathbf{h}\varrho) = mt'(\mathbf{h}\varrho)$.

(Megjegyezzük, hogy $t'(\mathbf{E}(x,y))\notin G$.) Most (1),(2)-t felhasználva a bizonyítás a következőképp megy: Vegyük észre, hogy τ és σ RA-termje ϱ-nak és így $\mathbf{g}(\pi)$ is RA-termje ϱ-nak. Ezért a $t(\bar{\mathcal{K}}\pi)$ kiszámításakor a cilindrikus műveleteken kívül csak $t(p_0),t(p_1)$ és $t(\mathbf{h}\varrho)$ -t kell használni (mivel $\bar{\mathcal{K}}\pi = \forall x(\text{pár}(x) \to \mathbf{hg}\pi))$. Mivel (1),(2) szerint $t'(p_0),t'(p_1),t'(\mathbf{h}\varrho)\in G$ és $t(p_0)=m\bar{p}=mt'(p_0)$, $t(p_1)=mt'(p_1)$, $t(\mathbf{h}\varrho)=$ $=mt'(\mathbf{h}\varrho)$ és $m : \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}$, azért $t(\bar{\mathcal{K}}\pi)=mt'(\bar{\mathcal{K}}\pi)=m1^{\mathfrak{A}'}=1^{\mathfrak{A}}$ (ismét (1)-et használva). Már csak (1) és (2) megmutatása van hátra.

Az (1) megmutatása nem nehéz, mert $\mathfrak{A}'$ reprezentálható: Legyen $\mathfrak{M} \overset{d}{=} \langle U,E^{\mathfrak{M}}\rangle$, ahol $E^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} R\cup f\cup i$. Akkor $\bar{E}^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} \{(u,v,w)\in{}^3U : (u,v)\in E\}\in$ A' és így t' és $\mathfrak{A}'$ definiciója szerint $t'(\varphi) = \{(u,v,w)\in{}^3U :$

$\mathfrak{M}\models\varphi[u,v]\}$ minden $\varphi\in Fm_3^2$ -ra. Mivel $\tau^{(\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{Cr}')}(E^{\mathfrak{M}})=pj_0^\omega$ és $\sigma^{(\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{Cr}')}(E^{\mathfrak{M}})=pj_1^\omega$, azért $t'(p_0)=\bar{p}$ és $t'(p_1)=\bar{q}$. Ekkor tehát $\mathfrak{M}\models\pi$.
A 12.T bizonyításában (a (3) állítást közvetlenül megelőzően) beláttuk, hogy ekkor $\mathfrak{M}\models\bar{\mathcal{K}}\pi$, tehát a fentiek szerint $t'(\bar{\mathcal{K}}\pi)=1^{\mathfrak{Cr}'}$. Mivel $m^{\mathfrak{M}}(\varrho)=R$ (ezt nem nehéz ellenőrizni), azért a 12.T bizonyításában szereplő (2) állítás szerint $(\forall u\in Pár^{\mathfrak{M}})[\mathfrak{M}\models(\mathbf{h}\varrho)[u]\iff(u_0,u_1)\in R]$, tehát a fentiek szerint $t'(\mathbf{h}\varrho)=\{(u,v,w)\in{}^3U:(u_0,u_1)\in R\}$. Mivel $R\in G$, azért nem nehéz látni, hogy $t'(\mathbf{h}\varrho)\in G$.

Annak megmutatása maradt hátra, hogy $t(\mathbf{h}\varrho)=m(t'(\mathbf{h}\varrho))=\{(u,v,w)\in{}^3U:(u_0,u_1)\in R\}/_{\approx}$. Ezt egyszerűen "ki fogjuk számolni". Többször fel fogjuk használni a következő állítást:

(*) Legyen $\psi\in Fm_3$ olyan, mely p_0,p_1-ből épül fel. Akkor

$$t(\psi)=m(t'\psi)=m\{(u,v,w)\in{}^3U:\mathfrak{M}\models\psi[u,v,w]\}.$$

(*) abból következik, hogy $t(p_0)=mt'p_0$, $t(p_1)=mt'(p_1)$ és t, m, t' cilindrikus homomorfizmusok.
Tehát pl. $t(p_0(\!(x,z)\!))=m(\{(u,v,w)\in{}^3U:u_0=w\})=\{(u,v,w)\in{}^3U:u_0=w\}/_{\approx}$ vagy pl. $t(\varepsilon)=\{(u,v,w)\in{}^3U:u_0=u_1\}/_{\approx}$.

$\mathbf{E}(\!(z,y)\!)=\exists x(x=z\wedge\mathbf{E}(x,y))$, így

$$t(\mathbf{E}(\!(z,y)\!))=c_0^{\mathfrak{Cr}}(d_{02}^{\mathfrak{Cr}}\cdot t(\mathbf{E}(x,y)))=c_0(d_{02}\cdot(m\bar{R}+c_2f_{01}+c_2d_{01}^4))=$$
$$m(c_0(d_{02}\cdot\bar{R}))+c_0f_{12}+c_0d_{12}^4=\{(u,v,w)\in{}^3U:(w,v)\in R\cup f\cup i\}/_{\approx}\cup\{m\}$$
$$t'(\mathbf{E}(\!(z,y)\!))/_{\approx}\cup\{m\}.$$

$\mathbf{E}(\!(x_0,x_1)\!)=\exists yz(p_0(\!(x,z)\!),p_1(\!(x,y)\!),\mathbf{E}(\!(z,y)\!))$, és így (*)-ot felhasználva

$$t(\mathbf{E}(x_0,x_1))=c_1^{\mathfrak{Cr}}c_2^{\mathfrak{Cr}}\{(u,v,w)\in{}^3U:u_0=w,u_1=v,(w,v)\in E^{\mathfrak{M}}\}/_{\approx}=$$
$$\{(u,v,w)\in{}^3U:(u_0,u_1)\in E^{\mathfrak{M}}\}/_{\approx}=t'(\mathbf{E}(x_0,x_1))/_{\approx},$$ mert az az elem, melyre $c_1^{\mathfrak{Cr}}c_2^{\mathfrak{Cr}}$ -t alkalmaztuk, diszjunkt $c_1c_2\{m\}=\{(u,v,w)\in{}^3U:u\in 4\}/_{\approx}\cup\{m\}$-től.

$\mathbf{hE}=\mathbf{E}(x_0,x_1)\circ\varepsilon=\exists y(\Delta(x,y),\exists x(x=y_0,\mathbf{E}(x_0,x_1)),\varepsilon y_1)$, így (*) szerint

$$t(\mathbf{hE})=c_1^{\mathfrak{Cr}}(t(\Delta(x,y),\varepsilon y_1)\cdot c_0^{\mathfrak{Cr}}(t(x=y_0)\cdot t(\mathbf{E}(x_0,x_1)))\ ,$$
$$c_0^{\mathfrak{Cr}}(t(x=y_0)\cdot t(\mathbf{E}(x_0,x_1)))=c_0^{\mathfrak{Cr}}(\{(u,v,w)\in{}^3U:u=v_0,(u_0,u_1)\in E^{\mathfrak{M}}\}/_{\approx})=$$

$\{(u,v,w)\in{}^3U : (v_{00},v_{01})\in E^{\mathfrak{M}}\}/_{\approx}$, így

$t(\mathbf{h}E) = c_1^{\mathfrak{A}}(\{(u,v,w)\in{}^3U : u_0=v_{00},u_1=v_{11},v_{01}=v_{10},v_{10}=v_{11},(v_{00},v_{01})\in E^{\mathfrak{M}}\}/_{\approx})=$
$\{(u,v,w)\in{}^3U : (u_0,u_1)\in E^{\mathfrak{M}}\}/_{\approx} = t'(\mathbf{E}(x_0,x_1))/_{\approx}$.

Teljesen hasonló módon kapjuk a következőket:

$$t(\mathbf{h}(\mathbf{E}\cdot 1')) = \{(u,v,w)\in{}^3U : (u_0,u_1)\in E^{\mathfrak{M}}, u_0=u_1\}/_{\approx} = \{(u,v,w)\in{}^3U : u_0=u_1\in 4\}/_{\approx} ,$$

$$t(\mathbf{h}(1;(\mathbf{E}\cdot 1'))) = t(\text{pár}(x)\circ\mathbf{h}(\mathbf{E}\cdot 1')) = c_1^{\mathfrak{A}}(\{(u,v,w)\in{}^3U : u_0=v_{00},u_1=v_{11},v_{01}=v_{10},v_0\notin\omega,v_{10}=v_{11}\in 4\}/_{\approx}) = \{(u,v,w)\in{}^3U : u_1\in 4\}/_{\approx} ,$$

$$t(\mathbf{h}((\mathbf{E}\cdot 1');1)) = \{(u,v,w)\in{}^3U : u_0\in 4\}/_{\approx} , \text{ és így}$$

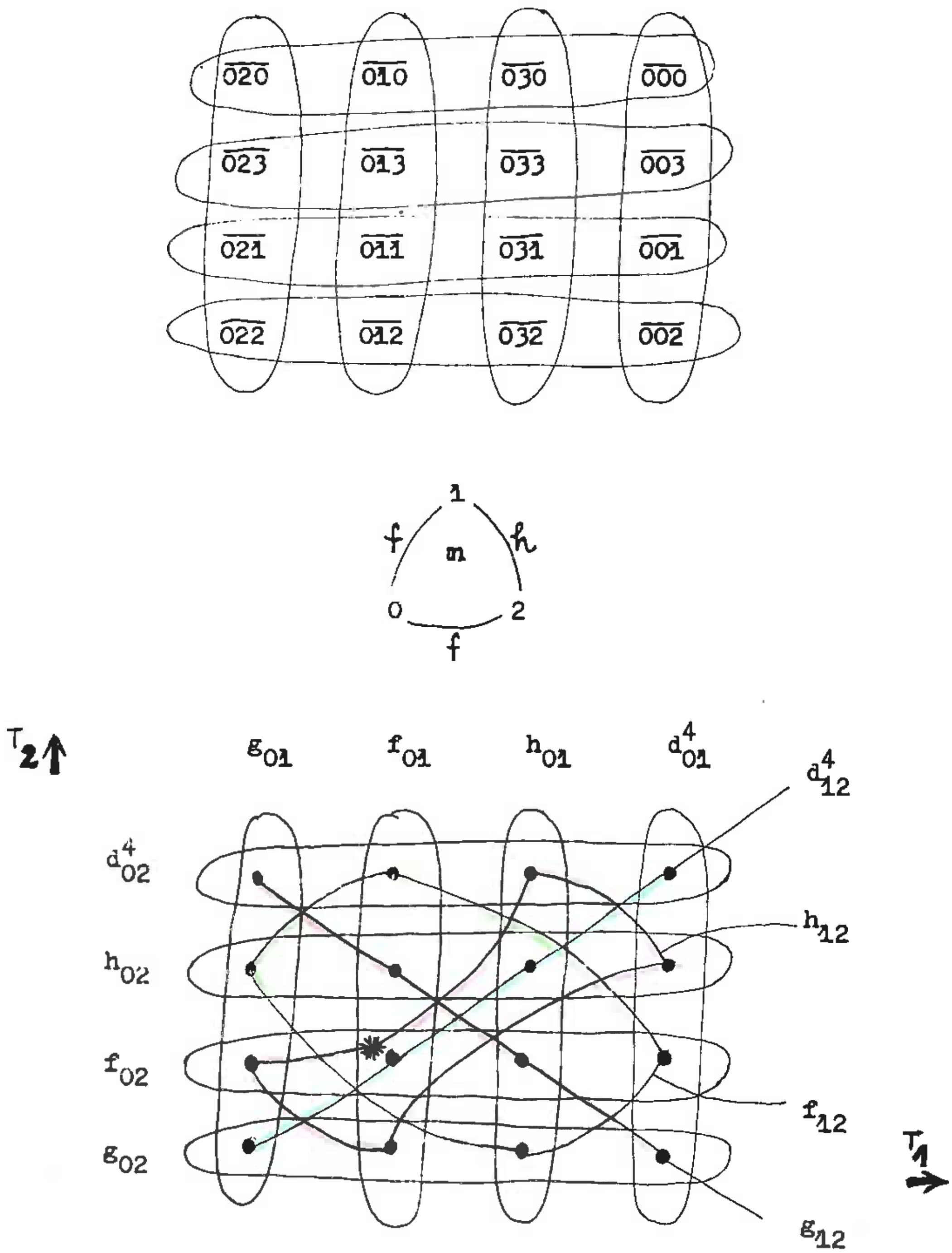
$$t(\mathbf{h}\varrho) = \{(u,v,w)\in{}^3U : (u_0,u_1)\in E^{\mathfrak{M}},\neg(u_1\in 4 \text{ és } u_0\in 4)\}/_{\approx} = \{(u,v,w)\in{}^3U : (u_0,u_1)\in R\}/_{\approx} .$$

A fenti számolásokban mindig leellenőriztük, hogy amikor $c_i^{\mathfrak{A}}$ -t alkalmaztunk, nem jött-e be az "m". Ezzel beláttuk (1)-et is.

Ezzel bebizonyítottuk (viii)$'$-t, és így 17.T (ii)-(viii) -at is.

<u>A 15.T (iv) bizonyítása</u>: Vegyük a (viii)$'$ bizonyításában megkonstruált $\mathfrak{A}$ algebrát és a bizonyítás (B3) részében bevezetett $\hat{f},\hat{g},\hat{h}\in Nr_2\mathfrak{A}$ elemeket. Megmutattuk ott, hogy $\hat{f}$ generálja $\mathfrak{A}$-ban $\hat{g}$ -t és $\hat{h}$ -t, így $\mathfrak{A}$ -ban e generálja $\hat{f},\hat{g},\hat{h}$ -t (ahogy a bizonyítás (B5) részében megmutattuk). Legyen $t : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{A}$, $t(\mathbf{E}(x,y))=e$. Akkor van $\varphi,\psi,\gamma\in Fm_3^2$ hogy $t(\varphi)=\hat{f}$, $t(\psi)=\hat{g}$, $t(\gamma)=\hat{h}$. A bizonyítás (B4),(B6) részében láttuk, hogy $t(\overline{Ax})=1^{\mathfrak{A}}$ (megfelelő p_0,p_1 választás esetén). A 7.Ábrát használva leellenőrizhető, hogy $\mathfrak{Rn}\,\mathfrak{A}$ -ban $(\hat{h};\hat{g});\hat{g} \neq \hat{h};(\hat{g};\hat{g})$, mivel $\hat{h};\hat{g} = \hat{f}$, így $\hat{f}\leq\hat{f};\hat{g} = (\hat{h};\hat{g});\hat{g}$, de $\hat{h};(\hat{g};\hat{g}) = \hat{h}\not\geq\hat{f}$. Emiatt $t((\gamma;\psi);\psi \leftrightarrow \gamma;(\psi;\psi)) \neq 1^{\mathfrak{A}}$, tehát $\overline{Ax}$ -ből nem bizonyítható, hogy ; asszociatív. Beláttuk 15.T (iv) -et.

<u>A 15.T (i),(ii) és 17.T (i) bizonyítása</u>: 15.T (ii) -ből következik 15.T (i), mert 9.T szerint $\mathfrak{Fm}/_{\equiv_{Ax}}\in RA$. A 15.T (ii) -nél erősebb állítást fogunk bizonyítani, nevezetesen azt, hogy



8. ÁBRA

A $\mathcal{B}''$ atomstruktura ($^{3}4/_{\approx}$-re eső része).

(+) $\pi \not\models_3 \delta$ valamely $\delta = (\varphi\circ\psi)\circ\gamma \leftrightarrow \varphi\circ(\psi\circ\gamma)$ és $\varphi,\psi,\gamma \in \kappa'{}^{*}Fm_3^2$ -ra.

Ebből 15.T (ii) következik $Rng\,\kappa' \subseteq Ev$ miatt. Megmutatjuk, hogy (+) -ból 17.T (i) is következik.: Legyen $\varphi = \kappa'\varphi'$, $\psi = \kappa'\psi'$, $\gamma = \kappa'\gamma'$ és $\delta' \stackrel{d}{=} (\varphi';\psi');\gamma' \leftrightarrow \varphi';(\psi';\gamma')$ ahol ; az $\mathfrak{Rr}'\mathfrak{Fm}_3$ -beli kompozíciót jelöli. Legyen g' az a függvény, melyre $\varphi = \kappa'\varphi'$ stb. Definiáljuk $g: Fm_\omega^2 \to RAT$ -ot a következőképpen:

$$g(\neg\varphi) \stackrel{d}{=} -g\varphi,\quad g(\varphi\wedge\psi) \stackrel{d}{=} (g\varphi)\cdot(g\psi),\quad g(\varphi\vee\psi) \stackrel{d}{=} (g\varphi)+(g\psi),$$

$$g((\varphi';\psi');\gamma') \stackrel{d}{=} ((g'\varphi');(g'\psi'));g'\gamma',$$

$$g(\varphi';(\psi';\gamma')) \stackrel{d}{=} (g'\varphi');((g'\psi');(g'\gamma')),$$

egyébként, ha χ nem a fenti alakú (ez eldönthető), akkor

$$g\chi \stackrel{d}{=} g'\chi .$$

Most g jó,[*] és $g(\delta') = [(g\varphi';g\psi');g\gamma'] \leftrightarrow [g\varphi';(g\psi';g\gamma')]$, ahol most ; , $\leftrightarrow$ a RAT -beli műveleteket jelöli, és így $\kappa'\delta' = hg\delta' = (\varphi\cdot\psi)\circ\gamma \leftrightarrow \varphi\circ(\psi\circ\gamma) = \delta$, tehát $\bar{\kappa}\delta' = \forall x(\text{pár}(x) \to \delta)$. Mivel $\models_3 \eta\circ\xi \to \text{pár}(x)$ minden $\eta,\xi \in Fm_3^1$ -ra, azért $\models_3 \forall x\delta \leftrightarrow \bar{\kappa}\delta'$. Mivel $\pi \not\models_3 \delta$ a (+) állítás szerint, azért tehát $\pi \not\models_3 \bar{\kappa}\delta'$. Viszont $\models \delta'$ nyilvánvalóan teljesül. Ezenkívül $\delta' \in Fm_3^2$.

Most nekilátunk a (+) állítás bizonyításának. Ismét egy nem-reprezentálható $\mathfrak{A}'' \in CA_3$ -at fogunk használni. $\mathfrak{A}''$ -t ugyanúgy kapjuk $\mathfrak{A}'$-ből mint $\mathfrak{A}$-t, csak most az m atomot máshova "szúrjuk be".: Legyen $\mathfrak{B}'' \stackrel{d}{=} \langle B, T_i'', E_{ij}\rangle_{i,j<3}$, ahol T_0'', T_1'', és T_2'' az az ekvivalencia-reláció B -n amit rendre $T_0' \cup \{(m,\overline{030})\}$, $T_1' \cup \{(m,\overline{021})\}$ és $T_2' \cup \{(m,\overline{010})\}$ generál és B, T_i', E_{ij} a bizonyítás (B1-2) részében lett bevezetve. Ld. a szemben lévő 8.Ábrát.

Legyen mostantól f_{01} ,... stb. ahogy a 8. Ábrán fel van tüntetve. (Kissé más, mint a bizonyítás (B1)-(B6) részeiben.) Tehát most $m \in f_{01} \cap f_{02} \cap h_{12}$. A bizonyítás további részeiben $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{R}$, R , g , f , h , $\approx$ ugyanaz, mint a (B1)-(B6) -ban.

---

[*] A 76. old. tetején levő definicióval összhangban, azt mondjuk, hogy "g jó", ha g teljesíti a 3.L-ban (35. old.) kimondott feltételeket.

Legyen $p^+ \overset{d}{=} \bar{p}/_{\approx} \cup c_2 f_{01}$, $q^+ \overset{d}{=} \bar{q}/_{\approx} \cup c_2 g_{01}$, $e \overset{d}{=} \bar{R}/_{\approx} \cup c_2 f_{01} \cup c_2 d^4_{01}$,

$p \overset{d}{=} pj^{\omega}_0 \cup f$, $q \overset{d}{=} pj^{\omega}_1 \cup g$ (akkor $p,q : U \to U$), és

$H \overset{d}{=} \{(u,v,w) \in {}^3U : (pu,qu) \in h\}/_{\approx} \cup \{m\}$,

$r \overset{d}{=} \{(u,v,w) \in {}^3U : (pu,qu) \in R\}/_{\approx}$.

Legyen továbbá $t : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{A}''$, $t(\mathbf{E}(x,y)) = e$.

<u>1. Segédállítás</u> Van jó $p_0, p_1, \mathbf{g}$ és $\varphi, \psi \in \mathcal{K}'^{*} Fm^2_3$, hogy

$p^+ = t(p_0)$, $q^+ = t(p_1)$, $H = t(\varphi)$ és $r = t(\psi)$.

<u>Bizonyítás:</u> Hasonlóan ahhoz, ahogy a bizonyítás (B5) részében, nem nehéz belátni, hogy e generálja $\mathfrak{A}''$-ben p^+-t és q^+-t. Ezért van $p_0, p_1 \in Fm^2_3$, hogy $t(p_0) = p^+$ és $t(p_1) = q^+$. Legyen

$$\sigma \overset{d}{=} [1;(\mathbf{E}\cdot 1')]\cdot[(\mathbf{E}\cdot 1');1] ,$$

$$\tau \overset{d}{=} (\mathbf{E}\cdot\sigma)-1 , \qquad \gamma \overset{d}{=} \sigma-\tau-1' ,$$

$$\eta \overset{d}{=} \gamma;\gamma-\tau-1' , \qquad \varrho \overset{d}{=} \mathbf{E}-\sigma .$$

Akkor $\eta, \varrho \in RAT$. Legyen $\mathbf{g} : Fm^2_3 \twoheadrightarrow RAT$ ráképezés és jó. Ilyen $\mathbf{g}$ van, pl. a bizonyítás (B6.1) részében megkonstruált $\mathbf{g}$ ilyen. Legyen $\varphi', \psi' \in Fm^2_3$ olyan, hogy $\mathbf{g}(\varphi') = \eta$ és $\mathbf{g}(\psi') = \varrho$. Akkor $\varphi \overset{d}{=} \mathcal{K}'\varphi' = \mathbf{h}\eta$ és $\psi \overset{d}{=} \mathcal{K}'\psi' = \mathbf{h}\varrho$. Azt fogjuk most megmutatni, hogy $t(\mathbf{h}\eta) = H$ és $t(\mathbf{h}\varrho) = r$.

Ehhez először kiszámoljuk $t(\Delta(x,y))$-t.[*] $t(x_0 = y_{00})$ kiszámítása: Idézzük fel, hogy $(x_0 = y_{00}) = \exists z(x_0 = z, y_{00} = z)$ és $(y_{00} = z) = \exists x(y_0 = x, x_0 = z)$.

$$t(y_0 = x) = t(p_0(\!(y,x)\!)) = s^2_0 s^0_1 s^1_2 p^+ = s^2_0 s^0_1 s^1_2 \bar{p}/_{\approx} + s^2_0 s^0_1 s^1_2 c_2 f_{01} =$$
$$= \{(u,v,w) \in {}^3U : pj^{\omega}_0(v) = u\}/_{\approx} \cup c_2 f_{01} =$$
$$= \{(u,v,w) \in {}^3U : p(v) = u\}/_{\approx} \cup \{m\}.$$

A fenti számolásban használtuk az $\mathfrak{A}''$ definicióját az $s^2_0 s^0_1 s^1_2 \bar{p}/_{\approx}$ kiszámításakor, és $s^2_0 s^0_1 s^1_2 c_2 f_{01}$ kiszámításánál a 8. Ábrára támaszkodtunk. Hasonlóan kapjuk, hogy

[*] $\Delta(x,y)$ a 9.T bizonyításában lett bevezetve.

$$t(x_0=z) = \{(u,v,w)\in {}^3U : pu=w\}/_{\approx} \cup \{\mathfrak{m}\} .$$

$$\begin{aligned} t(y_{00}=z) &= c_0(t(y_0=x)\cap t(x_0=z)) = \\ & c_0(\{(u,v,w)\in {}^3U : pv=u, pu=w\}/_{\approx} \cup \{\mathfrak{m}\}) = \\ & \{(u,v,w)\in {}^3U : ppv=w\}/_{\approx} \cup c_0\{\mathfrak{m}\} = \\ & \{(u,v,w)\in {}^3U : w\in\{ppv,hv\}\}/_{\approx} \cup \{\mathfrak{m}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x_0=y_{00}) &= c_2(t(y_{00}=z)\cap t(x_0=z)) = \\ & c_2(\{(u,v,w)\in {}^3U : w\in\{ppv,hv\},\ pu=w\}/_{\approx} \cup \{\mathfrak{m}\}) = \\ & \{(u,v,w)\in {}^3U : pu\in\{ppv,hv\} \text{ vagy } v=fu\}/_{\approx} \cup \{\mathfrak{m}\} = \\ & \{(u,v,w)\in {}^3U : pu\in\{ppv,hv\}\}/_{\approx} \cup \{\mathfrak{m}\}. \end{aligned}$$

Az előbb az utolsó lépésnél azt használtuk, hogy ha $v=fu$, akkor $u,v\in 4$ és így $pu=ppv$ fennáll, tehát ezt az esetet nem kell külön kiírni.

A következő számolásokkor azt kell figyelni, hogy "mikor jön be az $\mathfrak{m}$". (Az "$\mathfrak{m}$" -t f_{01}, f_{02}, h_{12} vagy c_0,c_1,c_2 tudja "behozni", tehát ezeket kell majd figyelni.)

$(x_1=y_{11}) = \exists z(x_1=z, y_{11}=z)$, $(y_{11}=z) = \exists x(y_1=x, x_1=z)$, és így

$t(y_1=x, x_1=z) = \{(u,v,w)\in {}^3U : qv=u, qu=w\}/_{\approx}$

(mert g_{01}, g_{02}, g_{12} semelyike nem tartalmazza $\mathfrak{m}$ -et), így

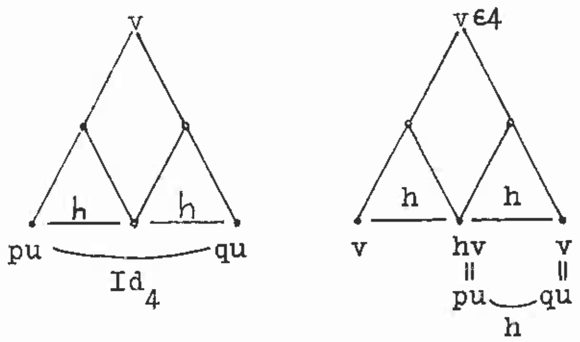
$t(y_{11}=z) = \{(u,v,w)\in {}^3U : qqv=w\}/ \cup T$,

ahol $T\subseteq\{\mathfrak{m}\}$ (ellenőrizhető, hogy $T=0$, de erre most nem lesz szükség, mert $\mathfrak{m}\notin t(x_1=z)$, és ezért a következő lépésben "$\mathfrak{m}$ kimarad", akár bejött, akár nem),

$$\begin{aligned} t(x_1=y_{11}) &= c_2(t(y_{11}=z)\cap t(x_1=z)) = \\ & c_2\{(u,v,w)\in {}^3U : qqv=w, qu=w\}/_{\approx} = \\ & \{(u,v,w)\in {}^3U : qu=qqv\}/_{\approx} . \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben le kellett ellenőrizni, hogy c_2 nem hozza be $\mathfrak{m}$-et. Ehhez azt kellett ellenőrizni, hogy $\{(u,v,w)\in {}^3U : qqv=w, qu=w\}/_{\approx}$ diszjunkt c_2f_{01} -től: Tfh. $qqv=w$, $qu=w$, és $(u,v,w)\in c_2f_{01}$. [illegible] $u,v\in 4$ és $gu=qu=w=qqv=ggv=v$, ez ellentmond $fu=v$ -nek. Tehát $\mathfrak{m}$ [illegible] .

$$\tau = (\mathbf{E} \cdot \sigma) - 1'$$
$$\gamma = \sigma - \tau - 1'$$
$$\eta = (\gamma ; \gamma) - \tau - 1'$$
$$\varrho = \mathbf{E} - \sigma.$$



Ábra a $t(\varphi \circ \varphi)$ kiszámításához.

$th\tau = \{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in f\}/_{\approx}$,

$th\gamma = \{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in g\cup h\}/_{\approx} \cup \{m\}$,

$t(h(\gamma;\gamma)) = \{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in f\cup Id_4\cup h\}/_{\approx} \cup \{m\}$,

$th\eta = \{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in h\}/_{\approx} \cup \{m\}$,

$th\varsigma = \{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in R\}/_{\approx}$. QED(1. Segédállítás)

Legyen $p_0, p_1, \varepsilon, \varphi, \psi$ olyan mint az 1. Segédállításban. Tehát pl. $t(\varphi)=H$, $t(\psi)=r$.

<u>2. Segédállítás</u> $t((\varphi\circ\varphi)\circ\psi) \neq t(\varphi\circ(\varphi\circ\psi))$.

<u>Bizonyítás:</u> Azt mutatjuk meg, hogy $((3,((1,0),(1,0))),0,0) \in t((\varphi\circ\varphi)\circ\psi) \sim t(\varphi\circ(\varphi\circ\psi))$.

$t(\varphi y_0) = c_0(t(x=y_0)\cap t\varphi) =$

$c_0(\{(u,v,w)\in{}^3U : u=pv, (pu,qu)\in h\}/_{\approx} \cup \{m\}) =$

$\{(u,v,w)\in{}^3U : (ppv,qpv)\in h\}/_{\approx} \cup \{m\}$.

$t(\varphi y_1) = c_0(t(x=y_1)\cap t\varphi) =$

$c_0\{(u,v,w)\in{}^3U : u=qv, (pu,qu)\in h\}/_{\approx} =$

$\{(u,v,w)\in{}^3U : (pqv,qqv)\in h\}/_{\approx} \cup \{m\}$.

$t(\varphi\circ\varphi) = c_1(t(\Delta(x,y))\cap t(\varphi y_0)\cap t(\varphi y_1)) =$

$c_1\{(u,v,w)\in{}^3U : [\underline{\Delta}(u,v) \text{ vagy } (v\in 4,\ pu=hv, qu=v)], (ppv,qpv)\in h,$

$(pqv,qqv)\in h\}/_{\approx} =$

$\{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in Id_4\cup h\}/_{\approx} \cup \{m\}$.

$t((\varphi\circ\varphi)y_0) = c_0(t(x=y_0)\cap t(\varphi\circ\varphi)) =$

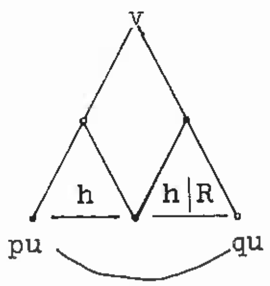
$c_0(\{(u,v,w)\in{}^3U : u=pv, (pu,qu)\in Id_4\cup h\}/_{\approx} \cup \{m\}) =$

$\{(u,v,w)\in{}^3U : (ppv,qpv)\in Id_4\cup h\}/_{\approx} \cup \{m\}$.

$t(\psi y_1) = c_0(t(x=y_1)\cap t\psi) =$

$c_0\{(u,v,w)\in{}^3U : u=qv, (pu,qu)\in R\}/_{\approx} =$

$\{(u,v,w)\in{}^3U : (pqv,qqv)\in R\}/_{\approx}$.



$\Rightarrow u \notin 4 .$

$$h|h|R = (4 \times U) \cap R$$

Ábra a $t(\varphi \circ (\varphi \circ \psi))$ kiszámításához.

$$t((\varphi\circ\varphi)\circ\psi) = c_1(t(\Delta(x,y)\cap t((\varphi\circ\varphi)y_0)\cap t(\psi y_1)) \supseteq$$

$$c_1\{(u,v,w)\in{}^3U : \Delta(u,v),(ppv,qpv)\in h,(pqv,qqv)\in R\}/_{\approx} \supseteq$$

$$\{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in h|R\}/_{\approx} \ni ((3,(10,10)),0,0) ,$$ hiszen

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, dash, "h"] & 0 \arrow[rr, dash, "R"] & & (10,10) \arrow[d, bend left] \arrow[d, bend right] & \\ & & & 10 \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & & 1 & \neq & 0 \end{tikzcd} .$$

$$t(\varphi\circ\psi) = c_1(t(\Delta(x,y))\cap t(\varphi y_0)\cap t(\psi y_1)) =$$

$$c_1\{(u,v,w)\in{}^3U : \underset{\substack{\Downarrow\\ v\notin 4}}{(pqv,qqv)\in R},(ppv,qpv)\in h,\underline{\Delta}(u,v)\}/_{\approx} =$$

$$\{(u,v,w)\in{}^3U : (pu,qu)\in h|R\}/_{\approx} .$$

(Az első lépésben használtuk, hogy $(pqv,qqv)\in R \Rightarrow v\notin 4$, ezért $t(\Delta(x,y))$ -ból csak "$\underline{\Delta}(u,v)$" jön be.)

$$t((\varphi\circ\psi)y_1) = c_0(t(x=y_1)\cap t(\varphi\circ\psi)) =$$

$$c_0\{(u,v,w)\in{}^3U : u=qv,(pu,qu)\in h|R\}/_{\approx} =$$

$$\{(u,v,w)\in{}^3U : (pqv,qqv)\in h|R\}/_{\approx} .$$

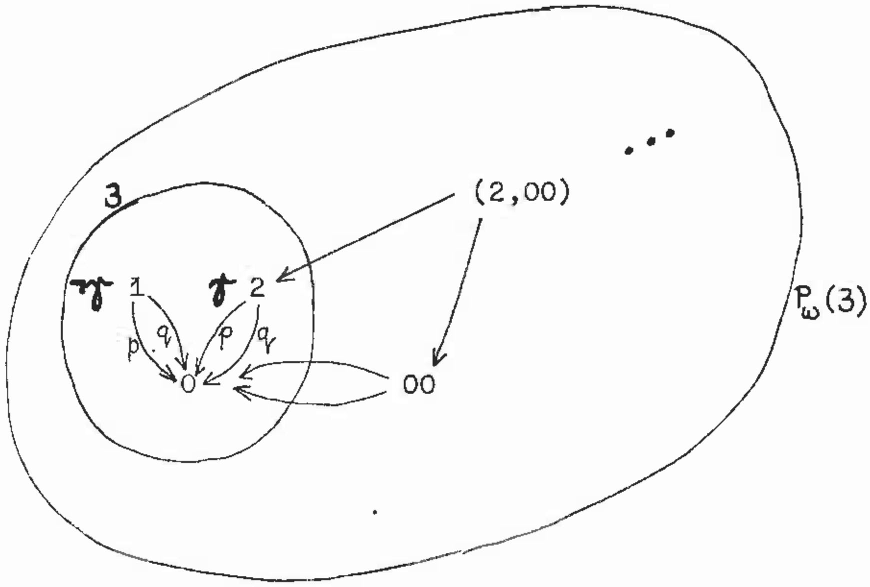
$$t(\varphi\circ(\varphi\circ\psi)) = c_1(t(\Delta(x,y))\cap t(\varphi y_0)\cap t((\varphi\circ\psi)y_1)) =$$

$$c_1\{(u,v,w)\in{}^3U : \underset{\substack{\Downarrow\\ v\notin 4}}{(pqv,qqv)\in h}|R,(ppv,qpv)\in h,\underline{\Delta}(u,v)\}/_{\approx} \subseteq$$

$$\{(u,v,w)\in{}^3U : pu\in 4,(pu,qu)\in R\}/_{\approx}\cup\{m\} \not\ni ((3,(10,10)),0,0),$$

mert $(3,(10,10))\notin R$. <u>QED</u>(2. Segédállítás)

Nem nehéz leellenőrizni, hogy $t(\pi)=1^{\alpha'}$. Igy az 1-2 Segédállításokból kapjuk, hogy $\pi \nvdash_3 (\varphi\circ\varphi)\circ\psi \leftrightarrow \varphi\circ(\varphi\circ\psi)$. Ezzel beláttuk 15.T (i),(ii) és 17.T (i) -t.



10. ÁBRA

<u>A 15.T (iii) bizonyítása:</u> (Ld. az ábrát a túloldalon.)

Legyen $U \overset{d}{=} P_\omega(3)$, $p = pj^3_0 \cup \{(1,0),(2,0)\}$, $q = pj^3_1 \cup \{(1,0),(2,0)\}$. A jelen bizonyítás (B5) részében bizonyítottuk, hogy van $R \subseteq {}^2U$, hogy R generálja pj^3_0, pj^3_1 -at, és ugyanakkor $R \cap Id_U = 0$, $R\cap(3\times 3)=0$. Legyen

$$E^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=} R \cup Id_3 \cup \{(2,0)\}, \quad \text{és} \quad \mathfrak{M} \overset{d}{=} \langle U, E^{\mathfrak{M}}\rangle.$$

Ekkor nem nehéz belátni, hogy $E^{\mathfrak{M}}$ generálja p -t és q -t, tehát van $p_0, p_1 \in Fm^2_3$, melyre $p_0^{\mathfrak{M}} = p$ és $p_1^{\mathfrak{M}} = q$. Nyilvánvalóan, $\mathfrak{M} \models \pi$. Legyen

$$\gamma \overset{d}{=} \text{pár}(x) \wedge \exists y[\mathbf{E}(x,y), x\neq y, \exists x(\mathbf{E}(x,y), x=y), \exists y(\mathbf{E}(x,y), x=y)].$$

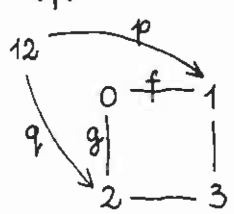
Ekkor $\gamma \in Fm^1_3$ és $\mathfrak{M} \models \gamma[2]$ de $\mathfrak{M} \not\models \gamma[1]$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{M} \models \gamma\circ\varepsilon[1]$. Legyen $a=1$ és $b=(2,(0,0))$. Akkor $a_0=b_{00}$, $a_1=b_{11}$, $b_{01}=b_{10}$, $\mathfrak{M} \models \gamma[b_0]$ és $\mathfrak{M} \models \varepsilon[b_1]$, tehát $\mathfrak{M} \models \gamma\circ\varepsilon[1]$, a $\gamma\circ\varepsilon$ formula definíciója szerint. Hasonlóan belátható, hogy $\mathfrak{M} \models \gamma^{\omega}[2]$ és ezért $\mathfrak{M} \models \gamma^{\omega\omega}[1]$. (iii) első fele (a szemantikai rész) bizonyítva van.

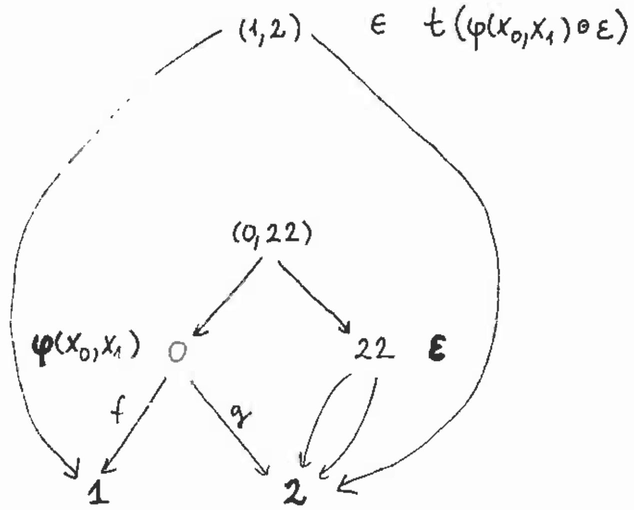
Nem nehéz látni, hogy az iménti bizonyítás lényege az volt, hogy $\mathfrak{M}$-ben igaz volt az

$$x_0=y_0 \wedge x_1=y_1 \wedge \neg\gamma \wedge \gamma y$$

formula az $x=1, y=2$ kiértékelés mellett (v.ö. (11)-el a 9.T bizonyításában). Ha γ-nak egy $\varphi(x_0,x_1)$ alakú formulát veszünk, akkor a fenti eset nem képzelhető el "normális esetben", és ezért $\pi \models \varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon \to \varphi(x_0,x_1)$. A következőkben megmutatunk egy "nemsztenderd modellt", melyben a fenti szituáció mégis fennáll valamely $\gamma = \varphi(x_0,x_1)$ választás mellett is. Ez bizonyítani fogja $\pi \not\models_3 \varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon \to \varphi(x_0,x_1)$ -et.

Legyen $t : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{A}$, $t(\mathbf{E}(x,y))=e$, ahol $\mathfrak{A}$ és e a bizonyítás (B2) ill. (B5) részében lettek definiálva. Legyen $p \overset{d}{=} \bar{p}/_{\approx}\cup\hat{f}$, $q \overset{d}{=} \bar{q}/_{\approx}\cup\hat{g}$. ($\hat{f}$ és $\hat{g}$ (B2)-ben, $\bar{p}$ és $\bar{q}$ (B4)-ben van definiálva). Mivel e generálja $\mathfrak{A}$-ban $p, q, \hat{f}$ -et (ld. (B5)), azért van $p_0, p_1 \in Fm^2_3$, hogy $t(p_0)=p$, $t(p_1)=q$ és $t(\varphi)=\hat{f}$.





<u>Ábra</u> a $\overline{((1,2),0,0)} \in t(\varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon)$ megmutatásához

Vegyük észre, hogy $p(1,2)=p(0)$ és $q(1,2)=q(0)$. Legyen $a \overset{d}{=} \overline{000}$ és $b \overset{d}{=} \overline{((1,2),0,0)}$. Meg fogjuk mutatni, hogy $b \notin t(\varphi(x_0,x_1))$ de $a \in t(\varphi(x_0,x_1))$ és (ezért) $b \in t(\varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon)$.

Definició szerint $\varphi(x_0,x_1) = \exists yz(p_0(\!(x,z)\!),p_1(\!(x,y)\!),\varphi(\!(z,y)\!))$, tehát $t(\varphi(x_0,x_1)) = c_1c_2(s_2^1p\cdot q\cdot s_2^0\hat{f}) \supseteq c_1c_2\{m\} \ni a$, mert $m \in f_{02}\cdot g_{01}\cdot f_{12}$ és $s_2^1p \supseteq f_{02}$, $q \supseteq g_{01}$, $s_2^0\hat{f} \supseteq f_{12}$. Tehát $a \in t(\varphi(x_0,x_1))$.

Következőként megmutatjuk, hogy $b \notin t(\varphi(x_0,x_1))$. Tfh. mégis $b \in c_1c_2(s_2^1p\cdot q\cdot s_2^0\hat{f})$. Mivel $b \notin c_1c_2\{m\}$, ekkor van $u,v\in U$, hogy $b' \overset{d}{=} ((1,2),u,v) \in s_2^1p\cdot q\cdot s_2^0\hat{f}$. Mivel $b' \in s_2^1p$, azért $v=1$ kell legyen, és mivel $b' \in q$ azért $u=2$ kell legyen, tehát $b' = ((1,2),2,1)$. De $((1,2),2,1) \notin s_2^0\hat{f} = c_0f_{12}$, ellentmondás. Tehát $b \notin t(\varphi(x_0,x_1))$.

Végül megmutatjuk $b \in t(\varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon)$ -t. Legyen $\mathfrak{M}$ ami a bizonyítás (B6.2) részében volt. Akkor p_0,p_1 úgy is választható, hogy $p_0^{\mathfrak{M}} = pj_0^{\omega}\cup f$ és $p_1^{\mathfrak{M}} = pj_1^{\omega}\cup g$ legyen. A továbbiakban $u_i \overset{d}{=} p_i^{\mathfrak{M}}(u)$ ha $u\in U$ és $i\in 2$. Mivel az $x_i=y_j$ formulák p_0,p_1 -ből $\wedge,\exists v_k$ segítségével épülnek fel és $\cdot$, c_k additívak $\mathfrak{A}$-ban és $t(p_0)=\bar{p}/_{\approx}\cup\hat{f}$, $t(p_1)=\bar{q}/_{\approx}\cup\hat{g}$, azért használva (*)-ot a bizonyítás (B6.2) részéből :

$$t(\Delta(x,y)) \supseteq \{(u,v,w)\in{}^3U : u_0=v_{00}, u_1=v_{11}, v_{01}=v_{10}\}/_{\approx},$$
$$t(x=y_0) \supseteq \{(u,v,w)\in{}^3U : u=v_0\}/_{\approx},$$
$$t(\varepsilon y_1) \supseteq \{(u,v,w)\in{}^3U : v_{10}=v_{11}\}/_{\approx},$$

így használva $a = \overline{000} \in t(\varphi(x_0,x_1))$ -et kapjuk, hogy $\overline{((1,2),(0,(2,2)),0)} \in t(\Delta(x,y),\varphi(x_0,x_1)y_0,\varepsilon y_1)$, azaz $\varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon$ definiciója szerint $\overline{((1,2),0,0)} \in t(\varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon)$.

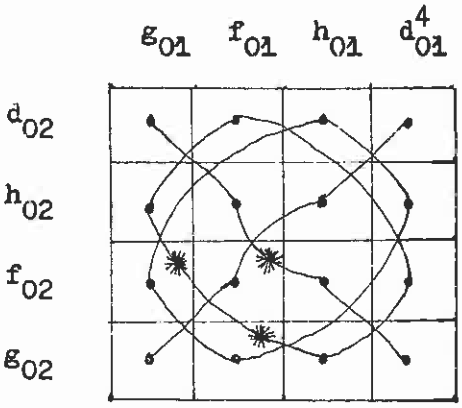
A fentiekből tehát $t(\varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon \rightarrow \varphi(x_0,x_1)) \neq 1^{\mathfrak{A}}$ adódik. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $t(\pi)=1^{\mathfrak{A}}$, tehát $\pi \not\models_3 \varphi(x_0,x_1)\circ\varepsilon \leftrightarrow \varphi(x_0,x_1)$.

QED(15,17. Tétel)

18. MEGJEGYZÉS

(i) A 14.T bizonyításához teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta RA$ és $\mathfrak{Fr}_\beta SA$ nem atomos. Sőt, $\mathfrak{Fr}_\beta K$ nem atomos, ha $K \subseteq SA$, $\mathfrak{R}(U) \in K$ valamely végtelen U -ra és a K -ban érvényes azonosságok felsorolhatók. A bizonyítás megtalálható [N85d]-ban. Nem tudjuk az $\mathfrak{Fr}_\beta NA$, $\mathfrak{Fr}_\beta WA$ és $\mathfrak{Fr}_\beta Crs_\alpha$ $(2<\alpha<\omega,\ 0<\beta<\omega)$ szabad-algebrákról, hogy atomosak-e.

(ii) Definiáljuk $\bar{Q}SA \subseteq SA$ -t a $\bar{Q}CA_3$ mintájára (értelemszerűen). Akkor $\bar{Q}SA \nsubseteq RA$ -t pontosan ugyanúgy lehet bizonyítani, mint $\bar{Q}CA_3 \nsubseteq RCA_3$ -t azzal a különbséggel, hogy nem egy hanem három új atomot kell beszúrni (hogy az SA-axiómák igazak maradjanak $\mathfrak{Ra}\,\mathfrak{A}$-ra). Az alábbi ábrán szemléltetjük, hogy hova kell "beszúrni" a három új atomot a konstrukcióban; a részletes számolások megtalálhatók [N85d]-ban (ld. [N85d] Thm.3.7.):



11. ÁBRA

Az új atomok a $*$ -al jelöltek. Ld. a 7. Ábrát!

(iii) Vázoljuk a 12.T egy olyan bizonyítását, mely nem használja Tarski $QRA \subseteq RRA$ reprezentáció-tételét.

Legyen Λ_γ a $\Lambda_\gamma^{\Lambda(\omega,\mathcal{R})}$ -beli formulák "univerzális lezártjainak" halmaza, ahol $\varphi \in Fm_\omega$ "univerzális lezártja" $\forall v_{i_0} \ldots \forall v_{i_n} \varphi$ ha $szv(\varphi) = \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}\}$ és $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$. Nem nehéz belátni, hogy ha $\varphi \in Fm^0_\omega$, akkor $\models_\omega \varphi$ pontosan akkor, ha φ levezethető Λ_γ-ból a (MP) használatával.

Először bizonyítjuk, a 9.T bizonyításabeli módszereket használva, hogy

(*) $Ax \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\gamma$ minden $\gamma \in \Lambda_\gamma$-ra.

A 14.T bizonyításabeli (4)-hez teljesen hasonlóan belátható, hogy

(**) $\vdash_3 \bar{\mathcal{K}}(\varphi \to \psi) \to (\bar{\mathcal{K}}\varphi \to \bar{\mathcal{K}}\psi)$, minden $\varphi,\psi \in Fm^0_\omega$ -ra.

Legyen $\Gamma \overset{d}{=} \{\varphi \in Fm^0_\omega : Ax \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\varphi\}$. Akkor (*) és (**) szerint $\Gamma \supseteq \Lambda_T$ és Γ zárt (MP) -re, tehát Γ tartalmazza az összes $\vdash_\omega$ -bizonyítható Fm^0_ω -beli formulát. Mivel $\vdash_\omega$ teljes, ebből kapjuk, hogy

($*^3$) $\models \varphi \Rightarrow Ax \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\varphi$, minden $\varphi \in Fm^0_\omega$ -ra.

Tfh. $Ax \models \varphi$. Akkor $\models \pi \to \varphi$, mivel $\models Ax \leftrightarrow \pi$, így (**) és ($*^3$) szerint $Ax \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\pi \to \bar{\mathcal{K}}\varphi$, tehát $Ax \wedge \bar{\mathcal{K}}\pi \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\varphi$. Mivel $Ax^* = Ax \wedge \bar{\mathcal{K}}\pi$ és $\models Ax \leftrightarrow Ax^*$, megkapjuk, hogy

($*^4$) $Ax^* \models \varphi \iff Ax^* \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\varphi$, minden $\varphi \in Fm^0_\omega$ -ra,

és ez a 12.T egy ekvivalens alakja (ld. 13.Mj). (Nem tudjuk, hogy $Ax \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}(Ax)$ vagy $Ax \vdash_3 \bar{\mathcal{K}}\pi$ igaz-e.)

(iv) Jelölje $\mathcal{L}_3 = \langle Fm_3, \dot{\vdash}_3 \rangle$ a [TG]-ben használt erősebb logikát, azaz $\dot{\vdash}_3$ annyival erősebb $\vdash_3$ -nál, hogy az ⟪1⟫ - ⟪9⟫ logikai axiómasémákhoz még hozzávesszük lényegében a "relációalgebrai" axiómákat ($\mathfrak{Ra}'\mathfrak{Fm}_3$ -ra kimondva). Tarski (TMT) tétele lényegében a következő:

Van rekurzív $K : Fm_\omega \to Fm_3$ függvény, hogy

$\pi \models \varphi \iff \pi \dot{\vdash}_3 K\varphi$, minden $\varphi \in Fm^0_\omega$ -ra.

Arra a kérdésre, hogy $\dot{\vdash}_3$ kicserélhető-e $\vdash_3$ -ra tehát pozitív választ ad 12.T (úgy, hogy más K függvényt kell venni).

Tarski K függvénye olyan volt, hogy RngK = Fm_3 , és ezért Tarski bizonyítani tudta (úgy, hogy bizonyította a 17.T (iv) -el analóg állítást), hogy

$\pi \dot{\vdash}_3 \varphi \leftrightarrow K\varphi$, minden $\varphi \in Fm^0_3$ -ra.

Ebből bizonyította $QRA \subseteq RRA$ -t azzal analóg módon, ahogy mi a 17.T bizonyításában (viii)′ $\Rightarrow$ (iii) -at bizonyítottuk*/. Mivel bizonyítottuk, hogy $QCA_3 \nsubseteq RCA_3$, azért tehát olyan $\tilde{\mathcal{K}} : Fm_\omega \to Fm_3$ függvény,

---

*/Ezzel vázoltuk itt Tarski $QRA \subseteq RRA$ -ra való eredeti, tisztán logikai bizonyítását.

melyre $\pi \models \varphi \iff \pi \vdash_3 \tilde{\mathcal{K}}\varphi$ minden $\varphi \in Fm^0_\omega$-ra, nincs. Ez egyfajta negatív válasz a [TG]-beli problémára, mely még úgy is igaz, ha π helyett az erősebb $\widetilde{Ax}$ formulahalmazt vesszük.

(v) Tarski (TMT) tételének olyan változata is van, hogy

Van rekurzív $M : Fm^0_\omega \to RAT$, hogy
$\pi \models \varphi \iff RA \models M\varphi = 1$, minden $\varphi \in Fm^0_\omega$-ra.

Ez felel meg annak, hogy "az elsőrendű logika felépíthető RA azonosságelméletében". A mi 12. Tételünkből bizonyítható (használva a [Ma78]-beli CA_3 -at SA -val összekötő eredményeket), hogy

Van rekurzív $G : Fm^0_\omega \to RAT$, hogy
$\pi \models \varphi \iff SA \models G\varphi = 1$, minden $\varphi \in Fm^0_\omega$-ra.

Vázoljuk a G függvény megszerkesztését: A [Ma78]-beli eredményeket használva nem nehéz olyan rekurzív $g : Fm^0_3 \to RAT$ függvényt megadni, melyre

(*) $\vdash_3 \varphi \implies SA \models g\varphi = 1 \implies \pi \models \varphi$, minden $\varphi \in Fm^0_3$-ra.

Legyen $G \stackrel{d}{=} g \circ \mathcal{K}$, ahol g a fenti (*)-beli tulajdonságú. Akkor a fenti állítást 12.T -vel kombinálva megkapjuk, hogy

$$\pi \models \varphi \underset{12.T.}{\Longrightarrow} \vdash_3 \mathcal{K}\varphi \underset{(*)}{\Longrightarrow} SA \models G\varphi = 1 \underset{(*)}{\Longrightarrow} \pi \models \mathcal{K}\varphi \underset{12.T.}{\Longrightarrow} \pi \models \varphi \ .$$

(vi) A 15,17.T bizonyításában minden ellenpélda olyan volt, hogy p_0 és p_1 (reláció)kompozíciói már nem függvények. Érdekes lenne tudni, hogy Ax kicserélhető-e (pl. a 9.T -ben) arra, hogy p_0, p_1 kompozíciói, mondjuk 5 mélységben még függvények. (Valamilyen megfogalmazásban, pl. úgy, hogy "$x_i = y, x_i = z \to y = z$", ha $|i| \leq 5$" -öt vesszük (A1) helyett.) ■

A 9.T alkalmazásaként most leírjuk a [HMT]2.7. Probléma megoldását.

19. TÉTEL (a [HMT]2.7. Probléma megoldása)

Van $b \in Fr_1 CA_3$, mely generálja $\mathfrak{Fr}_1 CA_3$-at, de nem szabadon. Általánosabban, minden $0<\beta$ és $3 \le \alpha$-ra van $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-nak olyan β-elemű generátorrendszere, mely nem szabadon generálja azt. Ez a generátorrendszer irredundáns, azaz semmilyen valódi része már nem generátorrendszer.

Bizonyítás: Megadunk három $\tau(x)$, $\sigma(x)$, $\delta(x) \in Tm_{\{x\}}(cil_3)$ termet, melyre igaz, hogy

$$CA_3 \models x=\sigma(\tau(x)) \qquad \text{és}$$

$$CA_3 \models \delta(\tau(x))=1 \qquad \text{de} \qquad Cs_3 \not\models \delta(x)=1 .$$

Ekkor minden $\alpha \geq 3$-ra

(a) $CA_\alpha \models x=\sigma(\tau(x))$ és

(b) $CA_\alpha \models \delta(\tau(x))=1$ de $CA_\alpha \not\models \delta(x)=1$.

Legyen $0<\beta$, $\alpha \geq 3$ és legyen $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-nak $\{g_i : i<\beta\}$ a szabad generátorrendszere. Akkor $\{\tau(g_0)\} \cup \{g_i : 0<i<\beta\}$ generálja $\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$-t (a) miatt, de nem szabadon a (b) miatt és nyilvánvalóan irredundáns. A továbbiakban gyakran írunk τ, σ, δ-t rendre $\tau(x), \sigma(x), \delta(x)$ helyett.

Legyen $\Lambda = \langle 3, \{(R,3)\}\rangle$, azaz Λ-ban 1 db. 3-argumentumú relációjel van, R. Akkor [HMT]4.3.26 szerint

$$\mathfrak{Fr}_1 CA_3 \cong \mathfrak{Fm}^\Lambda/\equiv .$$

Ezért a fenti tulajdonságú τ, σ, δ helyett tételünk bizonyításához elég három (szigorú) $\varphi, \psi, \eta \in Fm^\Lambda$ formulát megadni, melyre az alábbi (1) teljesül:

$$(1) \qquad \vdash_3 R(x,y,z) \leftrightarrow \psi(R/\varphi) ,$$

$$\vdash_3 \eta(R/\varphi) , \qquad \text{de} \qquad \not\vdash \eta .$$

Itt $\psi(R/\varphi)$ azt a formulát jelöli, melyet úgy kapunk ψ-ből, hogy

$R(x,y,z)$ helyett mindenütt φ-t írunk, hasonlóan η-ra.

Intuitíve, minden R relációhoz definiálni kell egy $\bar{R}$ relációt[*/], úgy hogy $\bar{R}$ -ből R visszadefiniálható legyen, de az $\bar{R}$ "kódok" teljesítsenek egy szabályosságot (amit nem minden reláció teljesít). Az ötlet a következő: ha R végpontok nélküli sűrű diszkrét rendezés a reflexivitás megkötése nélkül, melyben van legnagyobb fixpont (röviden ha R jó), akkor legyen $\bar{R}$ az $R\cup\{$legnagyobb fixpont rákövetkezője mint fixpont$\}$, egyébként $\bar{R}$ legyen R. Ekkor $\bar{R}$ -ből visszakapjuk R -et úgy, hogy ha $\bar{R}$ jó, akkor elhagyjuk a legnagyobb fixpontot, egyébként változatlanul hagyjuk. Ezen kívül az $\bar{R}$ -ben, ha jó, akkor van legalább két fixpont - ennek nem feltétlenül kellene teljesülni.

Formalizáljuk a fenti gondolatmenetet[**/]. Az alábbiakban $R(x,y,z)$ helyett R -et írunk csak. Akkor tehát pl. $R\langle\!\langle z,y\rangle\!\rangle = \exists x(x{=}z,R) = \exists x(x{=}z,R(x,y,z))$. Legyen

$$\mathrm{suc} \overset{d}{=} \forall z([R\langle\!\langle z,y\rangle\!\rangle, z\neq y] \leftrightarrow [R\langle\!\langle z,x\rangle\!\rangle \vee z=x]) \quad ,$$

$$\begin{aligned} A\xi' \overset{d}{=} \forall xyz\Big[\; & R \leftrightarrow \exists z R \;, \\ & R\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle, R\langle\!\langle y,x\rangle\!\rangle \to x=y, \\ & x\neq y \to (R\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle \vee R\langle\!\langle y,x\rangle\!\rangle), \\ & \forall x\exists y\, \mathrm{suc}\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle, \\ & \exists y(R\langle\!\langle y,y\rangle\!\rangle, \forall x[R\langle\!\langle x,x\rangle\!\rangle \to R\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle]) \;\Big], \end{aligned}$$

$$\varphi' \overset{d}{=} R \vee (A\xi', x=y, \exists z[\mathrm{suc}\langle\!\langle z,x\rangle\!\rangle, R\langle\!\langle z,z\rangle\!\rangle, \forall x(R\langle\!\langle x,x\rangle\!\rangle \to R\langle\!\langle x,z\rangle\!\rangle)]) \quad ,$$

$$\psi' \overset{d}{=} (\neg A\xi', R) \vee (A\xi', R, [x=y \to \exists y(x\neq y, R\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle, R\langle\!\langle y,y\rangle\!\rangle)]),$$

$$\eta' \overset{d}{=} A\xi' \to \exists xy(x\neq y, R\langle\!\langle x,x\rangle\!\rangle, R\langle\!\langle y,y\rangle\!\rangle).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy

(2) $\models R \leftrightarrow \psi'(R/\varphi')$ és

$\models \eta'(R/\varphi')$ és $\not\models \eta'$, sőt minden végtelen M-re van $\mathfrak{M}$, hogy $\mathfrak{M} \not\models \eta'$.

Igenám, de tudjuk, hogy $\models$ és $\vdash_3$ között nagy különbség van $\mathfrak{Fm}^{\wedge}$-ban (ld. I.3 fejezet). Ezért most megmutatjuk, hogyan lehet a 9.T -t a $\models$

[*/] Ez az $\bar{R}$ a fenti φ "jelentése".

[**/] A tranzitivitást elhagyjuk a feltételekből mert nincs rá szükség.

és $\vdash_3$ közti szakadék áthidalására használni.

Tekintsük az R' relációjelet most kétargumentumúnak és legyen $\mathbf{g} : Fm_\omega^2 \to RAT_{\{x\}}$ az a függvény, mely a 3.L szerint létezik, Ekkor

$$(*)' \quad \mathfrak{M} \models \chi[a,b] \iff (a,b) \in (\mathbf{g}\chi)^{\mathcal{R}(M)}(R^{\mathfrak{M}}),$$

minden $\chi \in Fm_3^2$ -ra, $\mathfrak{M}$ modellre és $a,b \in M$ -re. Legyen $\tau \stackrel{d}{=} \mathbf{g}\varphi'$, $\sigma \stackrel{d}{=} \mathbf{g}\psi'$ és $\delta \stackrel{d}{=} \mathbf{g}\eta'$ (ahol φ', ψ', η' a (2)-beli formulák csak R kétargumentumú). Akkor (2) és $(*)'$ szerint

(3) $\quad RRA \models x=\sigma(\tau(x))$,

$\quad RRA \models \delta(\tau(x))=1$ és $\mathcal{R}(M) \not\models \delta(x)=1$ minden végtelen M -re.

Rátérünk olyan φ,ψ,η megadására, mely teljesíti (1)-et. A φ,ψ,η felírásában használni fogjuk a fenti τ,σ,δ -t. Legyen $\Lambda' = \langle 3,\{(\mathbf{E},2),(R,3)\}\rangle$. Legyen $p_0,p_1 \in Fm_3^{\Lambda',2}$ tetszőleges, de olyan, hogy az R relációjel nem fordul elő bennük (csak az $\mathbf{E}$). Legyen Ax és a $\circ, \varepsilon$, stb. műveletek ezzel a p_0,p_1 -el felírva. A 9.T szerint $\mathcal{E}\mathcal{V}/{\equiv_{Ax}} \in RRA$ és $Ev \supseteq \{\varphi\circ\varepsilon : \varphi \in Fm_3^{\Lambda',1}\}$. Ha $\varphi \in Fm_3^{\Lambda',1}$ és $\varrho \in RAT$, akkor jelölje $\varrho^{\varepsilon}(\varphi)$ azt a formulát, melyet az $\langle Fm_3^{\Lambda',1},+,\cdot,{}^{\perp},\dot{0},\dot{1},\circ,{}^{\cup},\varepsilon\rangle$ algebrában "számolunk" ki (ld. 8.D). Ha $\chi \in Fm^{\Lambda'}$, akkor χ_R jelöli azt a formulát, melyet úgy kapunk χ-ből, hogy $\mathbf{E}(x,y)$ helyébe mindenütt $\exists z(R,x\neq y)$ -t írunk. Tehát ha $\chi \in Fm^{\Lambda'}$ akkor $\chi_R \in Fm^{\Lambda}$. Legyen

$$S \stackrel{d}{=} \exists yz(R,x=y)$$

$$A\xi \stackrel{d}{=} \forall xyz[Ax_R, (R \leftrightarrow \exists zR), (S \leftrightarrow (S\circ\varepsilon)_R)] ,$$

$$\varphi \stackrel{d}{=} \bar{R} \stackrel{d}{=} (\neg A\xi,R) \vee (A\xi,[(R,x\neq y) \vee (\tau^{\varepsilon}(S)_R,x=y)]),$$

$$\psi \stackrel{d}{=} (\neg A\xi,R) \vee (A\xi,[(R,x\neq y) \vee (\sigma^{\varepsilon}(S)_R,x=y)]),$$

$$\eta \stackrel{d}{=} A\xi \to (\delta^{\varepsilon}(S) \leftrightarrow \text{pár}(x))_R .$$

A következőkben ha χ egy formula, akkor $\chi(\bar{R})$ (ill. $\chi_{\bar{R}}$) azt a formulát jelöli, melyet úgy kapunk χ-ből, hogy R (ill. $\mathbf{E}(x,y)$) helyébe mindenütt $\bar{R}$ -et (ill. $\exists z(\bar{R},x\neq y)$ -t) írunk.

Nyilvánvalóan $\vdash_3 (R,x\neq y) \leftrightarrow (\bar{R},x\neq y)$ az $\bar{R}$ definiciójából, hiszen $(\bar{R},x\neq y) \leftrightarrow ([\neg A\xi,R,x\neq y] \vee [A\xi,R,x\neq y]) \leftrightarrow (R,x\neq y)$. Ezért

$\vdash_3 \exists z(R,x\neq y) \leftrightarrow \exists z(\bar{R},x\neq y)$, és így minden χ formulára

(4) $\vdash_3 \chi_R \leftrightarrow \chi_{\bar{R}}$.

(Itt használtuk, hogy a $\vdash_3$ levezetési rendszernek jólismert és könnyen ellenőrizhető tulajdonsága, hogy mint általában más rendszereknél, itt is ekvivalens formulára cserélve ki egy részformulát, ismét ekvivalens formulát kapunk. Következőképp megmutatjuk, hogy

(5) $\vdash_3 A\xi \leftrightarrow A\xi(\bar{R})$.

Valóban, $\vdash_3 \neg A\xi \rightarrow (R \leftrightarrow \bar{R})$ az $\bar{R}$ definiciójából, ezért $\vdash_3 \neg A\xi \rightarrow \neg A\xi(\bar{R})$. A másik irány, $\vdash_3 A\xi \rightarrow A\xi(\bar{R})$, bizonyítása: Legyen $\bar{S} \overset{d}{=} \exists yz(\bar{R},x=y)$. Akkor $\bar{S} = S(\bar{R})$. Vegyük észre, hogy $Ax_{\bar{R}} = Ax_R(\bar{R})$, mert Ax -ban csak az $\mathbf{E}$ relációjel fordul elő (és R nem). Ezért

(*) $A\xi(\bar{R}) = \forall xyz[Ax_{\bar{R}}, (\bar{R} \leftrightarrow \exists z\bar{R}), (\bar{S} \leftrightarrow (\bar{S}\circ\varepsilon)_{\bar{R}})]$.

A (4) szerint $\vdash_3 Ax_R \leftrightarrow Ax_{\bar{R}}$, és így mivel $\vdash_3 A\xi \rightarrow Ax_R$, azért

(**) $\vdash_3 A\xi \rightarrow Ax_{\bar{R}}$.

Az $\bar{R}$ definiciójából kapjuk, hogy

(6) $\vdash_3 A\xi \rightarrow (\bar{R} \leftrightarrow [(R,x\neq y) \vee (\tau^{\varepsilon}(S)_R,x=y)])$,

az $A\xi$ definiciójából következik, hogy $\vdash_3 A\xi \rightarrow (R \leftrightarrow \exists zR)$, így (CA)-val kapjuk, hogy

(7) $\vdash_3 A\xi \rightarrow [(R,x\neq y) \leftrightarrow \exists z(R,x\neq y)]$.

Továbbá, $z \notin szv(\tau^{\varepsilon}(S)_R,x=y)$ mert $\tau^{\varepsilon}(S) \in Fm^{\Lambda,1}$ és $z \notin szv(\exists z(R,x\neq y))$, így (SZV)-vel kapjuk, hogy

(8) $\vdash_3 A\xi \rightarrow [(\tau^{\varepsilon}(S)_R,x=y) \leftrightarrow \exists z(\tau^{\varepsilon}(S)_R,x=y)]$.

Most (6)-(8) -ból következik, hogy

($*^3$) $\vdash_3 A\xi \rightarrow (\bar{R} \leftrightarrow \exists z\bar{R})$.

(6)-ból kapjuk, hogy

(9) $\vdash_3$ $A\xi \to [(\bar{R},x{=}y) \leftrightarrow (\tau^{\varepsilon}(S)_R,x{=}y)]$, és így

$\vdash_3$ $A\xi \to [\exists yz(\bar{R},x{=}y) \leftrightarrow \exists yz(\tau^{\varepsilon}(S)_R,x{=}y)]$, ekkor $\bar{S}$ definiciója, (8),

$y \notin szv(\tau^{\varepsilon}(S)_R)$ és $CA \models C_3, c_1 d_{01}{=}1$ miatt

(10) $\vdash_3$ $A\xi \to [\bar{S} \leftrightarrow \tau^{\varepsilon}(S)_R]$. Szintén, $A\xi$ definiciója miatt

$\vdash_3$ $A\xi \to (S \leftrightarrow (S \circ \varepsilon))_R$, ezért 9.T (i) szerint

$\vdash_3$ $A\xi \to (\tau^{\varepsilon}(S) \leftrightarrow (\tau^{\varepsilon}(S) \circ \varepsilon))_R$, így (10),(4) szerint

($\ast^4$) $\vdash_3$ $A\xi \to (\bar{S} \leftrightarrow (\bar{S} \circ \varepsilon)_{\bar{R}})$.

Most ($\ast$)-($\ast^4$) -ből kapjuk, hogy $\vdash_3$ $A\xi \to A\xi(\bar{R})$. QED(5).

Rátérünk $\vdash_3$ $R \leftrightarrow \psi(\bar{R})$ bizonyítására. Idézzük fel, hogy

$\psi(\bar{R})$ = $(\neg A\xi(\bar{R}),\bar{R}) \vee (A\xi(\bar{R}),[(\bar{R},x{\neq}y) \vee (\sigma^{\varepsilon}(\bar{S})_{\bar{R}},x{=}y)])$.

Mivel $\mathfrak{E}n\mathfrak{r}/{\equiv_{Ax}} \in RRA$, $RRA \models \sigma(\tau(x)){=}x$, és $A\xi$-ból következik, hogy S ekvivalens Ev egy elemével, azért

Ax $\vdash_3$ $A\xi \to (\sigma^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}(S) \leftrightarrow S)$, így $A\xi_R = A\xi$ miatt

Ax_R $\vdash_3$ $A\xi \to (\sigma^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}(S)_R \leftrightarrow S)$, innen (D)-vel kapjuk, mivel $Ax_R \in Fm^{\Lambda,0}$, hogy

(11) $\vdash_3$ $A\xi \to (\sigma^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}(S)_R \leftrightarrow S)$. A $\psi(\bar{R})$ definiciójából és (5)-ből

$\vdash_3$ $(A\xi,x{=}y) \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow \sigma^{\varepsilon}(\bar{S})_{\bar{R}})$, és ebből (10),(4) szerint

$\vdash_3$ $(A\xi,x{=}y) \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow \sigma^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}(S))_R)$, ekkor (11) szerint

$\vdash_3$ $(A\xi,x{=}y) \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow S)$, és így mivel könnyen látható, hogy

$\vdash_3$ $A\xi \to [(S,x{=}y) \leftrightarrow (R,x{=}y)]$, azért

(12) $\vdash_3$ $(A\xi,x{=}y) \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow R)$. Hasonlóan, a $\psi(\bar{R})$ definiciójából

$\vdash_3$ $(A\xi,x{\neq}y) \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow \bar{R})$, az $\bar{R}$ definiciójából pedig

$\vdash_3$ $(A\xi,x{\neq}y) \to (\bar{R} \leftrightarrow R)$, tehát

(13) $\vdash_3$ $(A\xi,x{\neq}y) \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow R)$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy

(14) $\vdash_3 \ \neg A\xi \to (\psi(\bar{R}) \leftrightarrow R)$.

Most (12)-(14) -ből következik, hogy

($\varkappa^5$) $\vdash_3 \ R \leftrightarrow \psi(\bar{R})$.

Megmutatjuk, hogy $\vdash_3 \eta(\bar{R})$. Idézzük fel, hogy $\eta(\bar{R}) = A\xi(\bar{R}) \to \leftrightarrow \text{pár}(x))_{\bar{R}}$. Mivel $RRA \models \delta(\tau(x))=1$, azért a (11)-hez hasonlóan kapjuk, hogy

(15) $\vdash_3 \ A\xi \to [(\delta^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon}(S) \leftrightarrow \text{pár}(x))_R]$. A (10),(4) és (5) szerint ekkor

$\vdash_3 \ A\xi(\bar{R}) \to (\delta^{\varepsilon}(\bar{S}) \leftrightarrow \text{pár}(x))_{\bar{R}}$, azaz

($\varkappa^6$) $\vdash_3 \ \eta(\bar{R})$.

Annak megmutatása maradt hátra, hogy $\not\models \eta$. A bizonyítás eddigi részeiben p_0, p_1 tetszőleges volt, a $\not\models \eta$ megmutatásához azonban feltesszük, hogy p_0, p_1 olyan, hogy $\pi \wedge (\mathbf{E}(x,y) \to x \neq y)$ -nak van végtelen modellje. Ilyen p_0, p_1 formula van (ld. pl. a 14.T bizonyítását). Mondjuk, $\mathfrak{M} = \langle M,G \rangle \models \pi \wedge (\mathbf{E}(x,y) \to x \neq y)$, ahol $|M| \geqslant \omega$. Akkor $\mathcal{R}(M) \not\models \delta=1$ a (3) szerint, tehát van $H \subseteq {}^2M$, hogy $\delta^{\mathcal{R}(M)}(H) \neq {}^2M$. Minden $P \subseteq {}^2M$ -re legyen $\hat{P} \overset{d}{=} \{a \in M : (p_0^{\mathfrak{M}}(a), p_1^{\mathfrak{M}}(a)) \in P\}$ és legyen

$$K \overset{d}{=} \{(a,b,c) \in {}^3M : (a,b) \in G\} \cup \{(a,a,c) \in {}^3M : a \in \hat{H}\} ,$$

$$\mathfrak{N} \overset{d}{=} \langle M,K \rangle .$$

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{N} \not\models \eta$. A K konstrukciója miatt $G = \{(a,b) \in {}^2M : \mathfrak{N} \models \exists z(R, x \neq y)[a,b]\}$, így $\mathfrak{M} \models \pi$ miatt $\mathfrak{M} \models Ax$ és emiatt

(16) $\mathfrak{N} \models Ax_R$. Nyilvánvalóan

(17) $\mathfrak{N} \models R \leftrightarrow \exists zR$.

Ha $\varphi \in Fm^{\Lambda,1}$ akkor legyen $\tilde{\varphi} \overset{d}{=} \{a \in M : \mathfrak{N} \models \varphi[a]\}$. Akkor a K konstrukciója szerint $\tilde{S} = \hat{H}$. A 12.T bizonyításában (ld. (2)) láttuk, hogy ha $\tilde{\varphi} = \hat{H}$ akkor minden $\tau \in RAT$ -ra $\widehat{\tau^{\varepsilon}(\varphi)} = \widehat{\tau^{\mathcal{R}(M)}(H)}$. Ezért $\widehat{S \circ \varepsilon} = \widehat{(H|Id_M)} = \hat{H} = \tilde{S}$, tehát

(18) $\mathfrak{N} \models (S \leftrightarrow S \circ \varepsilon)_R$.

Eddig a (16)-(18) -al láttuk, hogy $\mathfrak{M} \models A\xi$. Szintén, $\delta^{\mathfrak{R}(M)}(H) \neq {}^2M$ miatt $\widetilde{\delta^{\xi}(S)} \neq \widehat{{}^2M} = \text{Pár}^{\mathfrak{M}}$, és így $\mathfrak{N} \not\models (\delta^{\xi}(S) \leftrightarrow \text{pár}(x))_R$. Tehát $\mathfrak{N} \not\models A\xi \rightarrow (\delta^{\xi}(S) \leftrightarrow \text{pár}(x))_R$, azaz

$(\ast^7)$ $\not\models \eta$.

Tehát $(\ast^5)$-$(\ast^7)$ -el bizonyítottuk (1) -et, amiről láttuk hamarabb, hogy elég a tétel bizonyításához. QED(19. Tétel)

20. MEGJEGYZÉS (i) A 19.T fenti bizonyításából azt is megkapjuk, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta K$ -nak van β-elemű nem-szabad generátorrendszere ha K=RA (ez Jónsson egy kérdésére válasz, ld. [J85]), sőt ha $\mathfrak{R}(\omega) \in K \subseteq SA$ akkor is - de nincs ha K=WA vagy K=NA, mert ezeket generálják a véges elemeik, amint azt [N85c]-ban bizonyítottuk. Hasonló okokból, a 19.T nem igaz $\alpha \leq 2$ -re és $\beta < \omega$-ra, ez ismert volt, ld. [HMT] 2.5.23. (Ha $\beta \geq \omega$, akkor minden K -ra $\mathfrak{Fr}_\beta K$ -nak van β-elemű nem-szabad generátorrendszere.) A [HMT]2.5.20 bizonyítja, hogy $\mathfrak{Fr}_\beta\, CA_\alpha$-t nem lehet β-nál kevesebb elemmel generálni.

(ii) A 19.T bizonyításabeli (2) állításban $\models$ valószínűleg nem cserélhető ki $\vdash_3$ -ra. Azonban, ha $A\xi'$-höz hozzáadunk még néhány formulát (lényegében azokat, melyek egy "elsőrendű" bizonyítás során felmerülnek, pl. "$R(\!(x,z)\!) \wedge \exists x(x=y, suc(\!(z,x)\!)) \rightarrow R(\!(x,y)\!)$" -t), akkor az így módosított $A\xi'', \varphi'', \psi'', \eta''$ -re a (2) állításban $\models$ már kicserélhető $\vdash_3$ -ra. Részletes végigszámolás kéziratban megvan, ld. [N86, a]. ■

A II.1 fejezet végén elmondtuk, hogy jelen dolgozat egyik alaptémája az a (Tarski által a harmincas évek vége óta vizsgált) probléma, mely a leggyengébb olyan logikát keresi, melyben még felépíthető L_ω (tehát a matematika is). Jelen (II) fejezetben megtudtuk, hogy ha a választ L_n alakban keressük, akkor ez a logika L_3. Tarski azonban algebrai alakban is meg akarta kapni a választ: bizonyította, hogy a reláció-algebrák (RA) azonosságelméletében még felépíthető L_ω és azt kérdezte, hogy RA mely gyengítéseiben*/ tehető ez még meg. Kérdésfelvetésében azt is megfogalmazta, hogy milyen gyengítésekre gondol (ld. pl. [TG]). A következő (III) fejezet tartalmazza e probléma pontosabb ismertetését, valamint megoldását.

---

*/Tekintve, hogy jelen dolgozat szerint CA_3-ban is felépíthető L_ω (CA_3 tekinthető RA egy gyengítésének), az is felmerül, hogy CA_3 mely nevezetes gyengítéseiben tehető ez még meg. Ezt is a következő fejezet tárgyalja.

III. A CILINDRIKUS-RELATIVIZÁLT HALMAZALGEBRÁK AZONOSSÁGELMÉLETE ELDÖNTHETŐ - A KVANTOROK FELCSERÉLHETŐSÉGÉNEK FONTOSSÁGA A LOGIKÁBAN

EqK jelöli a K algebraosztályban érvényes azonosságok halmazát. Az előző II. fejezet eredményei szorosan kapcsolódnak EqK eldönthetőségének kérdéséhez, ahol $K \supseteq CA_3$ ill. $K \supseteq RA$. Jelen fejezetben megmutatjuk például, hogy a II.12.T.-ből hogyan bizonyítható EqK eldönthetetlensége K bizonyos választásai esetén. Megpróbáljuk majd azt is kitapintani, hogy ezzel milyen messzire távolodhatunk el CA_3 (ill. RA) -tól. (Látni fogjuk, hogy nem túlságosan: $EqCrs_3$ már eldönthetőnek bizonyul majd.)

Tarski bizonyította [TG]-ben, hogy az elsőrendű logika felépíthető EqRA -ban*/. A bizonyításban a reláció-kompozíció asszociativitása lényeges szerepet játszik és ezért Tarski felvetette a kérdést, hogy mennyire szükséges az asszociativitás a tétel érvényességéhez. E problémára reagálva, Maddux definiálta az asszociativitás gyengítéseit: a félig ill. gyenge asszociativitást (mindkettőnek van erős intuitív jelentése) és ezzel definiálta az $NA \subset WA \subset SA \subset RA$ osztályokat (ld. I. fejezet). Maddux [Ma82] bizonyította, hogy az RA-elmélet sok tétele igaz még NA -ban is, hogy minden $\mathfrak{A} \in WA$ megkapható egy reprezentálható RA -ból relativizálással (úgy, hogy az egység-relációról, ami RA -knál ekvivalencia-reláció, nem kötjük ki, hogy tranzitív) és hogy az SA osztály nagyon közel áll CA_3 -hoz: a félig-asszociativitás az a része az asszociativitásnak, ami még 3 változójellel bizonyítható [Ma83]. A jelen disszertáció II. fejezetében megmutattuk, hogy az elsőrendű logika felépíthető EqSA -ban is (ld. II.18.Mj(v)). A két "felépíthetőségi" tételből következményként kapjuk, hogy EqRA nem eldönthető (Tarski tétele, [T41]) és hogy EqSA nem eldönthető (Maddux tétele, [Ma78]). [N85c]-ben bizonyítottuk, hogy mind EqWA mind EqNA már eldönthető. Ebből az is következik, hogy az elsőrendű logika nem építhető már fel sem EqWA, sem EqNA -ban. Összefoglalva: ha az asszociativitást a félig-asszociativitásra gyengítjük, akkor ez még nem gyengíti nagyon az RA erejét, de ha tovább gyengítjük a gyenge asszociativitásra, vagy elhagyjuk, akkor ez drasztikus következményekkel jár: az RA ereje elvész.

*/Erről bővebben a II.1 fejezet végén és a II. fejezet végén írtunk.

Általános felfogás, hogy a reláció-kompozíció asszociativitásának a CA-elméletben a cilindrifikációk felcserélhetősége felel meg (ez a C_4 axióma). A jelen III. fejezetben megmutatjuk, hogy valóban, ha a C_4 axiómát elhagyjuk a CA_α definíciójából, akkor az így kapott NCA_α osztály eldönthető (ez analóg azzal, hogy NA eldönthető), sőt (azzal analóg módon, hogy WA eldönthető), $EqCrs_\alpha$ is eldönthető minden α-ra. Ez utóbbi a III. fejezet főtétele. Mindkét tételnek megmutatjuk a logikai jelentését ill. következményeit.

A CA-elmélet leglényegesebb eldönthetőséggel kapcsolatos tételei a következők: Ha $\alpha \leq 2$, akkor $EqCA_\alpha$, $EqRCA_\alpha$ eldönthető (Henkin tétele CA_2 -re, Dana Scott tétele RCA_2 -re), ha $RCA_\alpha \subseteq K \subseteq CA_\alpha$ és $\alpha \geq 3$, akkor EqK nem eldönthető (Maddux tétele $\alpha=3$ -ra, Tarski tétele $\alpha \geq 4$ -re). Tarski ezen tételére logikai bizonyítást adott, nevezetesen a II.1 fejezetben tárgyalt (TMT) tételét használta. Az $\alpha=3$ eset itt is sokkal nehezebb, sokáig nyitott probléma volt, hogy $EqCA_3$ eldönthető-e. Ezt a problémát végül Maddux oldotta meg 1976-ban (ld. [Ma76],[Ma78], [Ma80]) és bizonyította azt is, hogy EqSA nem eldönthető. Mindkét eredményhez a félcsoportok szóproblémájának megoldhatatlanságát használta (tehát tisztán algebrai bizonyítást adott ismét*/, Tarski tételére is). Alább, mielőtt rátérnénk a III. fejezet eldönthetőségi tételeire, adunk egy bizonyítást Maddux eredményére, mely bizonyítás teljesen analóg Tarski (CA_α, $\alpha \geq 4$ és RA -ra vonatkozó) bizonyításával - a különbség csupán az, hogy Tarski (TMT) tétele helyett a mi II.12.T. tételünket használjuk. Ezzel megmutatjuk azt is, hogy hogyan lehet a II. fejezet eredményeit eldönthetetlenségi tételek bizonyítására használni.

<u>1. KÖVETKEZMÉNY</u> (Maddux) $EqCA_3$ nem eldönthető.

<u>Bizonyítás</u>: Legyen $|\mathcal{R}|<\omega$. Emlékezzünk rá, hogy a II.12.T(i) szerint $(\forall \varphi \in Fm^0_\omega)[\pi \models \varphi \iff \pi \models_3 \kappa\varphi]$, ezenkívül $\pi \in Fm^0_3$ és $\kappa : Fm^0_\omega \to Fm^0_3$ rekurzív. Először megjegyezzük, hogy könnyen látható, hogy

(*) $\{\varphi \in Fm^0_\omega : \pi \models \varphi\}$ nem eldönthető

valamely $p_0 \cdot p_1$ -re (ez pl. abból is látszik, hogy van nem-szeparálható

*/ Ugyanúgy, ahogy a $QRA \subseteq RRA$ tételre tisztán algebrai bizonyítást adott, ld. II. fejezet.

formula, mely konzisztens a π-vel, ld. pl. a II.14.T. bizonyítását). Akkor a II.12.T(i) szerint

(**) $\{\varphi\in Fm^0_\omega : \pi\vdash_3 \varkappa(\varphi)\}$ nem eldönthető.

Legyen $\tau\mu' : \mathfrak{Fm}_3 \to \mathfrak{Tm}_{\mathcal{R}}(cil_3)$ olyan, hogy $\tau\mu'(R(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1))=c_2R$ minden $R\in\mathcal{R}$-re. Akkor $\tau\mu'$ rekurzív függvény és nem nehéz látni, hogy $(\forall\varphi,\psi \in Fm^0_3)[\varphi\vdash_3\psi \Leftrightarrow CA_3 \models \tau\mu'(\varphi)\le\tau\mu'(\psi)]$. Ebből és (**)-ből rögtön következik, hogy $EqCA_3$ nem eldönthető. QED(1. Következmény)

Megjegyezzük, hogy a fentihez hasonló módon bizonyítható a II.12.T(i)-ből az is, hogy ha $RCA_\alpha\subseteq K\subseteq CA_\alpha$, $\alpha\geq 3$ akkor EqK nem eldönthető és ha $RRA\subseteq K\subseteq SA$, akkor EqK nem eldönthető. Megjegyezzük továbbá, hogy [N85b]-ben bizonyítottuk, hogy $\alpha\geq\omega$ esetén csak "triviális" $K\subseteq CA_\alpha$ osztályokra igaz, hogy EqK eldönthető*/. Ugyanott azt is vizsgáltuk, hogy véges α esetén mely $K\subseteq CA_\alpha$ -ra dönthető el EqK.

Ebben a fejezetben az "eldönthető" fogalmat nemcsak ω részhalmazain értelmezzük, nem is csak termhalmazokon, hanem más halmazokon is (pl. végestipusú véges algebrák halmazán), az intuitíve természetes értelemben. Hasonlóan járunk el rekurzív függvények esetében is. Az "eldönthető", "rekurzív", "kiszámítható" szavakat szinonímaként használjuk. Bizonyítások belsejében a kapcsolódó kifejezéseket "pongyola módon" használjuk néha, pl. azt mondjuk, hogy "N(τ) kiszámítható" ahelyett, hogy "az N függvény kiszámítható", vagy hogy "eldönthető, hogy van-e τ-fa" ahelyett, hogy "van egy rekurzív függvény, mely minden τ-ra megmondja, hogy van-e τ-fa".

2. DEFINICIÓ Legyen K egy struktura-osztály. (Tehát K algebra-osztály is lehet.)

(i) Azt mondjuk, hogy K erősen eldönthető, ha hasonlósági tipusa véges és van rekurzív $f:\omega\to\omega$ függvény, melyre igaz, hogy

a) $(\forall\mathfrak{A}\in K)(\forall X\subseteq_\omega A)(\exists\mathfrak{B}\in K)[X\upharpoonright\mathfrak{A} = X\upharpoonright\mathfrak{B}$ és $|B|\le f(|X|)]$, és

b) $\{\mathfrak{A}\in K : A\in\omega\}$ eldönthető.

---

*/Ezzel bizonyítottuk azt is, hogy $EqMn_\alpha$ és $EqMg_\alpha$ nem eldönthető (hiszen ezek nem "triviális" részosztályai CA_α-nak), ez megoldja a [HMT] 4.11 és 4.12 Problémákat. (Ld. még [N85h].)

(ii) $\mathbf{F}K \stackrel{d}{=} \{\mathfrak{A}\in K : |A|<\omega\}$. */

(iii) QeqK jelöli a K-ban érvényes kvázi-azonosságok halmazát. ∎

<u>3. MEGJEGYZÉS</u> Legyen K egy algebra-osztály.

(i) Ha K erősen eldönthető, akkor könnyen látható, hogy EqK eldönthető, sőt a K-ban érvényes univerzális formulák halmaza is eldönthető. Speciálisan, QeqK eldönthető, és emiatt a K szóproblémája megoldható. Ezenkívül EqK = Eq$\mathbf{F}$K, sőt az $\mathbf{F}$K és a K nem különböztethető meg egymástól még univerzális formulákkal sem.

(ii) Kapcsolatok EqK eldönthetősége és EqK=Eq$\mathbf{F}$K között: Taylor [Ta79]p.26 említi, hogy ha K végesbázisú (vagy általánosabban rekurzív bázisú) és EqK=Eq$\mathbf{F}$K, akkor EqK eldönthető. (Valóban, ezt nem nehéz látni: EqK felsorolható mert K véges bázisú, másrészt a K -ban nem-érvényes azonosságok is felsorolhatók mert EqK=Eq$\mathbf{F}$K és K végesbázisú). Itt azt, hogy K rekurzív bázisú, nem lehet kicserélni arra, hogy EqK felsorolható: Legyen $N\subsetneq\omega$ felsorolható de nem eldönthető, legyen $E \stackrel{d}{=} \{gf^n0=f^n0 : n\in N\}$ (tehát f,g egyargumentumú függvényjelek és 0 konstansjel) és legyen K az E -vel definiált varietás. Akkor könnyen látható, hogy EqK felsorolható de nem eldönthető és hogy EqK=Eq$\mathbf{F}$K. Ez a példa egyben azt is mutatja, hogy a b) feltétel nem hagyható el a 2.D(i)-ből (anélkül, hogy "K erősen eldönthető $\Rightarrow$ EqK eldönthető" ne váljon hamissá). De fordítva is, nem nehéz konstruálni olyan K algebra-osztályt, melyre EqK véges-bázisú és eldönthető de EqK $\neq$ Eq$\mathbf{F}$K : Legyen E = {gfx=x, g0=0} és legyen K az E-vel definiált varietás. Akkor könnyen látható, hogy EqK eldönthető, $\mathbf{F}K \models 0=f0$ és $K \not\models 0=f0$.

(iii) Henkin azt bizonyította, hogy CA_2 erősen eldönthető, sőt RCA_2 is erősen eldönthető, ld. [HMT]2.5.4, 4.2.8. [N85c]-ben mi is azt bizonyítottuk, hogy WA és NA erősen eldönthető. ∎

---

*/Ez az $\mathbf{F}$ operátor nem tévesztendő össze az $\mathbf{F}\in Fm^{\Lambda}$ kitüntetett formulával.

III.1. A nem-kommutatív cilindrikus algebrák azonosságelméletének eldöntése - a kvantorok felcserélhetőségének bizonyításelméleti jelentősége.

Az alábbi NCA_α algebraosztályt R.J. Thompson definiálta és vizsgálta először, ő "nemkommutatív CA_α"-knak nevezi az NCA_α elemeit.

4. DEFINICIÓ Legyen α tetszőleges halmaz. NCA_α azon $\mathfrak{A} \in CTA_\alpha$-beli algebrák osztálya, melyek teljesítik a C_4-et kivéve a CA_α-t definiáló azonosságokat, azaz

$$NCA_\alpha \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} \in CTA_\alpha : \mathfrak{A} \models C_0 \cup C_1^\alpha \cup C_2^\alpha \cup C_3^\alpha \cup C_5^\alpha \cup C_6^\alpha \cup C_7^\alpha\} . \blacksquare$$

Alább bizonyítjuk, hogy az NCA_α osztály azonosságelmélete eldönthető, nincs olyan azonosság, mely a véges NCA_α-kban érvényes de NCA_α-ban nem ha $\alpha < \omega$; de mégis NCA_α nem erősen eldönthető mert van egy kváziazonosság, mely a véges NCA_α-kban érvényes és NCA_α-ban nem érvényes.

5. TÉTEL Legyen α tetszőleges halmaz.

(i) $EqNCA_\alpha$ eldönthető (ha α eldönthető)

(ii) $EqNCA_\alpha = Eq\mathsf{F}NCA_\alpha$, ha $\alpha < \omega$.

(iii) $QeqNCA_\alpha \neq Qeq\mathsf{F}NCA_\alpha$, ha $|\alpha| \geqslant 3$. Tehát NCA_α nem erősen eldönthető, ha $\alpha \geqslant 3$.

Bizonyítás: Először néhány jelölést vezetünk be. A következő konstrukciókban gyakran fogunk kifejezésekkel (termekkel) bánni. Legyen X egy változójelhalmaz és legyen $x\in X$ rögzített. $Tm_X(cil_\alpha)$ helyett csak Tm -t fogunk írni. Úgy képzeljük, hogy Tm elemei az X-ből a $-,\cdot,c_i,d_{ij}$ $(i,j\in\alpha)$ műveletekkel épülnek fel (tehát a $0,1,+$ -t levezetett operációknak tekintjük).

Definiáljuk a t_α algebrai tipust a következőképpen:

$$t_\alpha \overset{d}{=} \{(t_{in},1) : i\in\alpha,\ n\in\alpha\cup Tm\},$$

azaz t_α-ban csupa egyargumentumú függvényjel van. $Tm_{\{x\}}(t_\alpha)$ helyett csak $Tm(t_\alpha)$ -t írunk. Ha Γ egy termhalmaz, akkor $Részt(\Gamma)$ jelöli a Γ elemei résztermjeinek halmazát, $Részt(\{\sigma\})$ helyett csak $Részt(\sigma)$ -t írunk. $Részt(\sigma)' \overset{d}{=} \{\delta,-\delta : \delta\in Részt(\sigma)\}$.

Definiáljuk egy $\sigma\in Tm\cup Tm_X(t_\alpha)$ term $\|\sigma\|$ hosszát:

$$\|y\| \overset{d}{=} 1 \quad \text{ha } y\in X,$$
$$\|t_{in}w\| \overset{d}{=} \|w\|+1, \quad \text{ha} \quad t_{in}w\in Tm_X(t_\alpha), \quad \text{és}$$
$$\|d_{ij}\| \overset{d}{=} 1,$$
$$\|-\sigma\| \overset{d}{=} \|c_i\sigma\| \overset{d}{=} \|\sigma\|+1,$$
$$\|\delta\cdot\sigma\| \overset{d}{=} \|\delta\|+\|\sigma\|, \quad \text{ha } \sigma,\delta\in Tm \text{ és } i,j\in\alpha.$$

$Ekv(H)$ jelöli a H halmaz ekvivalencia-relációinak halmazát. Ha $e\in Ekv(H)$ és $G\subseteq H$ akkor $G\rceil_o e \overset{d}{=} {}^2G\cap e$. Megjegyezzük, hogy ha $e\in Ekv(H)$ és $h\in H$, akkor $e^*\{h\}$ a h osztálya az e szerint. Legyen $e\in Ekv(H)$ és $g\in H$. Akkor $e(g/h)$ jelöli azt az ekvivalenciát H -n, melyet úgy kapunk e -ből, hogy g -t a h osztályához tesszük át ha $h\in H$, egyébként ha $h\notin H$ akkor g -t egy teljesen különálló osztályba tesszük, azaz

$$e(g/h) \overset{d}{=} [(H\sim\{g\})\rceil_o e]\cup{}^2(\{g\}\cup e^*\{h\}).$$

(Megjegyezzük, hogy ha $h\notin H$ akkor $e^*\{h\}=0$.) Azt mondjuk, hogy i szinguláris e -ben, ha $e^*\{i\}=\{i\}$. A következőkben feltesszük, hogy α rendszámokból álló halmaz. Ekkor α-n van egy jólrendezés, a $\subseteq$, és ha $\Gamma\subseteq\alpha$, akkor $\min(\Gamma)$ jelöli e rendezés szerinti legkisebb elemét Γ-nak.

5.1 DEFINICIÓ Legyen $e\in Ekv(\alpha)$ és $\tau\in Tm$.

(i) Definiáljuk $E^e : Tm(t_\alpha)\to Ekv(\alpha)$ -t rekurzióval a következőképpen:

$E^e(x) \stackrel{d}{=} e$ és $E^e(t_{in}w) \stackrel{d}{=} E^e(w)(i/n)$ ha $t_{in}w \in Tm(t_\alpha)$.

(ii) Legyen $i\in\alpha$, $n\in\alpha\cup Tm$ és $w\in Tm(t_\alpha)$. Azt mondjuk, hogy w i-vel kezdődik, ha $w=t_{i\ell}w'$ valamely ℓ és w'-re. Definiáljuk $t^e_{in} : Tm(t_\alpha) \to Tm(t_\alpha)$ -t a következőképpen:

Legyen $k \stackrel{d}{=} \begin{cases} \min(E^e(w)^*\{n\}) & \text{ha } n\in\alpha \\ n & \text{ha } n\notin\alpha \end{cases}$. Akkor

$$t^e_{in}w \stackrel{d}{=} \begin{cases} w & \text{ha } (i,n)\in E^e(w) \text{ ; \underline{egyébként}} \\ t_{ik}w & \text{ha } w \text{ nem kezdődik } i\text{-vel} \\ t_{ik}w' & \text{ha } (\exists \ell)w=t_{i\ell}w' \text{ és } (i,k)\notin E^e(w') \\ w' & \text{ha } (\exists \ell)w=t_{i\ell}w' \text{ és } (i,k)\in E^e(w') \end{cases}.$$

(iii) Azt mondjuk, hogy P egy τ-fa, ha

(1) $P\subseteq Tm(t_\alpha)\times Tm$, és ha $(w,\sigma)\in P$ akkor $\|w\|\leq\|\tau\|$, $(\forall i,n)[t_{in}$ előfordul w-ben $\Rightarrow n\in Részt(\tau)'\cup\alpha]$, és $\sigma\in Részt(\tau)'\cup\{d_{ij},-d_{ij} : i,j\in\alpha\}$.

(2)a) $(x,\tau)\in P$

b) $e \stackrel{d}{=} \{(i,j) : (x,d_{ij})\in P\} \in Ekv(\alpha)$.

c) minden $w\in Tm(t_\alpha)$, $i,j\in\alpha$ és $\sigma,\delta\in Tm$ -re

c1) $(w,\sigma)\in P \Rightarrow \{(w,d_{ij}) : (i,j)\in E^e(w)\}\cup\{(w,-d_{ij}) : (i,j)\notin E^e(w)\}\subseteq P$

c2) $(w,\sigma\cdot\delta)\in P \Rightarrow \{(w,\sigma),(w,\delta)\}\subseteq P$

$(w,-(\sigma\cdot\delta))\in P \Rightarrow [(w,-\sigma)\in P$ vagy $(w,-\delta)\in P]$

$(w,-(-\sigma))\in P \Rightarrow (w,\sigma)\in P$

$(w,-c_i\sigma)\in P \Rightarrow \{(t^e_{in}w,-\sigma) : n\in\alpha$ vagy $t^e_{in}w\in DomP\}\subseteq P$

$(w,c_i\sigma)\in P \Rightarrow (\exists n\in\alpha\cup Részt(\tau)')(t^e_{in}w,\sigma)\in P$

c3) $(w,\sigma)\in P \Rightarrow (w,-\sigma)\notin P$. ∎

A τ-fa szemléletes jelentéséről ld. a 6.Mj(ii)-t.

<u>5.2. ÁLLÍTÁS</u> Legyen $\tau\in Tm$.

(i) $NCA_\alpha \not\models \tau=0 \iff$ van τ-fa.

(ii) Van $N : Tm\to\omega$ rekurzív függvény, melyre igaz, hogy $[NCA_\alpha\models\tau=0 \iff \{\mathfrak{A}\in NCA_\alpha : |A|\leq N(\tau)\} \models \tau=0]$, ha $\alpha<\omega$.

<u>Bizonyítás:</u> Az 5.2.Á. bizonyításában szükségünk lesz az NCA_α-hoz tartozó atomstrukturák definiciójára.

5.3. DEFINICIÓ Legyen $\mathcal{B} = \langle B, T_i, E_{ij}\rangle_{i,j\in\alpha}$ olyan, hogy minden $i,j\in\alpha$-ra $T_i \subseteq {}^2B$ és $E_{ij}\subseteq B$.

(a) Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ parciális N-atomstruktura, $\mathcal{B}\in pNAt_\alpha$, ha $\mathcal{B}$ teljesíti az alábbi (i)-(iv) feltételeket, minden $i,j,k\in\alpha$-ra.

(i) $T_i \in Ekv(B)$.

(ii) $E_{ii}=B$, $E_{ij}=E_{ji}$, $E_{ik}\cap E_{kj}\subseteq E_{ij}$.

(iii) $E_{ij}=T_k{}^{*}E_{ij}$ ha $k\notin\{i,j\}$.

(iv) $T_i\cap {}^2E_{ij}\subseteq Id$ ha $i\neq j$.

(b) Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ N-atomstruktura, $\mathcal{B}\in NAt_\alpha$, ha $\mathcal{B}$ a fenti (i)-(iv) feltételeken kívül teljesíti az alábbi (v) feltételt is, minden $i,j,k\in\alpha$-ra:

(v) $E_{ij}\subseteq T_k{}^{*}(E_{ik}\cap E_{kj})$.

(c) Legyen $\mathcal{B}\in pNAt_\alpha$. Akkor $\mathcal{B} = \langle B, T_i^{\mathcal{B}}, E_{ij}^{\mathcal{B}}\rangle_{i,j\in\alpha}$, azaz $\mathcal{B}$ univerzumát B-vel és a megfelelő relációkat $\mathcal{B}$ felső indexxel jelöljük, ha mást nem mondunk. Hasonlóan járunk el más gót betűk esetén is.

(d) Legyen $\mathcal{B}\in pNAt_\alpha$, $b\in B$ és $i,j\in\alpha$. Akkor

$E^{\mathcal{B}}(b) \overset{d}{=} \{(i,j)\in{}^2\alpha : b\in E_{ij}^{\mathcal{B}}\}$ és

$t_{ij}^{\mathcal{B}} \overset{d}{=} \{(a,b)\in{}^2B : aT_i^{\mathcal{B}}b$ és $b\in E_{ij}^{\mathcal{B}}\}$, ha $i\neq j$; $t_{ii}^{\mathcal{B}} \overset{d}{=} Id_B$. ■

5.4. ÁLLITÁS $NCA_\alpha = \mathbf{ISCm}NAt_\alpha$.

Bizonyítás: [HMT]2.7.5, 2.7.14, 2.7.34-ből következik 2.7.43(ii) bizonyításának mintájára. Mivel rutinbizonyítás, nem írjuk le. ■

5.5. MEGJEGYZÉS A következőket könnyű ellenőrizni, ezért nem írjuk le a bizonyításukat. A megjegyzés (3) részét később nem fogjuk használni - főleg az intuició megsegítése végett írtuk le, mivel a (3)-ban leírtak rámutathatnak arra, hogy miért definiáltuk a dolgokat úgy, ahogy definiáltuk őket.

(1) NAt_α az I.4.2 fejezet (b) pontjában definiált At_α osztály bővítése, nevezetesen az At_α definiciójából elhagytuk azt a feltételt, hogy $T_i|T_j=T_j|T_i$ minden $i,j\in\alpha$-ra. Ezenkívül $pNAt_\alpha = \{X \mid \mathfrak{A} : \mathfrak{A}\in NAt_\alpha, X\subseteq A\}$ (itt a "$\subseteq$" rész pl. a későbbi 5.10.L-ból következik, a "$\supseteq$" részt

könnyű ellenőrizni). Szemléletes, természetes $pNAt_\alpha$ -kra (még) példa az I.4.2 fejezet (c) pontjában definiált $\mathfrak{Ct}(V)$ struktura: Legyen $V\subseteq{}^\alpha U$. Akkor könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{Ct}(V)\in pNAt_\alpha$, és $[\mathfrak{Ct}(V)\in NAt_\alpha \iff (\forall s\in V)(\forall i,j\in\alpha)s(i/s_j)\in V]$. Legyen $\mathfrak{A}\overset{d}{=}\mathfrak{Ct}(V)$, $s\in V$ és $i,j\in\alpha$. Akkor ellenőrizhető, hogy $E^{\mathfrak{A}}(s)=ker(s)$ és $t^{\mathfrak{A}}_{ij}(s)=s(i/s_j)$. Megjegyezzük azonban, hogy az $\{\mathfrak{Ct}(V) : (\exists U)V\subseteq{}^\alpha U\}\subseteq pNAt_\alpha$ osztályban sokkal több szabályosság teljesül, mint $pNAt_\alpha$-ban, végtelen sokkal több, ld. a későbbi 8.T(iii)-at.

(2) Legyen $\mathfrak{B}\in pNAt_\alpha$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy minden $i,j\in\alpha$ és $a,b\in B$ -re

$E^{\mathfrak{B}} : B \to Ekv(\alpha)$,

$t^{\mathfrak{B}}_{ij}$ parciális unér függvény B -ből B -be és

$[(\forall i,j\in\alpha)t^{\mathfrak{B}}_{ij}$ totális (azaz $Dom\,t^{\mathfrak{B}}_{ij}=B$)$]$ $\iff$ $\mathfrak{B}\in NAt_\alpha$,

$E^{\mathfrak{B}}(t^{\mathfrak{B}}_{ij}b)=E^{\mathfrak{B}}(b)(i/j)$; és ha $a\ T^{\mathfrak{B}}_i\ b$, $a\neq b$ akkor

$[(\alpha\sim\{i\})\rceil_0 E^{\mathfrak{B}}(b)=(\alpha\sim\{i\})\rceil_0 E^{\mathfrak{B}}(a)$ és $E^{\mathfrak{B}}(b)=E^{\mathfrak{B}}(a) \Rightarrow i$ szinguláris $E^{\mathfrak{B}}(b)$-ben$]$.

(3) Legyen a t'_α algebrai tipus a következő: $t'_\alpha \overset{d}{=} \{(t_{ij},1) : i,j\in\alpha\}$. Legyen a t'_α-tipusú kvázivarietás a következő formulákkal definiálva: Minden $i,j,k,\ell\in\alpha$ -ra

(A) $t_{ij}t_{ik}x=t_{ij}x$, ha $i\neq j$

(B) $t_{ii}x=x$, $t_{ij}t_{ji}x=t_{ji}x$, $t_{ik}t_{ij}t_{kj}x=t_{ij}t_{kj}x$

(C) $t_{k\ell}t_{ij}x=t_{ij}x \leftrightarrow t_{k\ell}x=x$, ha $i\notin\{k,\ell\}$.

Legyen $\mathfrak{A}=\langle A,t_{ij}\rangle_{i,j\in\alpha}\in V_\alpha$, és $E^{\mathfrak{A}}(a)\overset{d}{=}\{(i,j)\in{}^2\alpha : t_{ij}a=a\}$, ha $a\in A$. Akkor a (B) ill. (A),(C) azonosságok azt fejezik ki, hogy $E^{\mathfrak{A}}(a)\in Ekv(\alpha)$ ill. $E^{\mathfrak{A}}(t_{ij}a)=E^{\mathfrak{A}}(a)(i/j)$. Legyen $\mathfrak{Rd}(t'_\alpha)\mathfrak{B} \overset{d}{=} \langle B,t^{\mathfrak{B}}_{ij}\rangle_{i,j\in\alpha}$ ha $\mathfrak{B}\in NAt_\alpha$. Akkor belátható, hogy $V_\alpha = \{\mathfrak{Rd}(t'_\alpha)\mathfrak{B} : \mathfrak{B}\in NAt_\alpha\}$, és $V_\alpha\neq \mathbf{H}V_\alpha$ tehát V_α nem varietás. Ezenkívül NAt_α és V_α definiciósan ekvivalens a [HMT]I. rész p.56 értelmében, ha $\alpha\geq 2$.: Az elsőrendű definiciók (melyek egyúttal kvantormentesek is) a következők: Legyen $i,j\in\alpha$.

$t_{ij}x=y \iff (xT_iy\wedge E_{ij}(y))$ ha $i\neq j$, $t_{ii}x=y \iff x=y$,

$xT_iy \iff t_{ij}x=t_{ij}y$ (ahol $j\in\alpha\sim\{i\}$ rögzített), $E_{ij}(x) \iff t_{ij}x=x$.

Legyen $\alpha<\omega$ e megjegyzés hátralevő részében, az egyszerűség kedvéért. A később bizonyított 5.10.L. szerint mind NAt_α mind V_α erősen eldönthető, tehát pl. V_α szóproblémája megoldható. Az 5.T(iii) szerint azonban $CmNAt_\alpha$ nem erősen eldönthető (és a bizonyításból következik, hogy CmV_α sem erősen eldönthető). Sőt, EqV_α eldöntésére van egy egyszerű, "normálalakos" eljárás is, melyet alább írunk le.

A $t^e_{in} : Tm(t_\alpha) \to Tm(t_\alpha)$ függvény definiciójáról: Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{A} \models t^e_{in}w=t_{in}w[a]$ ha $\mathfrak{A}\in V_\alpha$, $a\in A$, $E^{\mathfrak{A}}(a)=e$ és $t_{in}w \in Tm(t'_\alpha)$. Sőt, t^e_{in} -t úgy definiáltuk, hogy a belőle kapható normálalak fogalom segítségével leírhassuk a V_α-ban érvényes azonosságokat: Legyen $e\in Ekv(\alpha)$ és definiáljuk az $n^e : Tm_X(t'_\alpha) \to Tm_X(t'_\alpha)$ függvényt a következőképpen:

$$n^e(y)\stackrel{d}{=}y \quad \text{ha} \quad y\in X \quad \text{és}$$
$$n^e(t_{ij}w) \stackrel{d}{=} t^e_{ij}n^e w \quad \text{ha} \quad i,j\in\alpha \quad \text{és} \quad w\in Tm_X(t'_\alpha).$$

Akkor n^e kiszámítható (rekurzív) függvény és belátható, hogy minden w, $z\in Tm_X(t'_\alpha)$ -ra

$$(***) \quad V_\alpha \models w=z \iff (\forall e\in Ekv(\alpha))\ n^e(w)=n^e(z)\ .$$

Ez ad egy egyszerű eljárást a V_α-ban érvényes azonosságokra. A (***) bizonyítását össze lehet rakni az 5.T. most következő bizonyításának egyes részeiből. Érdekes lenne tudni, hogy az $EqNCA_\alpha$ eldönthetősége visszavezethető-e az EqV_α -éra, azaz hogy van-e rekurzív tr függvény a cil_α és t'_α -tipusú azonosságok között, melyre igaz, hogy $NCA_\alpha \models q \iff V_\alpha \models tr(q)$, minden q azonosságra. ■

Visszatérünk az 5.2.Á. bizonyítására.

<u>(I) "$NCA_\alpha \not\models \tau=0 \Rightarrow$ van τ-fa" bizonyítása</u>: Tfh. $NCA_\alpha \not\models \tau=0$. Akkor az 5.4.Á. szerint van $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$ és $k : X\to SbA$, hogy $\mathcal{L} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}m\mathfrak{A} \not\models \tau=0[k]$, azaz $\tau^{\mathcal{L}}[k]\neq 0$. Legyen $a\in\tau^{\mathcal{L}}[k]$ és legyen $e \stackrel{d}{=} E^{\mathfrak{A}}(a)$. Definiáljuk rekurzióval P_m és h_m -et úgy, hogy teljesítsék az alábbi (*) feltételt: Legyen $D_m \stackrel{d}{=} DomP_m$ és $R_m \stackrel{d}{=} Rng\bar{P}_m \sim (\{d_{ij},-d_{ij} : i,j\in\alpha\} \cup \{x,-x : x\in X\})$, ahol $\bar{P}_0 \stackrel{d}{=} P_0$ és $\bar{P}_m \stackrel{d}{=} P_m \sim P_{m-1}$ ha $m>0$.

(ж) ж1 $D_m \subseteq \{w \in Tm(t_\alpha) : \|w\| \leq m+1\}$; $D_m = \text{Részt}(D_m)$; $t_{in} w \in D_m \Rightarrow n \in \text{Részt}(\tau)' \cup \alpha$

ж2 $\|\sigma\| \leq \|\tau\| - m$ ha $\sigma \in R_m$; $R_m \subseteq \text{Részt}(\tau)'$

ж3 $h_m : D_m \to A$

ж4 $h_m w \in \sigma^{\mathfrak{L}}[k]$ ha $(w,\sigma) \in P_m$

ж5 $E^{\mathfrak{A}}(h_m w) = E^{e}(w)$ ha $w \in D_m$

ж6 $h_m(t_{i\sigma} w) \in \sigma^{\mathfrak{L}}[k]$ ha $t_{i\sigma} w \in D_m$, és $\sigma \in Tm$

ж7 $h_m w \; T_i^{\mathfrak{A}} \; h_m(t_{in} w)$ ha $i \in \alpha$, $n \in \alpha \cup Tm$, és $t_{in} w \in D_m$.

Legyen $P_0 \overset{d}{=} \{(x,\tau)\} \cup \{(x, d_{ij}) : (i,j) \in e\} \cup \{(x, -d_{ij}) : (i,j) \in {}^2\alpha \sim e\}$, $h_0 \overset{d}{=} \{(x,a)\}$. Akkor P_0, h_0 teljesíti (ж) -ot. Tfh. P_m, h_m teljesíti (ж)-ot. Legyen

$$H_m \overset{d}{=} \{(w,i,\sigma) : (w, c_i\sigma) \in P_m, \ (\forall n \in \alpha \cup Tm)[t^e_{in} w \in D_m \Rightarrow h_m(t^e_{in} w) \notin \sigma^{\mathfrak{L}}[k]]\}.$$

Legyen $b : H_m \to A$ olyan, hogy minden (w,i,σ), $(w',i,\sigma) \in H_m$ -re

$$(h_m w) T_i^{\mathfrak{A}} b(w,i,\sigma), \quad b(w,i,\sigma) \in \sigma^{\mathfrak{L}}[k] \quad \text{és}$$

$$b(w,i,\sigma) = b(w',i,\sigma) \quad \text{ha} \quad (h_m w) T_i^{\mathfrak{A}} (h_m w').$$

Ilyen b függvény van. Definiáljuk $f : H_m \to Tm(t_\alpha)$ -t úgy, hogy

$$f(w,i,\sigma) \overset{d}{=} \begin{cases} t^e_{i\sigma} w & \text{ha } E^{\mathfrak{A}}(b(w,i,\sigma))^*\{i\} = \{i\} \\ t^e_{ik} w & \text{ha } k = \min(E^{\mathfrak{A}}(b(w,i,\sigma))^*\{i\} \sim \{i\}). \end{cases}$$

Legyen

$$G_m \overset{d}{=} \{(w,i) : (\exists \sigma \in Tm)(w, -c_i\sigma) \in P_m\},$$

$$W \overset{d}{=} \{f(w,i,\sigma) : (w,i,\sigma) \in H_m\} \cup \{t^e_{in} w : (w,i) \in G_m, \ n \in \alpha\},$$

$$h_{m+1} \overset{d}{=} h_m \cup \{(f(w,i,\sigma), b(w,i,\sigma)) : (w,i,\sigma) \in H_m\} \cup$$
$$\cup \{(t^e_{in} w, t^{\mathfrak{A}}_{in} h_m w) : (w,i) \in G_m, \ n \in \alpha\},$$

$$\begin{aligned} P_{m+1} \overset{d}{=} \; & \{(w, d_{ij}) : w \in W, \ (i,j) \in E^e(w)\} \cup \\ & \{(w, -d_{ij}) : w \in W, \ (i,j) \in {}^2\alpha \sim E^e(w)\} \cup \\ & \{(t^e_{in} w, \sigma) : (w, c_i\sigma) \in P_m, \ t^e_{in} w \in D_m, \ h_m(t^e_{in} w) \in \sigma^{\mathfrak{L}}[k]\} \cup \\ & \{(f(w,i,\sigma), \sigma) : (w,i,\sigma) \in H_m\} \cup \\ & \{(t^e_{in} w, -\sigma) : (w, -c_i\sigma) \in P_m, \ n \in \alpha \ \text{vagy} \ t^e_{in} w \in D_m \cup W\} \cup \\ & \{(w,\sigma) : (w, \sigma\cdot\delta) \in P_m\} \cup \{(w,\delta) : (w, \sigma\cdot\delta) \in P_m\} \cup \\ & \{(w, -\sigma) : (w, -(\sigma\cdot\delta)) \in P_m, \ h_m w \in (-\sigma)^{\mathfrak{L}}[k]\} \cup \\ & \{(w, -\delta) : (w, -(\sigma\cdot\delta)) \in P_m, \ h_m w \in (-\delta)^{\mathfrak{L}}[k]\} \cup \\ & \{(w,\sigma) : (w, -(-\sigma)) \in P_m\} \cup P_m. \end{aligned}$$

$$t^{e}_{in}(w) = \begin{cases} w & \text{ha } (i,n)\in E^{e}(w); \ \underline{\text{egyébként}} \\ t_{ik}w & \text{ha } w \text{ nem kezdődik } i\text{-vel} \\ t_{ik}w' & \text{ha } (\exists \ell)w=t_{i\ell}w' \text{ és } (i,k)\notin E^{e}(w') \\ w' & \text{ha } (\exists \ell)w=t_{i\ell}w' \text{ és } (i,k)\in E^{e}(w') \end{cases} ,$$

$$\text{ahol} \quad k = \begin{cases} \min(E^{e}(w)^{*}\{n\} & \text{ha } n\in\alpha \\ n & \text{ha } n\notin\alpha \end{cases} .$$

Belátjuk, hogy P_{m+1} és h_{m+1} teljesíti (*)-ot. A definiciók alapján nyilvánvaló, hogy *1 és *2 teljesül. Következőképp azt látjuk be, hogy h_{m+1} függvény. A bizonyítás során h_m helyett csak h -t írunk. Előbb belátjuk az alábbi (1)-(5) segédállítást.

(1) $h(t_{ik}w) = t^{\mathfrak{A}}_{ik}hw$ ha $t_{ik}w\in D_m$ és $k\in\alpha$.

Valóban, ha $t_{ik}w\in D_m$, akkor $w\in D_m$ a *1 miatt (így h értelmezve van w -n) és *7, *5 miatt $h(w)\, T^{\mathfrak{A}}_i\, h(t_{ik}w)\in d^{\mathfrak{A}}_{ik}$, azaz $h(t_{ik}w)=t^{\mathfrak{A}}_{ik}hw$ (mert $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$), ha $i\neq k$. Indukcióval belátható, hogy $t_{ik}w\notin D_m$ ha $i=k$. QED(1)

(2) $t^{\mathfrak{A}}_{in}hw = t^{\mathfrak{A}}_{k\ell}hw''$ ha $t^{e}_{in}w=t_{k\ell}w''$, $w\in D_m$, $i,n\in\alpha$.

Valóban, legyen $w\in D_m$, $i,n\in\alpha$ és $t^{e}_{in}w=t_{k\ell}w''$. Ha $(i,n)\in E^e(w)$, akkor $t^{e}_{in}w=w\in D_m$ és *5 miatt $t^{\mathfrak{A}}_{in}hw=hw$, így (1) szerint $t^{\mathfrak{A}}_{in}hw = hw = h(t_{k\ell}w') = t^{\mathfrak{A}}_{k\ell}hw''$. Tfh. $(i,n)\notin E^e(w)$ és legyen $k=\min E^e(w)^*\{n\}$ Tfh. $t^{e}_{in}w=t_{ik}w''$ ahol vagy $w''=w$ vagy $(\exists\,\ell\in\alpha\cup Tm)w=t_{i\ell}w''$. Mindkét esetben $w''\in D_m$ ($w\in D_m$ és *1 szerint) és a *7 miatt $hw\, T^{\mathfrak{A}}_i\, hw''$, így mivel $(n,k)\in E^e(w) = E^{\mathfrak{A}}(hw)$, azért $t^{\mathfrak{A}}_{in}hw = t^{\mathfrak{A}}_{ik}hw = t^{\mathfrak{A}}_{ik}hw''$. A t^{e}_{in} definiciója szerint az az eset maradt még, hogy $t^{e}_{in}w=w'$ ahol $(\exists\ell)w=t_{i\ell}w'$ és $(i,k)\in E^e(w')$. Akkor $w'\in D_m$ és $(i,n)\in E^e(w')$, $hw\, T^{\mathfrak{A}}_i\, hw'$ így $t^{\mathfrak{A}}_{in}hw=hw'$. Ha $w'=t_{k\ell}w''$ akkor (1) szerint $hw'=t^{\mathfrak{A}}_{k\ell}hw''$. QED(2)

(3) $h(t^{e}_{in}w) = t^{\mathfrak{A}}_{in}hw$ ha $w,t^{e}_{in}w\in D_m$.

Valóban, ha $t^{e}_{in}w=t_{k\ell}w''$ valamely k,ℓ,w'' -re, akkor $w\in D_m$ és (2),(1)-ből kapjuk, hogy $t^{\mathfrak{A}}_{in}hw = t^{\mathfrak{A}}_{k\ell}hw'' = h(t_{k\ell}w'') = h(t^{e}_{in}w)$. Ha $t^{e}_{in}w=x$, akkor vagy $w=x$ vagy $(\exists\ell)w=t_{i\ell}x$. Ha $w=x$ akkor $(i,n)\in E^e(w)=E^{\mathfrak{A}}(hw)$, így $h(t^{e}_{in}x)=hx=t^{\mathfrak{A}}_{in}hx$. Ha $w=t_{i\ell}x$, akkor $(i,n)\in E^e(x)\sim Id$ és így $hx=t^{\mathfrak{A}}_{in}h(t_{i\ell}x)$ (mert $h(t_{i\ell}x)\, T^{\mathfrak{A}}_i\, hx$). QED(3)

(4) $f(w,i,\sigma) = t_{i\sigma}w''$, $w''\in D_m$ és $hw\, T^{\mathfrak{A}}_i\, hw''$ vagy
$f(w,i,\sigma) = t_{ik}w''$, $w''\in D_m$ és $b(w,i,\sigma) = t^{\mathfrak{A}}_{ik}hw''$ és

(5) $f(w,i,\sigma)\notin D_m$.

Valóban, legyen $(w,i,\sigma)\in H_m$ és $\underline{f} \overset{d}{=} f(w,i,\sigma)$, $\underline{b} \overset{d}{=} b(w,i,\sigma)$. Mivel $\underline{f}\in\{t^{e}_{in}w : n\in\alpha\cup Tm\}$, azért ha $\underline{f}\in D_m$ akkor $h\underline{f}\notin\sigma^{\mathfrak{A}}[k]$, a H_m definiszerint. Tfh. $E^{\alpha}(\underline{b})^{*}\{i\} = \{i\}$. Akkor $\underline{f} = t^{e}_{i\sigma}w$. A $t^{e}_{i\sigma}w$ definíciójából látható, hogy $t^{e}_{i\sigma}w = t_{i\sigma}w''$ ahol vagy $w'' = w$ vagy $(\exists \ell) w = t_{i\ell}w''$. Mindkét esetben $w'' \in D_m$ és $hw \; T^{\alpha}_{i} \; hw''$ a $\ast 7$ miatt. Továbbá, $\underline{f} = t_{i\sigma}w'' \notin D_m$ a $\ast 5$ miatt. Tfh. $E^{\alpha}(\underline{b})^{*}\{i\} \neq \{i\}$. Akkor $\underline{f} = t^{e}_{ik}w$ ahol $k = \min E^{\alpha}(\underline{b})^{*}\{i\} \sim \{i\}$. Azaz $k \neq i$ és $\underline{b} \in d^{\alpha}_{ik}$. Ekkor $hw \; T^{\alpha}_{i} \; \underline{b}$ miatt $\underline{b} = t^{\alpha}_{ik}hw$. Ezért $\underline{f} = t^{e}_{ik}w \notin D_m$, hiszen ha $t^{e}_{ik}w \in D_m$ lenne, akkor (3) szerint $h(t^{e}_{ik}w) = t^{\alpha}_{ik}hw = \underline{b} \in \sigma^{\mathcal{L}}[k]$ lenne. Ezért, és mivel $E^{\alpha}(\underline{b}) = E^{\alpha}(hw)(i/k)$ miatt $k = \min E^{\alpha}(hw)^{*}\{k\}$, $\ast 5$ szerint $t^{e}_{ik}w = t_{ik}w''$ ahol $w'' = w$ vagy $(\exists \ell) w = t_{i\ell}w''$, tehát mindkét esetben $w'' \in D_m$ és $hw \; T^{\alpha}_{i} \; hw''$, tehát $\underline{b} = t^{\alpha}_{ik}hw''$. QED(4 és 5)

Készen vagyunk annak bizonyítására, hogy h_{m+1} függvény. Azt kell bizonyítani, hogy ha $(w,\underline{f}),(w,g) \in h_{m+1}$ akkor $\underline{f} = g$. Tfh. $(w,\underline{f}),(w,g) \in h_{m+1}$.

__1. Eset.__ $(w,\underline{f}),(w,g) \in h$. Ekkor $\underline{f} = g$ a $\ast 3$ miatt.

__2. Eset.__ $(w,\underline{f}) \in h$, $(w,g) \notin h$. Ekkor $w \in D_m$, ezért (5) miatt $(w,g) = (t^{e}_{in}w', t^{\alpha}_{in}hw')$ valamely $n \in \alpha$ és $(w',i) \in G_m$-re. Mivel $t^{e}_{in}w' = w \in D_m$, ekkor (3) szerint $\underline{f} = hw = h(t^{e}_{in}w') = t^{\alpha}_{in}hw' = g$.

__3. Eset.__ $(w,\underline{f}) \notin h$, $(w,g) \notin h$. Elég a következőket belátnunk minden (w,i,σ), $(w',i',\sigma') \in H_m$, $(w',j),(w,i) \in G_m$ és $\ell, n \in \alpha$ esetén:

$$f(w,i,\sigma) = f(w',i',\sigma') \Rightarrow b(w,i,\sigma) = b(w',i',\sigma')$$
$$f(w,i,\sigma) = t^{e}_{jn}w' \Rightarrow b(w,i,\sigma) = t^{\alpha}_{jn}hw'$$
$$t^{e}_{i\ell}w = t^{e}_{jn}w' \Rightarrow t^{\alpha}_{i\ell}hw = t^{\alpha}_{jn}hw' .$$

Tfh. $\underline{f} \overset{d}{=} f(w,i,\sigma) = f(w',i',\sigma')$. A (4) szerint ekkor vagy $\underline{f} = t_{i\sigma}w''$, $i = i'$, $\sigma = \sigma'$ és $hw \; T^{\alpha}_{i} \; hw'' \; T^{\alpha}_{i} \; hw'$, ebben az esetben $b(w,i,\sigma) = b(w',i,\sigma) = b(w',i',\sigma')$ a b függvény megválasztása miatt; vagy $\underline{f} = t_{ik}w''$ és ekkor $b(w,i,\sigma) = t^{\alpha}_{ik}hw'' = b(w',i',\sigma')$. Tfh. $f(w,i,\sigma) = t^{e}_{jn}w' = t_{ik}w''$. Ekkor $k \in \alpha$ mert (5) miatt $t^{e}_{jn}w' \notin D_m$ és így mivel $w' \in D_m$, $n \in \alpha$, a $t^{e}_{jn}w'$ definíciójából látható, hogy $k \in \alpha$. Ekkor (4) és (2) szerint $b(w,i,\sigma) = t^{\alpha}_{ik}hw'' = t^{\alpha}_{jn}hw'$. Tfh. $t^{e}_{i\ell}w = t^{e}_{jn}w' = \underline{f}$. Ha $\underline{f} \in D_m$ akkor (3) szerint $t^{\alpha}_{i\ell}hw = t^{\alpha}_{jn}hw'$. Ha $\underline{f} \notin D_m$ akkor $\underline{f} = t_{pk}w''$ alakú és ekkor (2) szerint $t^{\alpha}_{i\ell}hw = t^{\alpha}_{pk}hw'' = t^{\alpha}_{jn}hw'$.

Beláttuk, hogy h_{m+1} függvény.

Belátjuk, hogy $*5$ teljesül a h_{m+1} -re: Legyen $w\in D_{m+1}$. Ha $w\in D_m$ akkor készen vagyunk mert $h_m\subseteq h_{m+1}$ és $*5$ teljesül h_m -re. Tfh. $w\in W\sim D_m$. Akkor $w=t_{ik}w''$ valamely $i\in\alpha$, $k\in\alpha\cup Tm$ és $w''\in D_m$ -re; és $E^e(w)=E^e(w'')(i/k)=E^{\mathfrak{A}}(hw'')(i/k)$. Tfh. $w=f(w',i,\sigma)$ valamely $(w',i,\sigma)\in H_m$ -re. Legyen $b\overset{d}{=}b(w',i,\sigma)$. Ha $k\notin\alpha$, akkor $k=\sigma$ a (4) szerint és $E^{\mathfrak{A}}(b)=E^{\mathfrak{A}}(hw'')(i/\sigma)$ mert $b\ T_i^{\mathfrak{A}}\ hw''$ és $E^{\mathfrak{A}}(b)^*\{i\}=\{i\}$. Ha $k\in\alpha$, akkor $b=t_{ik}^{\mathfrak{A}}hw''$ miatt $E^{\mathfrak{A}}(b)=E^{\mathfrak{A}}(hw'')(i/k)$. Tfh. $w=t_{jn}^{e}w'$ valamely $n\in\alpha$ és $(w',j)\in G_m$ -re. Akkor a (2) szerint $\underline{f}\overset{d}{=}h_{m+1}(w)=t_{jn}^{\mathfrak{A}}hw'=t_{ik}^{\mathfrak{A}}hw''$ és így $E^{\mathfrak{A}}(\underline{f})=E^{\mathfrak{A}}(hw'')(i/k)$. Beláttuk, hogy $*5$ teljesül h_{m+1} -re.

$*4$ teljesül P_{m+1} -re, mert $*5$ teljesül és mert $*4$ teljesül P_m -re: Példaként megnézünk két esetet. Legyen $(w,d_{ij})\in P_{m+1}$, $w\in W$, $(i,j)\in E^e(w)$. Akkor $*5$ szerint $(i,j)\in E^{\mathfrak{A}}(h_{m+1}w)$, tehát $h_{m+1}w\in d_{ij}^{\mathcal{L}}$. Legyen $(t_{in}^{e}w,-\sigma)\in P_{m+1}$, ahol $(w,-c_i\sigma)\in P_m$ és $n\in\alpha$. Akkor $h_mw\in(-c_i\sigma)^{\mathcal{L}}[k]$, így mivel könnyen ellenőrizhető, hogy $h_mw\ T_i^{\mathfrak{A}}\ h_{m+1}(t_{in}^{e}w)$, kapjuk, hogy $h_{m+1}(t_{in}^{e}w)\in(-\sigma)^{\mathcal{L}}[k]$. A többi eset teljesen hasonló, ezért nem írjuk le.

Belátjuk, hogy $*6$ teljesül h_{m+1} -re: Tfh. $t_{i\sigma}w\in D_{m+1}\sim D_m$. Akkor $t_{i\sigma}w=f(w',i,\sigma)$ valamely $(w',i,\sigma)\in H_m$ -re (ld. a (4),(5) bizonyítását), és ekkor $b(w',i,\sigma)\in\sigma^{\mathcal{L}}[k]$.

Belátjuk, hogy $*7$ teljesül h_{m+1} -re: Tfh. $t_{in}w\in D_{m+1}\sim D_m$. Ha $t_{in}w=f(w',i,\sigma)$ akkor (4) szerint $h_{m+1}(t_{in}w)\ T_i^{\mathfrak{A}}\ hw$. Ha $t_{in}w=t_{jk}^{e}w'$ akkor $h_{m+1}(t_{in}w)\ T_i^{\mathfrak{A}}\ hw$ a (2) szerint.

Beláttuk, hogy $(*)$ teljesül P_{m+1} és h_{m+1} -re.

Legyen $P\overset{d}{=}\bigcup\{P_m : m<\|\tau\|\}$. Belátjuk, hogy P egy τ-fa. A következőkben a τ-fa definiciójában szereplő (1), (2)a)-(2)c3) feltételekre fogunk hivatkozni. (1) teljesül $*1$ és $*2$ miatt, (2)a) teljesül mert $(x,\tau)\in P_0\subseteq P$. Indukcióval belátható, hogy (2)c1) teljesül minden P_n -re, tehát teljesül P -re is. Legyen $h\overset{d}{=}\bigcup\{h_m : m<\|\tau\|\}$. Akkor $h: \mathrm{Dom}P\to A$ és $hw\in\sigma^{\mathcal{L}}[k]$ ha $(w,\sigma)\in P$ a $*3$ és $*4$ miatt, ezért (2)c3) és (2)b) is teljesül (mert (2)c1) teljesül). A (2)c2) teljesül a $*2$ miatt (és a P_{m+1} definiciója miatt). Beláttuk, hogy P egy τ-fa. A bizonyítás ezen részének szemléletes jelentéséről ld. a 6.Mj(ii)-t.

<u>(II) "Van τ-fa $\Rightarrow$ $\{\mathfrak{A}\in NCA_\alpha : |A|\le N(\tau)\}\not\models\tau=0$" bizonyítása (ahol $N(\tau)$ -t később, a bizonyítás végén definiáljuk):</u>

$$t^{e}_{in}w = \begin{cases} w & \text{ha } (i,n)\in E^{e}(w);\ \underline{\text{egyébként}} \\ t_{ik}w & \text{ha } w \text{ nem kezdődik } i \text{ -vel} \\ t_{ik}w' & \text{ha } (\exists \ell)w=t_{i\ell}w' \text{ és } (i,k)\notin E^{e}(w') \\ w' & \text{ha } (\exists \ell)w=t_{i\ell}w' \text{ és } (i,k)\in E^{e}(w'). \end{cases}$$

$$\text{ahol } k = \begin{cases} \min(E^{e}(w)^{*}\{n\}) & \text{ha } n\in\alpha\ , \\ n & \text{ha } n\notin\alpha\ . \end{cases}$$

Legyen $e\in Ekv(\alpha)$. Definiáljuk indukcióval:

$$N_0^e \stackrel{d}{=} \{x\},$$
$$N_{m+1}^e \stackrel{d}{=} \{t_{in}^e w : w\in N_m^e,\ i\in\alpha,\ n\in\alpha\cup Tm\},$$
$$N^e \stackrel{d}{=} \bigcup\{N_m^e : m\in\omega\}.$$

Minden $i,j\in\alpha$ -ra legyen

$$E_{ij} \stackrel{d}{=} \{w\in N^e : (i,j)\in E^e(w)\},$$
$$T_i \stackrel{d}{=} \{(w,w) : w\in N^e\}\cup \{(w,t_{in}w)\in {}^2(N^e) : n\in\alpha\cup Tm\}\cup\{(t_{in}w,w)\in {}^2(N^e) : n\in\alpha\cup Tm\}\cup \{(t_{in}w,t_{im}w)\in {}^2(N^e) : n,m\in\alpha\cup Tm\}.$$
$$\mathfrak{N}^e \stackrel{d}{=} \langle N^e, T_i, E_{ij}\rangle_{i,j\in\alpha}.$$

5.6. LEMMA $\mathfrak{N}^e \in NAt_\alpha$.

Bizonyítás: Legyen $e\in Ekv(\alpha)$ rögzített. Legyen $n\in\omega$ és $N^n \stackrel{d}{=} \bigcup\{N_m^e : m\leq n\}$. Először bizonyítjuk a következő két állítást:

(1) $N^n = Részt(N^n)$

(2) Ha $t_{ik}w\in N^e$ és $k\in\alpha$, akkor a következő (i)-(iii) teljesül.

(i) $(i,k)\notin E^e(w)$

(ii) $k=\min(E^e(w)^*\{k\})$

(iii) w nem kezdődik i-vel.

Valóban, (1)-(2) -t könnyű indukcióval bizonyítani, a $t_{in}^e w$ definiciója alapján: Tfh. (1) igaz N^m -re és (2) igaz minden $w'\in N^m$ -re. Legyen $w\in N_m$, $i\in\alpha$ és $n\in\alpha\cup Tm$. Legyen $k \stackrel{d}{=} \min E^e(w)^*\{n\}$ ha $n\in\alpha$ és $k \stackrel{d}{=} n$ ha $n\notin\alpha$. Akkor a $t_{in}^e w$ definiciójából rögtön látszik, hogy (1) teljesül N^{m+1} -re. Tfh. $n\in\alpha$. Ha $t_{in}^e w\in\{w,w'\}\subseteq N^m$, akkor készen vagyunk. Tfh. $t_{in}^e w=t_{ik}w$. Akkor $(i,n)\notin E^e(w)$ és $(n,k)\in E^e(w)$ -ből kapjuk, hogy $(i,k)\notin E^e(w)$ és $k=\min E^e(w)^*\{k\}$, továbbá w nem kezdődik i-vel. Tfh. $t_{in}^e w= t_{ik}w'$. Akkor w' nem kezdődik i-vel mert $w=t_{i\ell}w'\in N^m$, továbbá $(i,k)\notin E^e(w')$ és $(i,n)\notin E^e(w)$, $(n,k)\in E^e(w)$ -ből kapjuk, hogy $(\ell,k)\notin E^e(w')$, így $E^e(w)^*\{n\}=E^e(w)^*\{k\}=E^e(w')^*\{k\}$, tehát $k=\min E^e(w')^*\{k\}$. Beláttuk (1)-(2) -t.

Rátérünk annak bizonyítására, hogy $\mathfrak{N}^e\in NAt_\alpha$. Legyen $i,j,k\in\alpha$. Nyilvánvalóan, T_i reflexív és szimmetrikus, továbbá T_i tranzitív

(2)(iii) miatt. Továbbá, $E_{ii}=N^e$, $E_{ij}=E_{ji}$ és $E_{ik}\cap E_{kj}\subseteq E_{ij}$ mert $E^e(w)\in Ekv(\alpha)$ minden $w\in N^e$ -re. Tfh. $k\notin\{i,j\}$ és legyen $w\ T_k\ z$. A T_k definiciójabeli esetek végignézéséből látható, hogy $(\alpha\sim\{k\})\rceil_0 E^e(w)=(\alpha\sim\{k\})\rceil_0 E^e(z)$, tehát ha $w\in E_{ij}$ akkor $z\in E_{ij}$ is fennáll. Tfh. $i\neq j$. Belátjuk, hogy $T_i\cap{}^2E_{ij}\subseteq Id$. Legyen $w\ T_i\ z$, $w\in E_{ij}$, $w\neq z$. Ha $z=t_{in}w$ és $n\in\alpha$, akkor $(i,n)\notin E^e(w)$ a (2)(i) szerint, és $(i,n)\in E^e(z)$, tehát $(i,j)\notin E^e(z)$ (mivel $(i,j)\in E^e(w)$); ha $n\notin\alpha$ akkor i szinguláris $E^e(z)$-ben, tehát $(i,j)\notin E^e(z)$; tehát mindkét esetben $z\notin E_{ij}$. Ha $w=t_{in}z$ valamely $n\in\alpha\cup Tm$ -ra, akkor $n\in\alpha$ mert i nem szinguláris $E^e(w)$ -ben és $(i,n)\notin E^e(z)$ a (2)(i) miatt, $(i,n)\in E^e(w)$, tehát $(i,j)\notin E^e(z)$. Tfh. $w=t_{in}w'$, $z=t_{im}w'$ valamely $n,m\in\alpha\cup Tm$ -re. Akkor $n\in\alpha$ mert i nem szinguláris $E^e(w)$ -ben. Ha $m\notin\alpha$ akkor i szinguláris $E^e(z)$ -ben, tehát $z\notin E_{ij}$ és készen vagyunk. Tfh. $m\in\alpha$. Akkor (2)(ii) szerint $n=\min E^e(w')^*\{n\}$ és $m=\min E^e(w')^*\{m\}$. Mivel $w\neq z$ azért tehát $n\neq m$ és így $(n,m)\notin E^e(w')$. Ekkor mivel $(i,j)\in E^e(w')(i/n)$, azt kapjuk, hogy $(i,j)\notin E^e(w')(i/m)=E^e(z)$, tehát $z\notin E_{ij}$. Beláttuk, hogy $T_i\cap{}^2E_{ij}\subseteq Id$.

Idáig beláttuk, hogy $\mathfrak{N}^e\in pNAt_\alpha$. A későbbiekben csak erre az állításra lesz szükségünk, de a teljesség kedvéért bizonyítjuk azt is, hogy $\mathfrak{N}^e\in NAt_\alpha$. Ehhez azt kell még belátni, hogy $E_{ij}\subseteq T_k{}^*(E_{ik}\cap E_{kj})$. Legyen $w\in E_{ij}$. Ha $k\in\{i,j\}$ akkor készen vagyunk. Tfh. $k\notin\{i,j\}$. Legyen $z\stackrel{d}{=}t^e_{ki}w$. Akkor $z\in E_{ij}\cap E_{ki}=E_{ik}\cap E_{kj}$, és a t^e_{ki} definiciójából látható, hogy $w\ T_k\ t^e_{ki}w$. Beláttuk, hogy $\mathfrak{N}^e\in NAt_\alpha$. <u>QED(5.6. Lemma)</u>

<u>5.7. MEGJEGYZÉS</u> (i) Az N^e elnevezés a "<u>n</u>ormál-alak"ra utal. Ugyanis, ha úgy definiáljuk az $n^e: Tm_X(t_\alpha)\to Tm_X(t_\alpha)$ függvényt mint az 5.5.Mj.-ben, akkor $N^e=\{w\in Tm(t_\alpha): n^e(w)=w\}=Rng(n^e)$, vagyis N^e a "normálalakú" kifejezések halmaza.

(ii) Legyen $\mathfrak{N}\stackrel{d}{=}Tm(t'_\alpha)\rceil\mathfrak{N}^e$. Akkor belátható, hogy $\mathfrak{N}$ az egy elemmel az $E(x)=e$ feltétellel "generált" szabad NAt_α, a következő értelemben: Legyen $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$ és $a\in A$, $E^{\mathfrak{A}}(a)=e$. Akkor van $k:\mathfrak{N}\to\mathfrak{A}$, $k(x)=a$ úgy hogy minden $\mathfrak{B}\in NAt_\alpha$, $b\in B$, $E^{\mathfrak{B}}(b)=e$ és $h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, $h(b)=a$ esetén van $f:\mathfrak{N}\to\mathfrak{B}$, $f(x)=b$ melyre $k=h\circ f$. (Az állítás második része azt fejezi ki, hogy k a "legszűkebb".) Általánosabban is igaz a következő: Legyen $e\in Ekv(\alpha)$. Legyen $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$, $a\in A$, $E^{\mathfrak{A}}(a)=e$. Akkor van $k:\mathfrak{N}^e\to\mathfrak{A}$, melyre $k(x)=a$. ■

Legyen P egy τ-fa. Legyen $e \overset{d}{=} \{(i,j)\in {}^2\alpha : (x,d_{ij})\in P\}$, és legyen $P' \overset{d}{=} \{(w,\sigma)\in P : w\in N^e\}$.

Könnyű ellenőrizni, hogy P' is τ-fa, és nyilván $\mathrm{Dom}P' \subseteq N^e$. Legyen $\mathcal{B}(P) \overset{d}{=} \mathrm{Dom}P' \upharpoonright \mathfrak{N}^e$. Minden $i\in\alpha$-ra legyen $K_i \overset{d}{=} \{w\in\mathrm{Dom}P' : (\exists\sigma)(w,-c_i\sigma)\in P'\}$.

<u>5.8. LEMMA</u> Legyen P egy τ-fa és $\mathcal{B} \overset{d}{=} \mathcal{B}(P)$. Akkor az alábbi (i)-(iii) teljesül.

(i) $\mathcal{B}\in \mathrm{pNAt}_\alpha$ és $|B| \leq \beta \overset{d}{=} (\|\tau\|)\cdot(|\alpha|\cdot(|\alpha|+|\mathrm{R\acute{e}szt}(\tau)'|))^{\|\tau\|}$.

(ii) Ha $w\in K_i$ akkor $(\forall j\in\alpha)(t_{ij}^{\mathcal{B}}w$ létezik$)$.

(iii) Ha $\mathcal{B}\subseteq\mathfrak{A}\in\mathrm{NAt}_\alpha$ és $(\forall i\in\alpha)(\forall w\in K_i)T_i^{\mathcal{B}*}\{w\}=T_i^{\mathfrak{A}*}\{w\}$, akkor $\mathfrak{Cm}\mathfrak{A} \not\models \tau=0$.

<u>Bizonyítás:</u> (i) következik 5.6.L.-ból és abból, hogy $|\{w\in\mathrm{Tm}(t''_\alpha) : \|w\|\leq\|\tau\|\}| \leq \beta$ ahol $t''_\alpha = \{(t_{in},1) : i\in\alpha,\ n\in\alpha\cup\mathrm{R\acute{e}szt}(\tau)'\}$. (ii) abból következik, hogy P' egy τ-fa, mert $(\forall w\in N^e)t^e_{in}w=t^{\mathfrak{N}^e}_{in}w$. (iii) bizonyítása: Tfh. $\mathfrak{A}\supseteq\mathcal{B}$ olyan mint a (iii) hipotézis-részében. Minden $y\in X$-re legyen $k(y) \overset{d}{=} \{w\in B : (w,y)\in P'\}$. Akkor $k : X \to \mathrm{SbA}$. Legyen $\mathfrak{L} \overset{d}{=} \mathfrak{Cm}\mathfrak{A}$. Belátjuk, hogy $(w,\sigma)\in P' \Rightarrow w\in\sigma^{\mathfrak{L}}[k]$, mégpedig a σ-ra vonatkozó indukcióval. Legyen a (*) állítás a következő:

$$(*)\quad (\forall w\in B)\left[(w,\sigma)\in P' \Rightarrow w\in\sigma^{\mathfrak{L}}[k]\right].$$

Ha $\sigma\in X$, akkor (*) igaz a k definiciója szerint. Ha $(w,d_{ij})\in P'$, akkor $(i,j)\in E^e(w)$, tehát $w\in d_{ij}^{\mathfrak{L}}$. Tfh. (*) igaz $\mathrm{R\acute{e}szt}(\sigma\cdot\delta)'$ minden elemére. Akkor: Ha $(w,\sigma\cdot\delta)\in P'$ akkor $(w,\sigma),(w,\delta)\in P'$ és így $w\in \sigma^{\mathfrak{L}}[k]\cap\delta^{\mathfrak{L}}[k]=(\sigma\cdot\delta)^{\mathfrak{L}}[k]$. Tfh. $(w,-\sigma)\in P'$. Ha $\sigma=y\in X$ akkor $(w,-y)\in P'$-ből következik, hogy $(w,y)\notin P'$ és így $w\notin k(y)$, azaz $w\in(-y)^{\mathfrak{L}}[k]$. Ha $\sigma=d_{ij}$ akkor $(w,-d_{ij})\in P'$-ből következik, hogy $(i,j)\notin E^e(w)$, így $w\in(-d_{ij})^{\mathfrak{L}}$. Ha $\sigma=\sigma'\cdot\delta$, akkor $(w,-(\sigma'\cdot\delta))\in P'$-ből következik, hogy vagy $(w,-\sigma')\in P'$ és ekkor $w\in(-\sigma')^{\mathfrak{L}}[k]\subseteq-(\sigma'\cdot\delta)^{\mathfrak{L}}[k]$; vagy $(w,-\delta)\in P'$ és akkor hasonlóan $w\in-(\sigma'\cdot\delta)^{\mathfrak{L}}[k]$. Ha $\sigma=-\sigma'$ akkor $(w,-(-\sigma'))\in P'$-ből következik, hogy $(w,\sigma')\in P'$, így $w\in(\sigma')^{\mathfrak{L}}[k]=(-(-\sigma'))^{\mathfrak{L}}[k]$. Ha $\sigma=c_i\sigma'$ akkor $(w,-c_i\sigma')\in P'$-ből következik, hogy $w\in K_i$ és minden $z\in T_i^{\mathcal{B}*}\{w\}$-re $(z,-\sigma')\in P'$, tehát $z\notin(\sigma')^{\mathfrak{L}}[k]$, feltevésünk szerint $T_i^{\mathcal{B}*}\{w\}=T_i^{\mathfrak{A}*}\{w\}$, ezért $w\in(-c_i\sigma')^{\mathfrak{L}}[k]$. Ha $(w,c_i\sigma)\in P'$ akkor $(t^e_{in}w,\sigma)\in P'$ valamely n-re, ekkor $t^e_{in}w\in\mathfrak{S}^{\mathfrak{L}}[k]$ és $w\ T^{\mathfrak{A}}_i\ t^e_{in}w$, tehát $w\in(c_i\mathfrak{S})^{\mathfrak{L}}[k]$. QED(5.8. Lemma)

5.9. MEGJEGYZÉS (i) Az 5.8.L(iii) azt sugallhatja, hogy ha $a\in\tau^{\mathfrak{L}}[k]$ ahol $\mathfrak{L}=\mathfrak{Lm}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$ és $k:X\to SbA$, akkor van a -nak egy véges (τ-tól függően nagy) környezete $\mathfrak{A}$-ban, mely befolyásolja $a\in\tau^{\mathfrak{L}}[k]$-t, ennél "messzebbi események nem hatnak vissza", és a τ-fa tulajdonképpen ez a környezet absztrakt formában. Ez azonban csak a "szabad" $\mathfrak{N}^e\in NAt_\alpha$ -kra van így, általában nem: Van $\tau\in Tm$ és $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$ úgy, hogy $\mathfrak{Lm}\,\mathfrak{A}\not\models\tau=0$, de $(\forall B\subseteq_\omega A)[\mathfrak{Lm}(B\rceil\mathfrak{A})\models\tau=0]$ és ugyanakkor $(\forall X\subseteq_\omega A)$ $(\exists B\subseteq_\omega A)[X\subseteq B$ és $B\rceil\mathfrak{A}\in NAt_\alpha]$. Egy ilyen τ és $\mathfrak{A}$-ra jó példa a 6.Mj(ii)-ben a 139. oldalon megadott τ és a közvetlen utána megadott V Crs_3-egységből szerkesztett $\mathfrak{A}\tau(V)\in NAt_3$.

(ii) Aránylag könnyű olyan $\mathfrak{B}(P)\subseteq\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$-t szerkeszteni, mely teljesíti az 5.8.L(iii) feltételét: a $\mathfrak{B}(P)$ -t lényegében "szabadon" ki lehet terjeszteni egy NAt_α-vá. De ez a kiterjesztés végtelen lesz. Most rátérünk annak megmutatására, hogy véges kiterjesztés is van, ha $\alpha<\omega$. ∎

5.10. LEMMA Legyen $\mathfrak{B}\in pNAt_\alpha$ tetszőleges. Akkor van $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$ melyre az alábbi (i)-(iii) teljesül.

(i) $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$.

(ii) $|A|\leq\eta\cdot|B|$, ahol $\eta\overset{d}{=}2^{|\alpha|\cdot|Ekv(\alpha)|^2}\cdot|Ekv(\alpha)|$.

(iii) Ha $b\in B$, $a\in A\sim B$ és $b\ T^{\mathfrak{A}}_i a$, akkor $(\exists j\in\alpha)[t^{\mathfrak{B}}_{ij}b$ nem létezik].

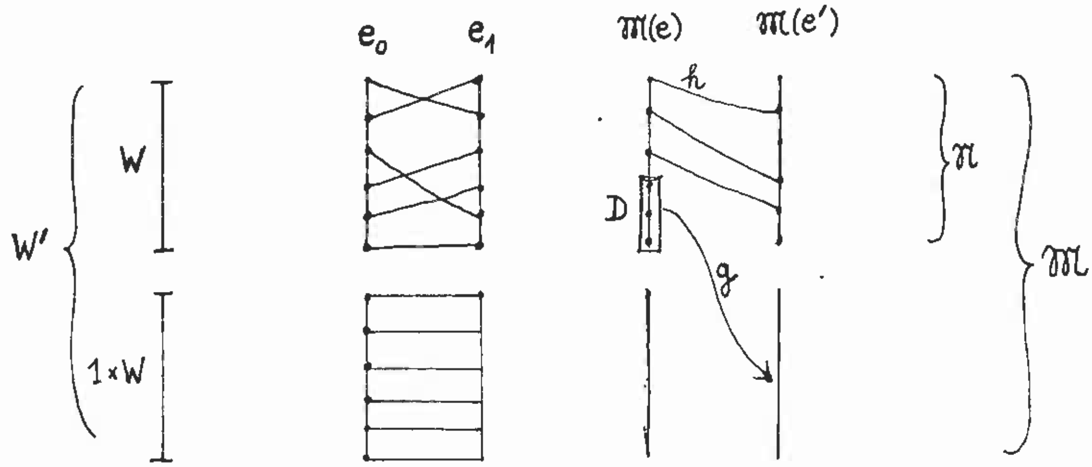
Bizonyítás: Először néhány jelölést vezetünk be. Legyen $\mathfrak{B}\in pNAt_\alpha$, $e,e'\in Ekv(\alpha)$ és $i\in\alpha$. Akkor

(1) $\mathfrak{B}(e)\overset{d}{=}\{w\in B : E^{\mathfrak{B}}(w)=e\}$.

(2) Azt mondjuk, hogy $e\xrightarrow{i}e'$, ha $(\exists k\in\alpha)e'=e(i/k)$ és $e\xleftrightarrow{i}e'$ ha ($e\xrightarrow{i}e'$ és $e'\xrightarrow{i}e$). Azt mondjuk, hogy "$e\xrightarrow{i}e'$ jó a $\mathfrak{B}$-ben", ha $\mathfrak{B}(e)\times\mathfrak{B}(e')\cap T^{\mathfrak{B}}_i : \mathfrak{B}(e)\to\mathfrak{B}(e')$ és "$e\xleftrightarrow{i}e'$ jó a $\mathfrak{B}$-ben", ha $\mathfrak{B}(e)\times\mathfrak{B}(e')\cap T^{\mathfrak{B}}_i : \mathfrak{B}(e)\rightarrowtail\!\!\!\rightarrow\mathfrak{B}(e')$.

(3) Legyen $H\overset{d}{=}\{(e,e',i) : e\xrightarrow{i}e',\ e\neq e'\}$, $G\overset{d}{=}\{(e,e',i) : e\xleftrightarrow{i}e',\ e\neq e'\}$.

(4) Ha $\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{B}$ teljesíti az 5.10.L(iii) -ban kimondott feltételt, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ jó kiterjesztése a $\mathfrak{B}$-nek.



<u>1. ÁBRA</u>

<u>5.11. RÉSZÁLLITÁS</u> Legyen $\mathcal{B} \in pNAt_\alpha$ olyan, hogy $e \xrightarrow{i} e'$ jó a $\mathcal{B}$-ben minden $(e,e',i) \in H$ -ra. Akkor $\mathcal{B} \in NAt_\alpha$.

<u>Bizonyítás:</u> Legyen $\mathcal{B} = \langle B, T_i, E_{ij} \rangle_{i,j\in\alpha} \in pNAt_\alpha$ olyan mint az állításban. Azt kell leellenőriznünk, hogy $E_{ij} \subseteq T_k^{*}(E_{ik} \cap E_{kj})$, minden i, $j,k \in \alpha$-ra. Legyen $b \in E_{ij}$. Akkor $b \in \mathcal{B}(e)$, ahol $e = E^{\mathcal{B}}(b)$, és $(i,j) \in e$. Legyen $e' \stackrel{d}{=} e(k/i)$. Feltehetjük, hogy $e' \neq e$. Akkor $e \xrightarrow{k} e'$ jó a $\mathcal{B}$-ben. Akkor van $a \in \mathcal{B}(e')$, hogy $b\ T_k\ a$. Mivel $(i,j) \in e$, azért (i,k), $(j,k) \in e'$, azaz $a \in E_{ik} \cap E_{kj}$. <u>QED(5.11. Részállítás)</u>

Az 5.11.RÁ. miatt, amikor egy $\mathcal{B} \in pNAt_\alpha$-t ki akarunk terjeszteni egy $\mathfrak{A} \in NAt_\alpha$-vá, akkor majd az $e \xrightarrow{i} e'$ -ket fogjuk lépésenként "rendbehozni".

Legyen $\mathfrak{N} \in pNAt_\alpha$. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{N}$ szabályos, ha

(i) $N = W \times Ekv(\alpha)$ valamely W halmazra és

(ii) $\mathfrak{N}(e) = W \times \{e\}$ minden $e \in Ekv(\alpha)$ -ra.

<u>5.12. RÉSZÁLLITÁS</u> Tfh. $\mathfrak{N} \in pNAt_\alpha$ szabályos és $e \xleftrightarrow{i} e'$ nem jó az $\mathfrak{N}$-ben, $(e,e',i) \in G$. Akkor van szabályos $\mathfrak{M} \in pNAt_\alpha$, hogy

(1) $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, $|M| = 2 \cdot |N|$

(2) $e \xleftrightarrow{i} e'$ jó az $\mathfrak{M}$-ben

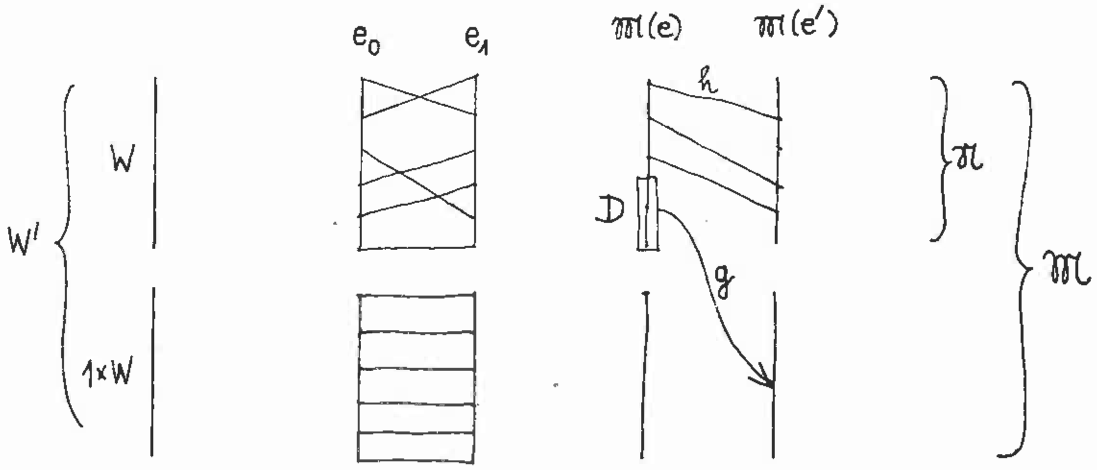
(3) ha $e_0 \xleftrightarrow{j} e_1$ jó az $\mathfrak{N}$-ben, akkor $e_0 \xleftrightarrow{j} e_1$ jó az $\mathfrak{M}$-ben is, minden $(e_0, e_1, j) \in G$ -re.

(4) $\mathfrak{M}$ jó kiterjesztése $\mathfrak{N}$-nek.

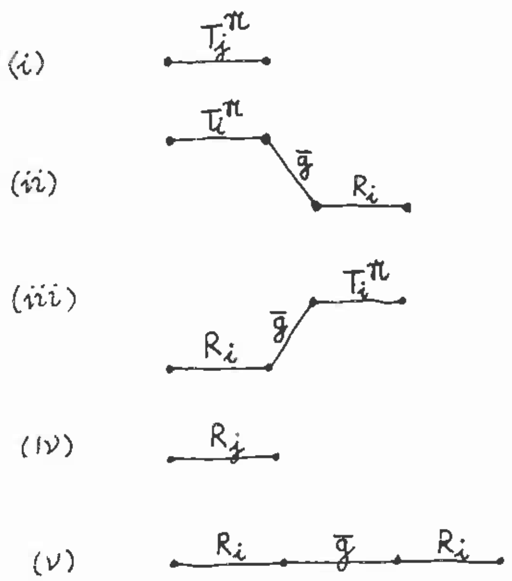
<u>Bizonyítás:</u> Tfh. $N = W \times Ekv(\alpha)$. Legyen $W' \stackrel{d}{=} W \cup (1 \times W)$ és $M \stackrel{d}{=} W' \times Ekv(\alpha)$ (ld. az 1. Ábrát a túloldalon). Minden $i,j \in \alpha$-ra legyen

$$E_{ij}^{\mathfrak{M}} \stackrel{d}{=} \{(w,\bar{e}) \in M : (i,j) \in \bar{e}\}.$$

Akkor $\mathfrak{M}(\bar{e}) = W' \times \{\bar{e}\}$ minden $\bar{e} \in Ekv(\alpha)$ -ra.



1. ÁBRA



Ábra az (1) állításhoz.
(a $T_j^{\mathfrak{M}}$ esetei)

Mivel $e \xleftrightarrow{i} e'$ nem jó az $\mathfrak{N}$-ben, azért vagy $e \xrightarrow{i} e'$ vagy $e' \xrightarrow{i} e$ nem jó az $\mathfrak{N}$-ben. Feltehetjük, hogy az első eset áll fenn. Legyen

$D \overset{d}{=} \{ w \in \mathfrak{N}(e) : (\neg\exists z \in \mathfrak{N}(e'))\ w\ T_i^{\mathfrak{N}}\ z \}$, és legyen g olyan, hogy

$g : \mathfrak{M}(e) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{M}(e')$,

$h \subseteq g$, ahol $h \overset{d}{=} \mathfrak{N}(e) \times \mathfrak{N}(e') \cap T_i^{\mathfrak{N}}$, és

$g^{*}D \subseteq (1 \times W) \times \{e'\}$. ((Ld. az 1. Ábrát!)

Ilyen g függvény van, mert $\mathfrak{N} \in pNAt_{\alpha}$ és $(e,e',i) \in G$ miatt h is és h^{-1} is függvény. Legyen minden $j \in \alpha$ -ra

$\bar{g} \overset{d}{=} g \cup g^{-1}$,

$R_j \overset{d}{=} \{ \langle (w,e_0),(w,e_1) \rangle : w \in 1 \times W,\ (e_0,e_1,j) \in G,\ e_0 \xleftrightarrow{j} e_1$ jó az $\mathfrak{N}$-ben$\} \cup Id_{(1 \times W)}$,

$L_j \overset{d}{=} T_j^{\mathfrak{N}} \cup R_j$ ha $j \neq i$, $L_i \overset{d}{=} T_i^{\mathfrak{N}} \cup R_i \cup \bar{g}$,

$T_j^{\mathfrak{M}} \overset{d}{=}$ "az L_j tranzitív lezártja",

$\mathfrak{M} \overset{d}{=} \langle M, T_k^{\mathfrak{M}}, E_{k\ell}^{\mathfrak{M}} \rangle_{k,\ell \in \alpha}$.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{M}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Ehhez először kicsit közelebbről leírjuk a $T_j^{\mathfrak{M}}$ relációkat.:

(1) Legyen $j \in \alpha$ és $p\ T_j^{\mathfrak{M}}\ q$. Akkor az alábbi (i)-(v) eset valamelyike áll fenn: (Ld. a túloldali ábrát!)

(i) $p,q \in N$ és $p\ T_j^{\mathfrak{N}}\ q$

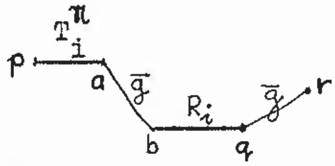
(ii) $p \in N$, $q \notin N$, $j=i$ és $p\ T_i^{\mathfrak{N}}\ a\ \bar{g}\ b\ R_i\ q$ valamely $a,b \in M$ -re.

(iii) $p \notin N$, $q \in N$, $j=i$ és $p\ R_i\ a\ \bar{g}\ b\ T_i^{\mathfrak{N}}\ q$ valamely $a,b \in M$ -re.

(iv) $p \notin N$, $q \notin N$ és $p\ R_j\ q$

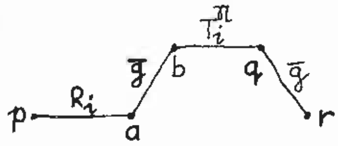
(v) $p \notin N$, $q \notin N$, $j=i$ és $p\ R_i\ a\ \bar{g}\ b\ R_i\ q$ valamely $a,b \in M \sim N$ -re.

<u>Az (1) bizonyítása</u>: Elég azt belátni, hogy ha $p\ T_j^{\mathfrak{M}}\ q\ L_j\ r$ és az (i)-(v) eset valamelyike áll fenn p,q -ra, akkor az (i)-(v) eset valamelyike áll fenn p,r -re is. (Ha $p=q$, akkor nyilván az (i), (iv) valamelyike áll fenn.) A nem-triviális esetek a következők (megjegyezzük, hogy R_j tranzitív és $e \neq e'$):



(a) $p\ T_i^{\mathfrak{N}}\ a\ \bar{g}\ b\ R_i\ q\ \bar{g}\ r.$

Belátjuk, hogy ekkor $r=a$ és így az (i) eset áll fenn. $b\ R_i\ q$ miatt $b=(w,e_0)$ és $q=(w,e_1)$ valamely w, e_0 és e_1 -re, úgy, hogy $e_0 \overset{i}{\longleftrightarrow} e_1$ jó az $\mathfrak{N}$-ben, vagy $b=q$. $a\ \bar{g}\ b$ és $q\ \bar{g}\ r$ miatt $\{e_0,e_1\} \subseteq \{e,e'\}$, és így mivel $e \overset{i}{\longleftrightarrow} e'$ nem jó az $\mathfrak{N}$-ben, azt kapjuk, hogy $e_0=e_1$ és így $b=q$. Ekkor $a\ \bar{g}\ b$ és $b\ \bar{g}\ r$ miatt $a=r$.



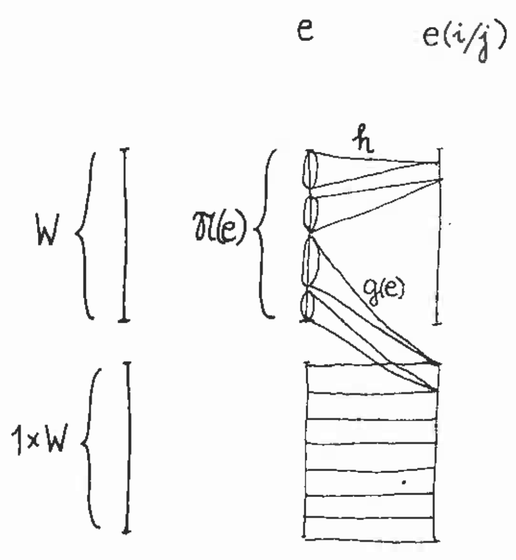
(b) $p\ R_i\ a\ \bar{g}\ b\ T_i^{\mathfrak{N}}\ q\ \bar{g}\ r$ és $r \notin N$.

Belátjuk, hogy $r=a$, és így a (iv) eset áll fenn p és r között. $a\ \bar{g}\ b$ és $q\ \bar{g}\ r$ miatt $b=(w,e_0)$, $q=(z,e_1)$ valamely w,z és $\{e_0,e_1\} \subseteq \{e,e'\}$ -re. Akkor $a \notin N$, $b \in N$, $q \in N$, $r \notin N$, $b\ T_i^{\mathfrak{N}}\ q$ és a $\bar{g}$ definíciója miatt $e_0=e_1$ ekkor viszont $b\ T_i\ q$ miatt $b=q$ (hiszen i nem szinguláris sem e, sem e'-ben), és ekkor $a\ \bar{g}\ b$, $b\ \bar{g}\ r$ miatt $a=r$.

(c) $p\ R_i\ a\ \bar{g}\ b\ R_i\ q\ \bar{g}\ r.$

Az előzőkhöz hasonlóan, $a\ \bar{g}\ b\ R_i\ q\ \bar{g}\ r$ miatt $b=q$ és így $a=r$, tehát a (iv) eset áll fenn p és r között. QED(1)

Készen állunk arra, hogy $\mathfrak{M}$ kívánt tulajdonságait bebizonyítsuk. Először megmutatjuk, hogy $\mathfrak{M} \in pNAt_\alpha$. Az 5.3.D.-beli (i) teljesül mert az L_j relációk reflexívek és szimmetrikusak, a (ii) nyilvánvalóan teljesül. Legyen $k \notin \{n,m\}$, $k,n,m \in \alpha$, $p \in E_{nm}^{\mathfrak{M}}$ és $p\ T_k^{\mathfrak{M}}\ q$. Akkor $q \in E_{nm}^{\mathfrak{M}}$ is fennáll, mert könnyen látható, hogy L_k "megőrzi $E_{nm}^{\mathfrak{M}}$ -et". Legyen $n \neq m$, $p,q \in E_{nm}^{\mathfrak{M}}$ és $p\ T_n^{\mathfrak{M}}\ q$. Az (1)-beli (i)-(v) eset végignézésével belátjuk, hogy $p=q$. Az (i) esetben $p=q$ mert $\mathfrak{N} \in pNAt_\alpha$. Vegyük észre, hogy $E^{\mathfrak{M}}p=E^{\mathfrak{M}}q$, tehát $p=(w,\bar{e})$, $q=(z,\bar{e})$ valamely $w,z,\bar{e}$ -re, tehát a (iv) esetben is $p=q$. Belátjuk, hogy a többi eset nem állhat fenn.: Tfh. $p\ T_i^{\mathfrak{N}}\ a\ \bar{g}\ b\ R_i\ q$, $n=i$. Ekkor $a \in N$, $b \notin N$, tehát $\{E^{\mathfrak{N}}(a), E^{\mathfrak{N}}(b)\} = \{e,e'\}$. Tfh. $E^{\mathfrak{N}}(a)=e$. $b\ R_i q$ miatt $e' \overset{i}{\longleftrightarrow} \bar{e}$ jó az $\mathfrak{N}$-ben (ez akkor is igaz, ha $b=q$ és így $e'=\bar{e}$, mert i nem szinguláris e'-ben), tehát van $r \in E^{\mathfrak{N}}(e')$, hogy $p\ T_i^{\mathfrak{N}}\ r$ és ekkor $a\ T_i^{\mathfrak{N}}\ r$, tehát $a \in N \sim D$, ami ellentmond $a\ \bar{g}\ b$, $b \notin N$ -nek. Az $E^{\mathfrak{N}}(a)=e'$ eset teljesen hasonló. Ezzel beláttuk, hogy a (ii) eset nem állhat fenn p és q között. Hasonló gondolatmenettel látható, hogy sem a (iii) sem az (v) eset nem állhat fenn. Ezzel beláttuk, hogy $\mathfrak{M} \in pNAt_\alpha$. $\mathfrak{M}$ nyilvánvalóan szabályos és $|M| = 2 \cdot |N|$. Belátjuk, hogy $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.



Ábra a g(e) definiciójához.

Nyilvánvalóan $E^{\mathfrak{N}}_{k\ell} = N\cap E^{\mathfrak{M}}_{k\ell}$ minden $k,\ell\in\alpha$-ra. Legyen $j\in\alpha$ és $p,q\in N$, $p\,T^{\mathfrak{M}}_j\,q$. Akkor az (1) állításból következik, hogy $p\,T^{\mathfrak{N}}_j\,q$. Ezzel beláttuk $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$-et is. A konstrukcióból rögtön adódik, hogy $e \overset{i}{\longleftrightarrow} e'$ jó az $\mathfrak{M}$-ben és ha $e_0 \overset{i}{\longleftrightarrow} e_1$ jó az $\mathfrak{N}$-ben, $(e_0,e_1,j)\in G$, akkor $e_0 \overset{i}{\longleftrightarrow} e_1$ jó az $\mathfrak{M}$-ben is. Belátjuk, hogy $\mathfrak{M}$ jó kiterjesztése az $\mathfrak{N}$-nek.: Tfh. $p\in N$, $q\in M\sim N$, $j\in\alpha$ és $p\,T^{\mathfrak{M}}_j\,q$. Akkor az (1) szerint $j=i$ és van a,b hogy $p\,T^{\mathfrak{N}}_i\,a\,\bar{g}\,b\,R_i\,q$. Akkor tehát $t^{\mathfrak{N}}_{ik}a$ nem létezik, ahol $k\neq i$ és vagy $e'=e(i/k)$ vagy $e=e'(i/k)$. Mivel $p\,T^{\mathfrak{N}}_i\,a$, azért $t^{\mathfrak{N}}_{ik}p$ sem létezik. QED(5.12. Részállítás)

<u>5.13. RÉSZÁLLÍTÁS</u> Tfh. $\mathfrak{N}\in pNAt_\alpha$ szabályos és $e_0 \overset{i}{\longleftrightarrow} e_1$ jó az $\mathfrak{N}$-ben, minden $(e_0,e_1,i)\in G$-re. Akkor van szabályos $\mathfrak{M}\in NAt_\alpha$, melyre az alábbi (1)-(2) fennáll:

(1) $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$, $|M|=2\cdot|N|$,

(2) $\mathfrak{M}$ jó kiterjesztése $\mathfrak{N}$-nek.

<u>Bizonyítás</u>: A bizonyítás hasonló az 5.12.RÁ. bizonyításához. Legyen W, $M, E^{\mathfrak{M}}_{k\ell}$ és $\mathfrak{M}(e)$ ugyanaz, mint az 5.12.RÁ. bizonyításában, azaz $N = W\times Ekv(\alpha)$, $M = [W\cup(1\times W)]\times Ekv(\alpha)$, $E^{\mathfrak{M}}_{k\ell} = \{(w,\bar{e})\in M : (k,\ell)\in\bar{e}\}$, $\mathfrak{M}(e) = \{(w,\bar{e})\in M : \bar{e}=e\}$, ha $k,\ell\in\alpha$, $e\in Ekv(\alpha)$. Feltehetjük, hogy $\alpha\geq 2$, mert $pNAt_\alpha = NAt_\alpha$ ha $\alpha\leq 1$. Legyen $i\in\alpha$. Definiáljuk $T^{\mathfrak{M}}_i$-et.: Legyen $j\in\alpha\sim\{i\}$ rögzítve. Minden $e\in Ekv(\alpha)$-hoz, ha i szinguláris e-ben, akkor legyen $g(e) : \mathfrak{M}(e) \to \mathfrak{M}(e(i/j))$ olyan, hogy

$h\subseteq g(e)$, ahol $h \overset{d}{=} T^{\mathfrak{N}}_i\cap[\mathfrak{N}(e)\times\mathfrak{N}(e(i/j))]$,

$(g(e)\sim h)^{*}M\subseteq M\sim N$,

$\{\langle(w,e),(w,e(i/j))\rangle : w\in 1\times W\}\subseteq g(e)$, és

${}^2N\cap ker(g(e)) = {}^2\mathfrak{N}(e)\cap T^{\mathfrak{N}}_i$. (Lásd a túloldali ábrát!)

Ilyen $g(e)$ függvény van, mert h függvény. Legyen

$g_i \overset{d}{=} \bigcup\{g(e) : e\ Ekv(\alpha),\ i \text{ szinguláris } e\text{-ben}\}$,

$\bar{g}_i \overset{d}{=} g_i\cup g_i^{-1}$,

$R_i \overset{d}{=} \{\langle(w,e),(w,e')\rangle : w\in 1\times W,\ (\alpha\sim\{i\})\rceil e = (\alpha\sim\{i\})\rceil e'\}$,

$L_i \overset{d}{=} T^{\mathfrak{N}}_i\cup\bar{g}_i\cup R_i$,

$T_i^{\mathfrak{M}} \stackrel{d}{=}$ "az L_i tranzitív lezártja",

$\mathfrak{M} \stackrel{d}{=} \langle M, T_i^{\mathfrak{M}}, E_{ij}^{\mathfrak{M}} \rangle_{i,j\in\alpha}$.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{M}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Megint, először megvizsgáljuk a $T_i^{\mathfrak{M}}$ relációkat.:

(1) Legyen $i\in\alpha$ és $p\, T_i^{\mathfrak{M}}\, q$. Akkor az alábbi (i)-(iv) eset valamelyike áll fenn:

(i) $p\, T_i^{\mathfrak{N}}\, q$.

(ii) $p\, T_i^{\mathfrak{N}}\, a\, \bar{g}_i\, b\, R_i\, q$ valamely $a,b\in M$ -re.

(iii) $p\, R_i\, a\, \bar{g}_i\, b\, T_i^{\mathfrak{N}}\, q$ valamely $a,b\in M$ -re.

(iv) $p\, R_i\, q$.

Az (1) bizonyítása ugyanúgy történik, mint az előző részállításban.: Azt bizonyítjuk, hogy ha $p\, T_i^{\mathfrak{M}}\, q\, L_i\, r$ és p,q között fennáll az (i)-(iv) eset valamelyike, akkor p és r között is. A nem-triviális esetek a következők.

(a) $p\, T_i^{\mathfrak{N}}\, a\, \bar{g}_i\, b\, R_i\, q\, \bar{g}_i\, r$, $r\in N$.

Legyen $e \stackrel{d}{=} E^{\mathfrak{N}}(a)$, $e' \stackrel{d}{=} E^{\mathfrak{N}}(b)$. Akkor $a\, \bar{g}_i\, b$ és $a\in N$, $b\notin N$ miatt i szinguláris e -ben és $e' = e(i/j)$ (ahol $j\in \alpha\sim\{i\}$ az i-hez "kiválasztott" index). Hasonló okokból i szinguláris $E^{\mathfrak{N}}(r)$-ben és $E^{\mathfrak{N}}(q)= E^{\mathfrak{N}}(r)(i/j)$. Mivel $b\, R_i\, q$ miatt $(\alpha\sim\{i\})\rceil E^{\mathfrak{N}}(q) = (\alpha\sim\{i\})\rceil e'$, azért $E^{\mathfrak{N}}(r)=e$ és $E^{\mathfrak{N}}(q)=e'$. Ekkor $b\, R_i\, q$ miatt $b=q$, és így $a\, \bar{g}_i\, b\, \bar{g}_i\, r$; $a,r\in N$ és $b\notin N$ miatt $(a,r)\in \mathrm{kerg}_i$, tehát $a\, T_i^{\mathfrak{N}}\, r$, és ekkor $p\, T_i^{\mathfrak{N}}\, r$. Azaz p és r között az (i) eset áll fenn.

(b) $p\, R_i\, a\, \bar{g}_i\, b\, T_i^{\mathfrak{N}}\, q\, \bar{g}_i\, r$, $r\notin N$.

Legyen $e = E^{\mathfrak{N}}(b)$ és $e' = e(i/j)$. Az előzőkhöz hasonló meggondolások miatt $E^{\mathfrak{N}}(q)=e$. Ekkor $a\, \bar{g}_i\, b$, $a\notin N$, $b\in N$ miatt $b\, g(e)\, a$, és hasonlóan $q\, g(e)\, r$, tehát $b\, T_i^{\mathfrak{N}}\, q$ miatt $a=r$, tehát p és r között a (iv) eset áll fenn. <u>QED(1)</u>

Készen állunk arra, hogy $\mathfrak{M}$ kívánt tulajdonságait bebizonyítsuk. $\mathfrak{M}\in pNAt_\alpha$ bizonyítása teljesen hasonlóan történik, mint az előző részállításban - ezért csak a (legnehezebb) "$T_i^{\mathfrak{M}} \cap {}^2E_{ij}^{\mathfrak{M}} \subseteq Id$ ha $i \neq j$" állítás bizonyítását írjuk le. Tfh. $p\ T_i^{\mathfrak{M}}\ q$, $p,q \in E_{ij}^{\mathfrak{M}}$. Akkor $e'' \overset{d}{=} E^{\mathfrak{M}}(p) = E^{\mathfrak{M}}(q)$. A p és q között az (1) állításbeli (i)-(iv) esetek valamelyike áll fenn. Ha (i) vagy (iv), akkor készen vagyunk. Tfh. $p\ T_i^{\mathfrak{N}}\ a\ \bar{g}_i\ b\ R_i\ q$. Legyen $e = E^{\mathfrak{M}}(a)$, $e' = E^{\mathfrak{M}}(b)$. Akkor i szinguláris e -ben, de nem szinguláris e' és e''-ben, tehát $e'' \overset{i}{\longleftrightarrow} e'$. Mivel $\mathfrak{N}$-ben $e'' \overset{i}{\longleftrightarrow} e'$ jó azért van $r \in E^{\mathfrak{M}}(e')$, hogy $p\ T_i^{\mathfrak{N}}\ r$, azaz $a\ T_i^{\mathfrak{N}}\ r$, ez ellentmond a $\bar{g}_i\ b$, $b \notin N$ -nek. Tehát a (ii) eset nem állhat fenn p és q között. Ehhez a gondolathoz teljesen hasonlóan látható be, hogy a (iii) eset sem állhat fenn p és q között. Ezzel beláttuk, hogy $\mathfrak{M} \in pNAt_\alpha$. Legyen $(e,e',i) \in H$. Ha $(e,e',i) \in G$, akkor $e \overset{i}{\longrightarrow} e'$ jó az $\mathfrak{M}$-ben, mert jó volt az $\mathfrak{N}$-ben és a konstrukció megőrizte a jóságot. Ha $(e,e',i) \notin G$, akkor i szinguláris e -ben, és akkor a konstrukcióból látható, hogy $e \overset{i}{\longrightarrow} e'$ jó az $\mathfrak{M}$-ben. Tehát az 5.11.RÁ. szerint $\mathfrak{M} \in NAt_\alpha$. A többi kívánt tulajdonság ellenőrzése teljesen hasonló az 5.12.RÁ. bizonyításabelihez. QED(5.13. Részállítás)

Rátérünk az 5.10.L. bizonyítására. Legyen $\mathfrak{B} \in pNAt_\alpha$. Legyen $N \overset{d}{=} B \times Ekv(\alpha)$ és legyen $h : B \rightarrowtail N$ olyan, hogy $h^* \mathfrak{B}(e) \subseteq B \times \{e\}$ minden $e \in Ekv(\alpha)$ -ra. Legyen minden $i,j \in \alpha$ -ra

$$E_{ij}^{\mathfrak{N}} \overset{d}{=} \{(b,e) \in N : (i,j) \in e\} \quad \text{és}$$
$$T_i^{\mathfrak{N}} \overset{d}{=} \{(ha,hb) : (a,b) \in T_i^{\mathfrak{B}}\} \cup N \restriction Id ,$$
$$\mathfrak{N} \overset{d}{=} \langle N, T_i^{\mathfrak{N}}, E_{ij}^{\mathfrak{N}} \rangle_{i,j \in \alpha} .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $h : \mathfrak{B} \rightarrowtail \mathfrak{N} \in pNAt_\alpha$, $\mathfrak{N}$ szabályos, $|N| = |B| \cdot |Ekv(\alpha)|$ és $\mathfrak{N}$ jó kiterjesztése $h^* \mathfrak{B}$ -nek. Az 5.12.RÁ. ismételt alkalmazásával, majd az 5.13.RÁ. alkalmazásával kapunk egy $\mathfrak{M} \in NAt_\alpha$-t, mely jó kiterjesztése az $\mathfrak{N}$-nek és melyre $|M| \leq 2^{|H|} \cdot |N|$. Ebből az $\mathfrak{M}$ strukturából izomorfizmussal nyilvánvalóan megkapunk egy kívánt tulajdonságú $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$-t. QED(5.10. Lemma)

Visszatérünk a "(II) Van τ-fa $\Rightarrow$ $\{\mathfrak{A} \in NCA_\alpha : |A| \leq N(\tau)\} \not\models \tau = 0$" bizonyításához. Emlékezzünk rá, hogy egy adott P τ-fából az 5.8.L.-t közvetlen megelőzően megkonstruáltunk egy $\mathfrak{B}(P) \in pNAt_\alpha$ parciális atomstrukturát. Legyen $N(\tau) \overset{d}{=} 2^{\eta \cdot \beta}$, ahol η és β az 5.10.L. és 5.8.L.

kimondásában van definiálva, és legyen $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$ olyan kiterjesztése $\mathcal{B}(P)$ -nek mint az 5.10.L.-ban. Akkor $|A|\leq\eta\cdot\beta$ és $\mathcal{L}\overset{d}{=}\mathcal{L}m\mathfrak{A}\nvDash\tau=0$ az 5.8.L. szerint. Nyilvánvalóan $|\mathcal{L}|\leq N(\tau)$. Tehát $\{\mathfrak{A}\in NCA_\alpha : |A|\leq N(\tau)\}\nvDash\tau=0$. Ha $\alpha<\omega$, akkor $N(\tau)\in\omega$ és nyilvánvalóan az $\alpha<\omega$ esetben az N függvény kiszámítható. QED(5.2. Állítás)

Az 5.T. (i) és (ii) pontja bizonyítást nyert az $\alpha<\omega$ esetben: az 5.T(i) következik az 5.2.Á(i)-ből is és az 5.2.Á(ii)-ből is, hiszen könnyen látható, hogy eldönthető, hogy van-e τ-fa (ha $\alpha<\omega$) és minden azonosság átírható (rekurzívan) egy $\tau=0$ alakú ekvivalens azonossággá; az 5.T(ii) pedig közvetlenül következik az 5.2.Á(ii) -ből.

Rátérünk annak bizonyítására, hogy $EqNCA_\alpha$ eldönthető az $\alpha\geq\omega$ esetben is. Az $\alpha\geq\omega$ esetet az $\alpha<\omega$ esetre vezetjük vissza a következő lemma segítségével. Legyen $ind(\tau)$ a τ-ban előforduló indexek halmaza, azaz $ind(\tau)$ az a legkisebb $\gamma\subseteq\alpha$, melyre $\tau\in Tm_\chi(cil_\gamma)$. Vegyük észre, hogy $ind(\tau)$ kiszámítható.

5.14. LEMMA Legyen $ind(\tau)\subset\beta\subseteq\alpha$. Akkor

$$NCA_\alpha\vDash\tau=0 \iff NCA_\beta\vDash\tau=0.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy β és α rendszámok. Tfh. $\mathfrak{A}\nvDash\tau=0$, $\mathfrak{A}\in NCA_\alpha$. Akkor $\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A}\nvDash\tau=0$ és $\mathfrak{Rd}_\beta\mathfrak{A}\in NCA_\beta$, tehát ($NCA_\alpha\nvDash\tau=0\Rightarrow NCA_\beta\nvDash\tau=0$). Vegyük észre, hogy a τ-fa fogalmának α paramétere. Tegyük ezt explicitté, és mondjuk, hogy "P egy τ,α-fa", ha P teljesíti az 5.1.D(iii)-ban kirótt feltételeket. Tfh. $NCA_\beta\nvDash\tau=0$. Akkor az 5.2. Á(i) szerint van egy P τ,β-fa. Legyen $P'\overset{d}{=}\{(w,\sigma)\in P : (\forall i,n)[t_{in}$ előfordul w-ben $\Rightarrow i\in ind(\tau)]\}$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy akkor P' is egy τ,β-fa. Legyen $k\in\beta\sim ind(\tau)$ tetszőleges, $e\overset{d}{=}\{(i,j)\in{}^2\beta : (x,d_{ij})\in P'\}$ és legyen $\bar{e}$ az $e\cup\{k\}\times(\alpha\sim\beta)$ reláció által generált ekvivalencia-reláció (az α-n). Legyen

$$P''\overset{d}{=}P'\cup\{(w,d_{ij}) : (i,j)\in E^{\bar{e}}(w),\ w\in DomP'\}\cup$$
$$\{(w,-d_{ij}) : (i,j)\notin E^{\bar{e}}(w),\ w\in DomP',\ i,j\in\alpha\}.$$

Belátjuk, hogy P'' egy τ,α-fa. Legyen $D\overset{d}{=}DomP''=DomP'$. Nem nehéz indukcióval belátni, hogy $E^e(w) = \beta 1 E^{\bar{e}}(w)$ és $t^e_{in}w = t^{\bar{e}}_{in}w$ minden $w\in D$, $i\in\beta$ és n esetén. (Itt használni kell, hogy β és α rendszám.) Emiatt az 5.1.D(iii)-beli c3) feltétel teljesül. Az egyetlen feltétel még amit nem-triviális ellenőrizni, az hogy

$$(w,-c_i\sigma)\in P'' \Rightarrow (\forall n\in\alpha\sim\beta)(t^{\bar{e}}_{in}w,-\sigma)\in P''.$$

Mivel $k\notin ind(\tau)$, azért $t_{k\ell}$ ill. $t_{n\ell}$ nem szerepel w-ben, semmilyen ℓ-re, így $(k,n)\in E^{\bar{e}}(w)$, mert $(k,n)\in\bar{e}$. Tehát $t^{\bar{e}}_{in}w = t^{\bar{e}}_{ik}w$, és $(w,-c_i\sigma)\in P'' \Rightarrow (w,-c_i\sigma)\in P' \Rightarrow (t^e_{ik}w,-\sigma)\in P' \Rightarrow (t^e_{ik}w,-\sigma)\in P'' \Rightarrow (t^{\bar{e}}_{in}w,-\sigma)\in P''$ (mert $t^e_{ik}w = t^{\bar{e}}_{ik}w = t^{\bar{e}}_{in}w$). Ezzel beláttuk, hogy P'' egy τ,α-fa. Az 5.2.Á(i) szerint akkor $NCA_\alpha \nvDash \tau=0$. Beláttuk $(NCA_\beta \nvDash \tau=0 \Rightarrow NCA_\alpha \nvDash \tau=0)$ -t is. QED(5.14. Lemma)

Az 5.14.L. és az 5.2.Á. segítségével könnyen konstruálhatunk egy algoritmust, mely eldönti $EqNCA_\alpha$-t. (Az 5.2.Á(ii) szerint létező rekurzív $N(\tau)$ függvényről vegyük észre, hogy annak α is paramétere éspedig úgy, hogy még az $N(\tau,\alpha)$ függvény (mint kétváltozós függvény) is kiszámítható.) Rátérünk az 5.T(iii) bizonyítására.

Az 5.T(iii) bizonyítása: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $3\subseteq\alpha$. Definiáljuk

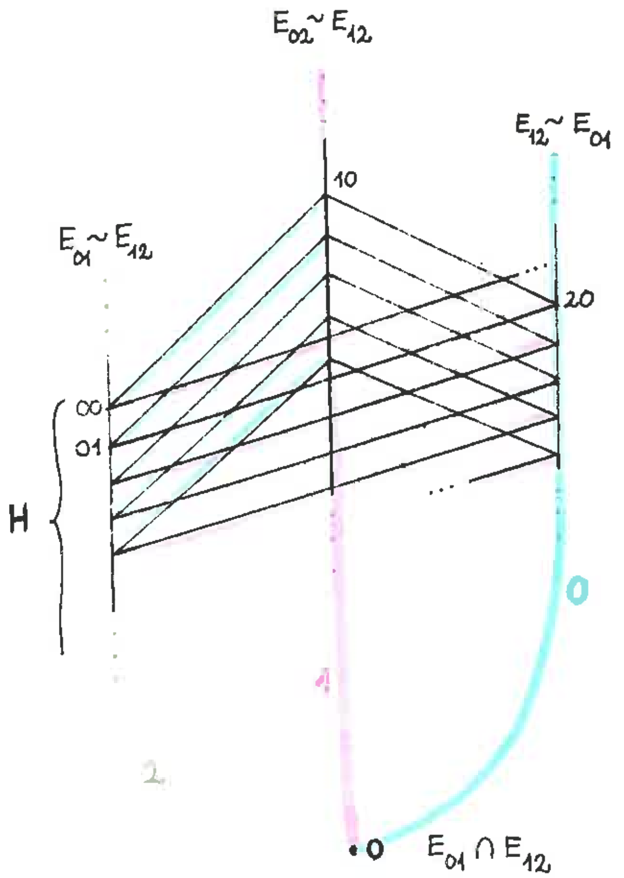
$$t^i_j x \overset{d}{=} d_{ij}\cdot c_i x\ , \quad \text{ahol } i,j\in\alpha$$

(ez bizonyos értelemben duálisa az $s^i_j x = c_i(d_{ij}\cdot x)$ -nek). Legyen

$$\tau x \overset{d}{=} t^1_0 t^2_1 t^0_2 x\ , \quad \text{és}$$

$$q \overset{d}{=} \tau(x\cdot d_{01}-d_{12}) \le x \rightarrow \tau(x\cdot d_{01}-d_{12}) = x\cdot d_{01}-d_{12}\ .$$

Megmutatjuk, hogy $FNCA_\alpha \models q$ míg $NCA_\alpha \nvDash q$. Tfh. $\mathfrak{L}\in NCA_\alpha$, $\mathfrak{L}\nvDash q$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{L}$ végtelen. Ez bizonyítani fogja $FNCA_\alpha \models q$ -t. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{L}m\mathfrak{A}$ valamely $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$-ra. Akkor $\mathfrak{L}\nvDash q$ azt jelenti, hogy van $H\subseteq E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12}$, $H\in C$, hogy $\tau^{\mathfrak{L}}H\subset H$. Mivel $\mathfrak{A}\in NAt_\alpha$, azért



2. ÁBRA

$$t^{\mathfrak{A}}_{02} : E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12} \twoheadrightarrow E^{\mathfrak{A}}_{02}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12},$$
$$t^{\mathfrak{A}}_{21} : E^{\mathfrak{A}}_{02}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12} \twoheadrightarrow E^{\mathfrak{A}}_{12}\sim E^{\mathfrak{A}}_{01}, \qquad \text{és}$$
$$t^{\mathfrak{A}}_{10} : E^{\mathfrak{A}}_{12}\sim E^{\mathfrak{A}}_{01} \twoheadrightarrow E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12}.$$

Legyen $f \stackrel{d}{=} t^{\mathfrak{A}}_{10}\circ t^{\mathfrak{A}}_{21}\circ t^{\mathfrak{A}}_{02}$. Akkor $f : E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12} \twoheadrightarrow E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12}$. Legyen $G \subseteq E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12}$ tetszőleges, $G\in C$. Akkor $t^{1\mathfrak{L}}_{0}G = d^{\mathfrak{L}}_{10}\cap c^{\mathfrak{L}}_{1}G = t^{\mathfrak{A}\,*}_{10}G$, és hasonlóan a többi indexre is, így $\tau^{\mathfrak{L}}G = f^{*}G$. Mivel f bijekció, azért $f^{*}G\subset G \Rightarrow f^{*}f^{*}G\subset f^{*}G$, így $\tau H\subset H$ -ból $H\supset\tau H\supset\tau\tau H\supset\ldots$ következik, azaz H végtelen sok különböző elemet generál $\mathfrak{L}$-ben. Beláttuk, hogy $FNCA_{\alpha}\models q$.

Annak megmutatásához, hogy $NCA_{\alpha}\not\models q$, megadunk egy konkrét $\mathfrak{L}\in NCA_{\alpha}$ -t és egy konkrét $H\in C$ -t, melyre $\tau^{\mathfrak{L}}H<H$, és ugyanakkor $H\leq d^{\mathfrak{L}}_{01}-d^{\mathfrak{L}}_{12}$. Ld. a 2. Ábrát a túloldalon! Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát. Legyen $e_0 \stackrel{d}{=} {}^2\{0,1\}\cup(\alpha\sim 2)\upharpoonright Id$. Jelölje E azon ekvivalencia-relációk halmazát az α-n, melyekben pontosan két különböző elem ekvivalens, azaz

$$E \stackrel{d}{=} \{e\in Ekv(\alpha) : |e\sim Id|=2\}, \qquad E' \stackrel{d}{=} Ekv(\alpha)\sim(E\cup\{Id_{\alpha}\}),$$

$$A \stackrel{d}{=} E\times\mathbb{Z}\cup E'\times\{0\},$$

$$E_{ij} \stackrel{d}{=} \{(e,n)\in A : (i,j)\in e\},$$

$$T_i \stackrel{d}{=} \{\langle(e,n),(\bar{e},m)\rangle\in{}^2A : (\alpha\sim\{i\})\upharpoonright e = (\alpha\sim\{i\})\upharpoonright\bar{e},$$
$$[e\neq\bar{e} \text{ és } \{e,\bar{e}\}\subseteq E] \Rightarrow n=m,$$
$$[e=\bar{e} \text{ és } i\in Dom(e\sim Id)] \Rightarrow n=m\}, \quad \text{ha } i\neq 1,$$

$$T_1 \stackrel{d}{=} \{\langle(e,n),(\bar{e},m)\rangle\in{}^2A : (\alpha\sim\{i\})\upharpoonright e = (\alpha\sim\{i\})\upharpoonright\bar{e},$$
$$[e\neq\bar{e} \text{ és } \{e,\bar{e}\}\subseteq E\sim\{e_0\}] \Rightarrow n=m,$$
$$[e=\bar{e} \text{ és } 1\in Dom(e\sim Id)] \Rightarrow n=m,$$
$$e=e_0\neq\bar{e}\in E \Rightarrow n=m+1,$$
$$\bar{e}=e_0\neq e\in E \Rightarrow m=n+1 \quad \},$$

$$\mathfrak{A} \stackrel{d}{=} \langle A, T_i, E_{ij}\rangle_{i,j\in\alpha}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathfrak{A}\in NAt_{\alpha}$. Legyen $H \stackrel{d}{=} \{(e_0,n) : n\in\mathbb{Z},\ n>0\}$. Ekkor könnyű látni, hogy $H\subseteq E^{\mathfrak{A}}_{01}\sim E^{\mathfrak{A}}_{12}$ és $\tau^{\mathfrak{L}}H\subset H$ ahol $\mathfrak{L} \stackrel{d}{=} \mathfrak{Lm}\,\mathfrak{A}$.

QED(5. Tétel)

6. MEGJEGYZÉS (i) Az 5.T(ii)-ből az $\alpha<\omega$ feltétel nem hagyható el, mert $EqNCA_\alpha \neq EqFNCA_\alpha$ ha $\alpha \geq \omega$.: Legyen $\alpha \geq \omega$ és $i,j\in\alpha$, $i\neq j$. Akkor $NCA_\alpha \not\models d_{ij}=1$, de $FNCA_\alpha \models d_{ij}=1$ belátható a [HMT]1.3.12 bizonyításával. Továbbá, az 5.14.L.-ban az $ind(\tau)\subset\beta$ feltétel nem hagyható el, mert [N86b]-ben kimutattuk, hogy van azonosság, mely megkülönbözteti NCA_β-t és NCA_α-t ha $2\leq\beta<\omega$, $\beta<\alpha$ (azaz ekkor $NCA_\beta \neq \mathbf{HSP}\ \mathbf{Rd}_\beta NCA_\alpha$). Ugyanez igaz a CA_α osztályokra is, ld. [HMT]2.6.14(i).

Az 5.T.-ben láttuk, hogy NCA_α nem erősen eldönthető, ha $\alpha\geq 3$. Nem tudjuk, hogy NCA_α szóproblémája megoldható-e az $\alpha\geq 3$ esetben. Alább megmutatjuk, hogy NCA_α erősen eldönthető ha $\alpha\leq 2$. Továbbá, a triviális eseteket leszámítva, ha C_4 -en kívül még bármelyik axiómasémát elhagyjuk és $\alpha<\omega$, akkor már erősen eldönthető varietást kapunk (itt triviálisnak nevezzük C_1, C_5, C_6 -ot mert nem szerepel változójel bennük). Ha $i\in 8$ akkor legyen

$$NCA_\alpha^{-i} \stackrel{d}{=} \{\mathfrak{A}\in CTA_\alpha : (\forall j\in 8\sim\{4,i\})\ \mathfrak{A}\models C_j^\alpha\}.$$

Alább megmutatjuk, hogy ha $i\in 8\sim 1$ akkor

$$NCA_\alpha^{-i} \text{ erősen eldönthető} \iff i\in\{2,3,7\}.$$

Valószínűleg NCA_α^{-0} is erősen eldönthető. Ezen állítások megmutatásához csak a konstrukciókat adjuk meg és a hozzájuk tartozó állításokat, ezek nem nehéz számolással leellenőrizhetők. (Megjegyezzük azonban, hogy C_3 helyett általában egyszerűbb leellenőrizni a C_3', C_3'', és C_3'''-at.)

Legyen $\mathfrak{A}\in CTA_\alpha$, $\{d_{ij} : i,j\in\alpha\}\subseteq X\subseteq Y\subseteq A$, $\alpha<\omega$ és legyen $\mathfrak{B}\in CTA_\alpha$ olyan, hogy $B = Sg^{\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A}}Y$, $\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A}$, és $d_{ij}^{\mathfrak{B}}=d_{ij}^{\mathfrak{A}}$ ha $i,j\in\alpha$.

(I) Tfh. $Y = X\cup\{s_1^0x,\ s_0^1x : x\in X\}$ és

$$c_i^{\mathfrak{B}}x = \prod\{y\in B : x\leq y = c_i^{\mathfrak{A}}y\}, \text{ minden } i\in\alpha \text{ és } x\in B\text{-re.}$$

Akkor $\mathfrak{A}\in NCA_\alpha^{-7} \Rightarrow (\mathfrak{B}\in NCA_\alpha^{-7}$ és $X\mathord{\upharpoonright}\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B})$, továbbá $\alpha\leq 2$ esetén $\mathfrak{A}\in NCA_\alpha \Rightarrow \mathfrak{B}\in NCA_\alpha$. Ez bizonyítja, hogy NCA_α ha $\alpha\leq 2$ és NCA_α^{-7} ha $\alpha<\omega$ erősen eldönthető.

(II) Legyen $At \overset{d}{=} At\mathcal{B}$ és tfh. Y=X (itt $At\mathcal{B}$ jelöli a $\mathcal{B}$ atomjainak halmazát).

(1) Tfh. $c_i^{\mathcal{B}}x = \sum\{a\in At : a \le c_i^{\mathfrak{A}}x\}$, minden $i\in\alpha$ és $x\in B$ -re.
Akkor $\mathfrak{A}\in NCA_\alpha^{-3} \Rightarrow (\mathcal{B}\in NCA_\alpha^{-3}$ és $X\upharpoonright\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{B}$).

(2) Tfh. $\mathfrak{BlA}$ Boole halmazalgebra U-n. Legyen $At' = At\{y\in B : y=c_i^{\mathfrak{A}}y\}$.
Legyen $r : At' \to U$ olyan, hogy $(\forall a\in At)r(a)\in a$ (reprezentánsrendszer).
Tfh. $c_i^{\mathcal{B}}x = \sum\{a\in At' : r(a)\in x\}$ minden $i\in\alpha$ és $x\in B$ -re.
Akkor $\mathfrak{A}\in NCA_\alpha^{-2} \Rightarrow (\mathcal{B}\in NCA_\alpha^{-2}$ és $X\upharpoonright\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{B}$).

A fenti esetek bizonyítják, hogy NCA_α^{-i} erősen eldönthető, ha $i\in\{2,3,7\}$. Legyen $i\in\{1,5,6\}$ és legyen $q' \overset{d}{=} \wedge c_i^{\alpha} \to q$, ahol q az 5.T(iii)-beli kvázi-azonosság. Akkor könnyen látható, hogy q' ekvivalens egy kvázi-azonossággal és (5.T(iii) miatt) $\mathbf{F}NCA_\alpha^{-i} \models q'$ míg $NCA_\alpha^{-i} \not\models q'$. Tehát NCA_α^{-i} nem erősen eldönthető.

Hasonló konstrukcióval lehet megmutatni azt is, hogy WA és NA erősen eldönthető. Megadjuk a konstrukciót:
Legyen $\mathfrak{A}\in NA$ és $1'^{\mathfrak{A}} \in X\subseteq A$ tetszőleges. Legyen

$Y' \overset{d}{=} Sg^{(\mathfrak{BlA})}(X\cup\{x^{\smile} : x\in X\})$, és

$Y \overset{d}{=} Y'\cup\{y;^{\mathfrak{A}}1,\ 1;^{\mathfrak{A}}y : y\in Y',\ y\le 1'\}$. Legyen

$\mathcal{B}\in RTA$ olyan, hogy $B = Sg^{(\mathfrak{BlA})}Y$, $\mathfrak{Bl}\mathcal{B}\subseteq\mathfrak{BlA}$, $1'^{\mathcal{B}} = 1'^{\mathfrak{A}}$ és $b^{\smile\mathcal{B}} = b^{\smile\mathfrak{A}}$ minden $b\in B$ -re, továbbá

$a;^{\mathcal{B}}b = \sum\{z\in At\mathcal{B} : (a;^{\mathfrak{A}}b)\cdot z\neq 0\}$, minden $a,b\in B$ -re.

Ekkor be lehet látni az alábbiakat:

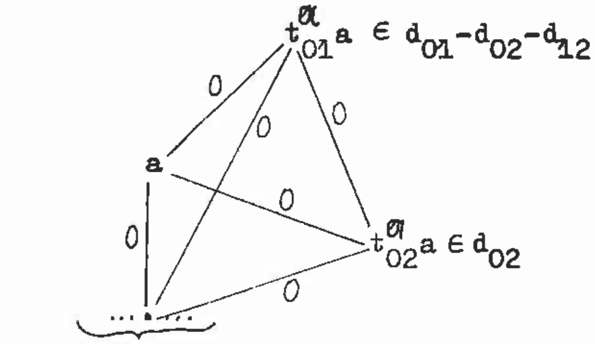
(1) $\mathcal{B}\in NA$ és $X\upharpoonright\mathcal{B} = X\upharpoonright\mathfrak{A}$,

(2) $\mathcal{B}\in WA$ ha $\mathfrak{A}\in WA$.

(Itt (1) ellenőrzése nem nehéz számolás, a (2)-höz azt kell belátni, hogy $[\mathfrak{A}\in WA \Rightarrow (\forall b\in B,\ b\le 1')\{b;^{\mathfrak{A}}1,\ 1;^{\mathfrak{A}}b\}\subseteq B]$. A részletes bizonyítás megtalálható [N85c]-ben.)

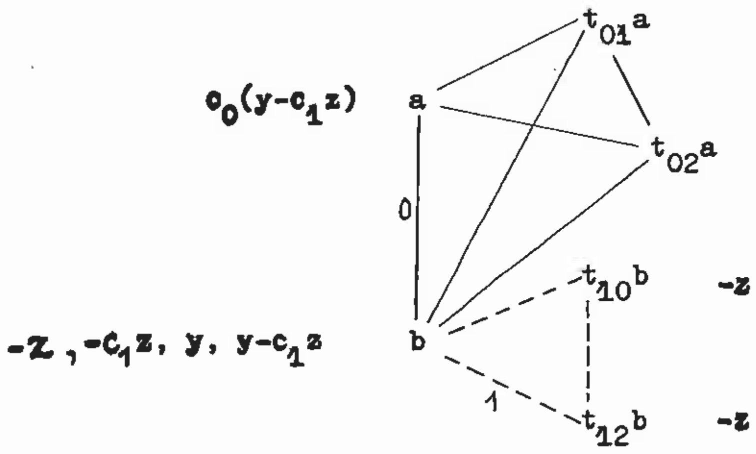
(ii) Nem véletlenül hívtuk a τ-fát "fá"-nak. A jelenlegi módszer lényegében a logikában használatos fa-módszer (tree-proof), melyet logikában teljes kalkulusok megadására szoktak használni (pl. ez képezi alapját az un. szekvencia-kalkulusoknak is). Alább szeretnénk szemléletesen megvilágítani az 5.T. bizonyításában használt "fa-módszer" lényegét néhány egyszerű példával. Egyúttal azt is megmutatjuk, hogy miért nem használható e módszer (változtatás nélkül) $EqCrs_\alpha$ eldöntésére.

Legyen $\tau = c_0(y-c_1z)$ és azt szeretnénk tudni, hogy $NCA_3 \models \tau=0$ igaz-e. Tfh. $\mathfrak{A} \in NAt_\alpha$ és $a \in \tau^{\mathfrak{L}}[k]$ valamely $k : X \to SbA$ -ra, ahol $\mathfrak{L} \overset{d}{=} \mathfrak{Cm}\,\mathfrak{A}$. Akkor a -nak van egy s 0-szomszédja (azaz $a\,T_0^{\mathfrak{A}}\,s$), melyre $s \in (y-c_1z)^{\mathfrak{L}}[k]$. Tfh. $E^{\mathfrak{A}}(a)=3\upharpoonright Id$ (azaz $a \in -d_{01}^{\mathfrak{L}}-d_{02}^{\mathfrak{L}}-d_{12}^{\mathfrak{L}}$). Akkor a-nak négyféle 0-szomszédja lehet $\mathfrak{A}$-ban: $t_{00}^{\mathfrak{A}}a=a$, $t_{01}^{\mathfrak{A}}a$, $t_{02}^{\mathfrak{A}}a$ (ezek "kötelező" szomszédok), és lehet még akárhány s 0-szomszédja is a-nak, melyre $E^{\mathfrak{A}}(s)=3\upharpoonright Id$. Rajzban:



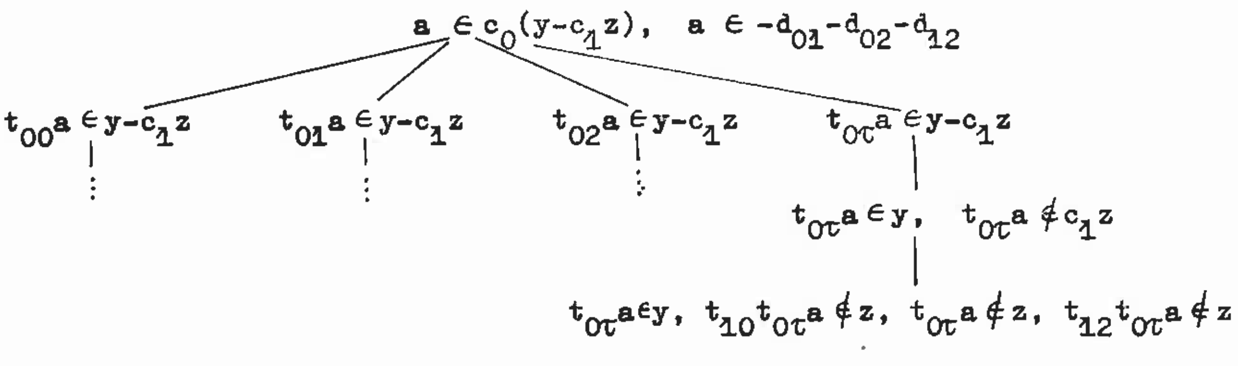
n db., ahol $n \geqslant 0$.

Tehát mind a négy lehetőséget sorban végignézhetjük. Tfh. $b \in (y-c_1z)^{\mathfrak{L}}[k]$ ahol b "opcionális" szomszédja a -nak, azaz $E^{\mathfrak{A}}(b)=3\upharpoonright Id$. Akkor $b \in k(y)$ és $b \notin (c_1z)^{\mathfrak{L}}[k]$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy b minden 1-szomszédjára igaz, hogy $\notin k(z)$. Három különböző kötelező 1-szomszédja van b -nek: $t_{10}^{\mathfrak{A}}b$, $t_{11}^{\mathfrak{A}}b=b$, $t_{12}^{\mathfrak{A}}b$. Ezek közül $t_{10}^{\mathfrak{A}}b$ elvileg egybeeshet $t_{01}^{\mathfrak{A}}a$ -val, de úgy járunk jobban, ha különbözőnek vesszük. Rajzban:



Nos, a fenti rajz "végetért", és nincs benne "ellentmondás" (azaz nincs semelyik elemre w is és $-w$ is kikötve valamely w-re). Igy eljárásunk szerint $NCA_3 \not\models \tau=0$. Ha a fenti eljárást végigvisszük $\sigma=c_0(y-c_1y)$ -ra, akkor "minden eshetőségben" végülis ellentmondást fogunk kapni, annak megfelelően, hogy $NCA_3 \models \sigma=0$.

A fenti "rajzos" eljárást most szemléltetjük egy igazi "fa-bizonyításos" formában is. A rajzhoz nem fűzünk kommentárt, reméljük, hogy magáért beszél.



Megjegyezzük, hogy az 5.1.D.-beli "τ-fa" a fenti "igazi fa" egy "sikeres ágának", azaz egy "bizonyításnak" felel meg.

Felmerül a kérdés, hogy az 5.T.-bizonyításabeli "fa-módszer" nem alkalmazható-e a Crs_α esetben a triviális módosításokkal (atomstrukturákként az $\mathfrak{At}\tau(V)$-ket használva). Pl. megint azt akarjuk eldönteni, hogy $Crs_3 \models c_0(y-c_1z)$ igaz-e: Alább $\langle a,b,c\rangle$ stb. helyett csak abc -t írunk.

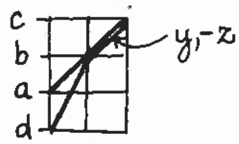
$$abc \in c_0(\overbrace{y-c_1 z}^{\sigma}), \quad |\{a,b,c\}|=3$$

$$bbc \in \sigma \qquad abc \in \sigma \qquad cbc \in \sigma \qquad dbc \in y-c_1 z, \quad |\{d,b,c\}|=3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad dbc \in y, \; dbc \notin c_1 z$$

$$dbc \in y, \; dbc \notin z.$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy Crs_3 -ban dolgozunk, azaz dbc - nek csak önmaga a kötelező 1-szomszédja. Valóban, legyen $|\{a,b,c,d\}|=4$, $V = \{abc, dbc\}$, $k(y)=\{dbc\}$, $k(z)=0$.



Akkor $\mathfrak{Gb}\,V \not\models \tau=0[k]$, nevezetesen $abc \in \tau^{\mathfrak{Gb}V}[k]$.

Azaz $Crs_3 \not\models \tau=0$.

Látszólag ez egy jó eljárás lenne, azonban ahogy az alábbi példán szemléltetjük, nem mindig ér véget véges sok lépésben.

Legyen $\tau \overset{d}{=} -d_{01}\cdot d_{12}-y-c_0-c_1(\underbrace{y-d_{01}\cdot c_0(d_{01}\cdot c_1(d_{12}-y))}_{\sigma})$.

$$abb \in \tau, \; -d_{01}, \; d_{12}, \; -y, \; -c_0-c_1\sigma, \; c_1\sigma$$

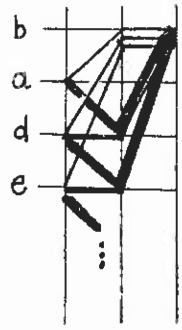
$$adb \in y, \; -d_{01}, \; c_0(d_{01}\cdot c_1(d_{12}-y))$$

$$ddb \in c_1(d_{12}-y)$$

$$dbb \in -y, \; c_1\sigma$$

$$deb \in y, \; -d_{01}, \; c_0(d_{01}\cdot c_1(d_{12}-y))$$

$$\vdots$$



Nyilván könnyű is szerkeszteni egy V Crs_3-egységet, melyben ez a "visszakeresés" végtelen sokáig tart. Pl. legyen $V \overset{d}{=} \bigcup\{{}^3\{0,n\} \cup {}^3\{n,n+1\} \cup \{\langle n,n+1,0\rangle\} : n \in \omega\}$. Akkor $\mathfrak{Gb}\,V \not\models \tau=0$, de minden véges $W \subseteq V$ -re $\mathfrak{Gb}\,W \models \tau=0$. Ennek ellenére, ez a τ nem jó arra, hogy megkülönböztesse a véges és végtelen egységű Crs_α-kat: Van véges W Crs_3-egység is, melyre $\mathfrak{Gb}\,W \not\models \tau=0$, pl. az alábbi:

$W = \{abb, aab, dbb, ddb, adb, dab\}$

$k(y) = \{dab, adb\}$.

Valóban, a fenti módszert meg lehet úgy módosítani, hogy megkapjuk ezt a "megoldást" is, azáltal hogy a fában az összes eddig felvett új elemeket is kipróbáljuk szomszédnak, nem mindig új elemeket veszünk fel:

$dbb \in -y,\ c_1\sigma$

- $dab \in \sigma$
  - $dab \in y,\ -d_{01},\ c_0(d_{01} \cdot c_1(d_{12}-y))$
  - $aab \in c_1(d_{12}-y)$
  - $abb \in -y$
- $deb \in \sigma$
  - $\vdots$

Nem tudjuk, hogy ez a fa-módszer már jó-e a Crs_3-ban érvényes azonosságok eldöntésére. Ha jó lenne, akkor $Crs_3 \nvDash \tau=0$ -ból következne, hogy van véges V Crs_3-egység, melyre $\mathfrak{C}\mathfrak{b}V \nvDash \tau=0$. Azonban még azt sem tudjuk, hogy $EqCrs_3 = EqFCrs_3$ igaz-e.

Ezért az $EqCrs_\alpha$ eldöntésére*/ egy más módszert használunk majd. (Az új módszer azonban úgy is felfogható, hogy a végtelen fából konstruáljuk meg a modellt. Ekkor azonban véges sok információ alapján el kell tudni dönteni, hogy egy fában lesz-e később ellentmondás.) Megjegyezzük, hogy kevés olyan eldöntési eljárás ismert az irodalomban, ami nem azon alapszik, hogy végülis megkonstruál egy véges modellt. ■

Mielőtt rátérnénk a 2. Főtétel ($EqCrs_\alpha$ eldönthető) kimondására és bizonyítására, kimondjuk az 5.T. egy logikai következményét. Ez durván szólva az, hogy a kvantorok felcserélhetősége az elsőrendű logikában nagyon lényeges, ez adja az elsőrendű logika erejét. Pontosabban: Nem túl nehéz bizonyítani, hogy a $\vdash_\alpha$ bizonyítási rendszer változatlan marad (abban az értelemben, hogy a bizonyítható formulák halmaza nem változik), ha benne ⟪4⟫ -et kicseréljük a következő négy speciális esetére:

⟪4a⟫ $\forall v_i \forall v_j \varphi \to \forall v_j \forall v_i \varphi$

⟪4b⟫ $\forall v_k \varphi \to \forall v_k \forall v_k \varphi$

⟪4c⟫ $\exists v_k \varphi \to \forall v_k \exists v_k \varphi$

---

*/ Tulajdonképpen meglepő, hogy $EqCrs_\alpha$ eldönthető egyáltalán - ennek az ellenkezője volt várható a Crs_α-ra vonatkozó egyéb tételek alapján.

((4d)) $R(\bar{x}) \to \forall v_k R(\bar{x})$ ha $v_k \notin Rng\bar{x}$, és $R(\bar{x})$ atomi formula.

[A ((4a)) úgy speciális eset, hogy $\forall v_i \forall v_k \varphi \to \forall v_k \forall v_i \forall v_k \varphi$ speciális eset, és ebből ((3)),((2)) egyszerű alkalmazásával kapjuk ((4a))-t.] Alább megmutatjuk, hogy ha az $\vdash_\alpha$ bizonyítási rendszerből elhagyjuk a ((4a)) -t, akkor egy <u>lényegesen gyengébb</u> bizonyítási rendszert kapunk. Tehát nem véletlen, hogy a II.9.T. bizonyításában lépten-nyomon használtuk a "kvantorok felcserélhetőségét" (azaz a ((4a))-nak megfelelő C_4-et).

<u>7. KÖVETKEZMÉNY</u> Ha az $\vdash_\alpha$ bizonyítási rendszerben ((4))-et kicseréljük a fenti ((4b))-((4d)) -re, akkor az így kapott bizonyítási rendszer lényegesen gyengébb $\vdash_\alpha$ -nál, nevezetesen az ((1))-((3)),((4b))-((4d)),((5))-((9)) -ből (MP) és (G) segítségével levezethető formulák halmaza eldönthető.

<u>Bizonyítás</u>: Legyen $\vdash'$ a fenti módon kapott gyengített $\vdash_\alpha$ (azaz $\vdash'$ az $\vdash_\alpha$, úgy hogy ((4a))-t elhagyjuk). Legyen $\Lambda = \langle \alpha, t \rangle$ egy elsőrendű nyelv, ahol $t : \mathcal{R} \to \omega$. Legyen $\equiv' \overset{d}{=} \{(\varphi,\psi) \in {}^2Fm^\Lambda : \vdash' \varphi \leftrightarrow \psi\}$ és legyen $\mathfrak{F} \overset{d}{=} \mathfrak{Fm}^\Lambda/\equiv'$. Először belátjuk, hogy $\mathfrak{F}$ a t-vel dimenziókorlátozott szabad NCA_α, azaz $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}^{(t)} NCA_\alpha$, majd ezután megmutatjuk, hogy a τ-fa fogalmát "a t -hez idomítva" eldöntő eljárást kapunk a $Cr_{\mathcal{R}}^{(t)} NCA_\alpha$ kongruenciára (mint párok halmazára). Ahhoz, hogy $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}^{(t)} NCA_\alpha$, a következő két dolgot kell megmutatni (ld. a [HMT]4.3.25 bizonyítását a részletekért):

(a) $\mathfrak{F} \in NCA_\alpha$

(b) $\mathfrak{Fr}_{\mathcal{R}}^{(t)} NCA_\alpha$-ban az ((1))-((9)) $\sim$ ((4a)) a $\mathbf{T}$ osztályában vannak.

Az (a) bizonyításáról: Itt a [HMT]4.3.22 bizonyítását kell megismételni, kicsit módosított környezetben (azaz nem szabad ((4)) -et használni és nem kell C_4-et bizonyítani). A [HMT]4.3.22 bizonyításában ((4)) négyszer van használva a C_4 bizonyításán kívül. Az első három használatot (p.158_{13}, (e) a p.158-on ill (h) a p.159-en a II. részben) rendre helyettesíteni lehet ((4b)),((4c)) ill. ((4d))-vel. A negyedik használatot a p.159_{18}-ban a következőképp küszöbölhetjük ki (itt (h) a [HMT]4.3.22 bizonyításabeli állítást jelöli):

$$c_\lambda c_\kappa(d_{\lambda\kappa}\cdot d_{\kappa\mu}) \underset{((7))(+((1)),((5)))}{\uparrow\!=} c_\lambda c_\kappa(d_{\lambda\mu}\cdot d_{\kappa\mu}) \underset{(h),C_3}{\uparrow\!=} c_\lambda(c_\kappa d_{\lambda\mu}\cdot c_\kappa d_{\kappa\mu}) \underset{((6)),(h)}{\uparrow\!=} 1 .$$

A (b) bizonyításáról: [HMT]4.3.25 -ben a kívánt állítás meg van mutatva ((1)),((2)),((8)) -ra (a C_4 használata nélkül). A többi állítás egyenes következménye valamelyik NCA_α-axiómának.

Legyen $\tau\in Tm_{\mathcal{R}}(cil_\alpha)$. Feltehetjük, hogy $\alpha<\omega$. Azt mondjuk, hogy P egy t,τ-fa ha

(i) P egy τ-fa és

(ii) minden $R\in\mathcal{R}$, $i\in\alpha\sim tR$, $n\in\alpha\cup Tm$, és $w\in Tm(t_\alpha)$ esetén ha $\{w,t_{in}w\}\subseteq DomP$ akkor $[(w,R)\in P \leftrightarrow (t_{in}w,R)\in P]$.

Az 5.T. bizonyításának egyszerű módosításával belátható, hogy

$$(\tau,0)\in Cr_{\mathcal{R}}^{(t)}NCA_\alpha \iff \text{nincs } t,\tau\text{-fa},$$

ezzel kapunk egy eldöntő algoritmust $Cr_{\mathcal{R}}^{(t)}NCA_\alpha$-ra. Összefoglalva, az eldöntő algoritmus a $\vdash^{\!\!\!\!\!\!/}$ bizonyítási rendszerre a következő: Legyen $\varphi\in Fm^\Lambda$. Legyen $\tau\mu(\varphi)$ a φ-nek megfelelő $Tm_{\mathcal{R}}(cil_\alpha)$ -beli term (ld. I. fejezet). Akkor $[\vdash\!\!\!\!\!/\;\varphi \iff$ van $t,\tau\mu(\varphi)$-fa$]$, és ez utóbbi eldönthető.
QED(7. Következmény)

III.2. A cilindrikus-relativizált halmazalgebrák azonosságelméletének eldöntése és ennek modellelméleti jelentései.

Most rátérünk a Crs_α osztály vizsgálatára, illetve a kvantorok felcserélhetőségének modellelméleti jelentőségére. Legyen

$$WCA_\alpha \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in NCA_\alpha^{-6} : \mathfrak{A}\models d_{ik}\cdot d_{kj}\le d_{ij}=d_{ji}=c_k d_{ji} \text{ ha } i,j,k\in\alpha,\ k\notin\{i,j\}\}.$$

Azaz WCA_α azon CTA_α-beli algebrák osztálya, melyek a C_4 és C_6 kivételével teljesítik a CA_α-axiómákat, és a C_6 helyett annak egy gyengített változatát teljesítik. Akkor $Crs_\alpha\subseteq WCA_\alpha$ és a WCA_α eldönthető de nem erősen (ez belátható az 5.T bizonyításából mert ellenőrizhető, hogy $WCA_\alpha = \mathbf{ISCmp}NAt_\alpha$). Hívhatnánk Crs_α-t a WCA_α reprezentálható részének. Ha $\alpha\le 2$ akkor $ICrs_\alpha=WCA_\alpha$ a [HMT]5.5.5 szerint (ez Henkin és Resek tétele).

Az alábbi 8.T. szerint $\alpha \geq 3$ esetben $\mathbf{I}Crs_\alpha$ axiomatizálható ugyan azonosságokkal, de nem véges sokkal (ill. nem véges sok sémával $\alpha \geq \omega$ esetben); ezért $Crs_\alpha \subset WCA_\alpha$ hiszen WCA_α véges sok sémával van definiálva. A séma (pontosabban azonosságséma) fogalmát itt nem definiáljuk, mert később nem lesz rá szükségünk. Megjegyezzük azonban, hogy a séma egy természetes fogalom, pl. "$c_i d_{ij}=1$ ha $i,j\in\alpha$" egy séma. Végtelen α esetén ezek fontosabbak az igazi azonosságoknál, hiszen ekkor véges sok azonossággal szinte semmit nem lehet definiálni (hiszen a hasonlósági tipus végtelen), míg véges sok sémával már lehet általában. A séma definiciója megtalálható pl. [HMT]4.1.4-ben, fontosságukról ld. pl. [AN78],[AN80],[A77].

A következő 8.T. főleg motiváció céljára szolgál, itt nem írjuk le a bizonyítást. A 8.T(i),(iii)-t [N78]-ban, a 8.T(ii),(iii)-t [N84c]-ben közöltük, ezenkívül mind a négy bizonyítást idézik a [HMT] monográfiában, ld. 5.5.10, 5.5.12, 5.5.13, 5.5.16.

<u>8. TÉTEL</u> Legyen α tetszőleges halmaz.

(i) $\mathbf{I}Crs_\alpha$ varietás, azaz axiomatizálható azonosságokkal.

(ii) $\mathbf{I}Crs_\alpha$ nem végesen axiomatizálható.

(iii) $\mathbf{I}Crs_\alpha$ nem axiomatizálható véges sok sémával, de axiomatizálható megszámlálható sok sémával. ■

Felmerül a kérdés, hogy $EqCrs_\alpha$ eldönthető-e.

<u>2. FŐTÉTEL</u> $EqCrs_\alpha$ eldönthető minden (eldönthető) α-ra.

Mielőtt bizonyítanánk a 2.Főtételt, definiáljuk Crs_α két részosztályát, mert azokra is bizonyítani fogjuk a tételt.

<u>9. DEFINICIÓ</u> Legyen α tetszőleges halmaz.

$$D_\alpha \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in Crs_\alpha : (\forall s\in 1^{\mathfrak{A}})(\forall i,j\in\alpha)s(i/s_j)\in 1^{\mathfrak{A}}\},$$
$$G_\alpha \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in Crs_\alpha : (\forall s\in 1^{\mathfrak{A}})^{\alpha}(Rng s)\subseteq 1^{\mathfrak{A}}\}.$$

Legyen $K\subseteq Crs_\alpha$. Azt mondjuk, hogy V egy K-egység, ha $\mathfrak{S}\mathfrak{b}V\in K$. Azt mondjuk, hogy V kiegyenesíthető, ha V egy D_α-egység. ■

Nyilvánvalóan, $Gs_\alpha \subseteq G_\alpha \subseteq D_\alpha \subseteq Crs_\alpha$. Az $\mathbf{I}Gs_\alpha$, $\mathbf{I}G_\alpha$, $\mathbf{I}D_\alpha$, $\mathbf{I}Crs_\alpha$ osztályok mindegyike varietás és különböznek egymástól ha $\alpha \geq 2$: Az $\mathbf{I}Gs_\alpha$

ismerten varietás (ld. [HMT]3.1.108), az $\mathbf{I}G_\alpha$ osztályról a [HMT]3.1.103 bizonyításának módosításával látható be, hogy varietás, az $\mathbf{I}Crs_\alpha$ varietás 8.T. szerint és az alábbiak szerint ebből következik, hogy $\mathbf{I}D_\alpha$ is varietás. Könnyen látható, hogy $D_\alpha = \{\mathfrak{A}\in Crs_\alpha : \mathfrak{A}\models c_i d_{ij}=1$ minden $i, j\in\alpha\text{-ra}\} = \{\mathfrak{A}\in Crs_\alpha : \mathfrak{A}\models C_6\}$, és így $Crs_\alpha \cap CA_\alpha = \{\mathfrak{A}\in D_\alpha : \mathfrak{A}\models C_4\}$. Látni fogjuk, hogy $Eq D_\alpha$ eldönthető ha $\alpha<\omega$, míg $Eq(Crs_\alpha\cap CA_\alpha)$ ismerten nem eldönthető. Tehát itt is a C_4 elhagyása eldönthetőséget okoz. Megjegyezzük, hogy $G_\alpha \not\subseteq CA_\alpha$, azaz $G_\alpha \not\models C_4$. Tehát a C_4 azonosság megkülönbözteti Gs_α-t és G_α-t, míg a C_6 azonosság megkülönbözteti a D_α-t és a Crs_α-t. (A 11.T. bizonyításában később megadunk egy azonosságot, mely megkülönbözteti G_α-t és D_α-t.) Legyen V egy G_α-egység. Akkor belátható, hogy $V = \bigcup\{{}^\alpha U_i : i\in I\}$ valamely $\langle U_i : i\in I\rangle$ halmazrendszerre. Mivel a Gs_α-egység definiciója ugyanez azzal a megkötéssel, hogy az U_i-k diszjunktak egymástól, a G_α elemeit "nemdiszjunkt Gs_α-knak" is fogjuk hívni, illetve V-re azt mondjuk, hogy "nem-diszjunkt Gs_α-egység". Alább bizonyítjuk, hogy $Eq G_\alpha$ eldönthető, míg ismert, hogy $Eq Gs_\alpha$ nem eldönthető. Tehát a Gs_α-egység definiciójában a lényegtelennek látszó diszjunktsági feltétel nagyon is lényeges. Megjegyezzük, hogy $G_\alpha \subseteq D_\alpha \subseteq NCA_\alpha$.

<u>10. TÉTEL</u> (i) EqG_α, $EqCrs_\alpha$ eldönthető minden $\alpha\leq\omega$-ra.

(ii) EqD_α eldönthető ha $\alpha<\omega$.

(iii) Legyen $\alpha<\omega$ és teljesítse $K\subseteq Crs_\alpha$ az alábbi feltételeket:

(a) K-egységek úniója K-egység, azaz
$(\forall V\in\mathcal{V})\,\mathfrak{Sb}V\in K \Rightarrow \mathfrak{Sb}(\bigcup\mathcal{V})\in K.$

(b) K-egység megszorítása K-egység, azaz
$\mathfrak{Sb}V\in K \Rightarrow \mathfrak{Sb}(V\cap{}^\alpha H)\in K.$

(c) K-egység "bázis-izomorf" képe is K-egység:
$\mathfrak{Sb}V\in K$ és $f : base(V) \twoheadrightarrow U \Rightarrow \mathfrak{Sb}\{f\circ s : s\in V\}\in K.$

(d) $\mathfrak{A}\in K \Rightarrow \mathfrak{Sb}1^{\mathfrak{A}}\in K.$

Akkor EqK eldönthető.

<u>Bizonyítás:</u> Az 5.T. bizonyításának néhány jelölését használjuk, pl. Tm, $Részt$, $ind(\tau)$. Először (iii)-t bizonyítjuk. Legyen $\alpha<\omega$ és teljesítse $K\subseteq Crs_\alpha$ a 10.T(iii)-ben szereplő (a)-(d) feltételeket. Elég eldöntő eljárást adni a $\{\tau\in Tm : K\models\tau=1\}$ halmazra, mert $[K\models\delta=\sigma \Leftrightarrow$

$K \models -(\delta \oplus \sigma)=1]$ ahol $\oplus$ a Boole szimmetrikus differenciát jelöli*/. Feltehetjük, hogy $K = \mathbf{S}K$ mert ha K teljesíti (a)-(d) -t, akkor $\mathbf{S}K$ is, és $EqK = Eq\mathbf{S}K$, továbbá feltehetjük azt is, hogy $\alpha \geqslant 2$ mert ha $\alpha \leqslant 1$ és $K=\mathbf{S}K$ akkor $K=Crs_\alpha=Gs_\alpha$ az (a)-(d) feltételek teljesülése miatt és $EqGs_\alpha$ eldönthető $\alpha \leqslant 1$-re, ld. [HMT]§4.2.

<u>10.1. DEFINICIÓ</u> (i) Legyen E egy Crs_α-egység. Akkor $\delta(E)$ az E-t tartalmazó legkisebb D_α-egységet jelöli. (Van ilyen, mert D_α-egységek metszete is D_α-egység.)

(ii) Legyen $\tau \in Tm$. Azt mondjuk, hogy (E,P) egy τ,K-<u>mozaik</u> U-n (vagy röviden csak mozaik), ha az alábbi (1)-(2) teljesül.

(1) E egy K-egység és $U=base(E)$,

(2) $P : Részt(\tau) \to Sb\,\delta(E)$ úgy, hogy

a) $P(d_{ij}) = D_{ij}^{[E]} = \{s \in E : s(i)=s(j)\}$, ha $d_{ij} \in Részt(\tau)$,

b) $P(\sigma \cdot \delta) = P(\sigma) \cap P(\delta) \cap E$ ha $\sigma \cdot \delta \in Részt(\tau)$

c) $P(-\sigma) = E \sim P(\sigma)$ ha $-\sigma \in Részt(\tau)$

d) $P(\sigma) \cap E \subseteq P(c_i \sigma) = C_i^{[\delta E]} P(c_i \sigma)$ ha $c_i \sigma \in Részt(\tau)$. ∎

<u>10.2. MEGJEGYZÉS</u> (i) Megmutatjuk, hogy a mozaik gyakorlatilag egy "levágott algebra-kiértékelés pár". Tfh. (E,P) mozaik és teljesíti az alábbi erősebb d') feltételt (alább e megjegyzés (i),(ii) pontjaiban az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy $\delta E=E$):

d') $P(c_i \sigma) = C_i^{[E]} P(\sigma)$ ha $c_i \sigma \in Részt(\tau)$.

Akkor könnyű látni, hogy $P(\sigma) = \sigma^{\mathfrak{S}b E}[X|P]$ minden $\sigma \in Részt(\tau)$-ra. Fordítva, ha $\mathfrak{A} \in K$ és $k : X \to A$ akkor $(1^{\mathfrak{A}}, \langle \sigma^{\mathfrak{A}}[k] : \sigma \in Részt(\tau) \rangle)$ mozaik, mely teljesíti az erősebb d') feltételt. Tehát az erősebb d') feltételt teljesítő mozaikok és az algebra-kiértékelés párok között egy-egyértelmű kapcsolat van. Ha (E,P) egy mozaik mely teljesíti az erősebb d') feltételt, akkor azt mondjuk, hogy (E,P) egy τ,K-algebra-kiértékelés-pár, vagy röviden τ,K-Akp. Legyen most (E,P) egy τ,K-Akp,

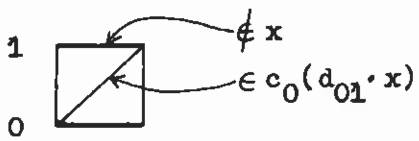
---

*/ Ebben a bizonyításban nem lényeges, hogy áttértünk a $\tau=1$ alakú azonosságokra, pusztán csak a kényelemért tesszük. Ha $\tau=\sigma$-t akarnánk közvetlenül eldönteni, akkor a későbbi definiciókban $Részt(\tau)$ helyett mindenütt $Részt(\tau) \cup Részt(\sigma)$ -t kéne írni, és "$(E,P) \models \tau=1 \iff P(\tau)\cap E=E$" helyett "$(E,P) \models \tau=\sigma \iff P(\tau)\cap E=P(\sigma)\cap E$" -t kéne használni.

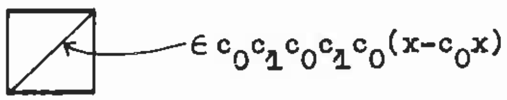
és $E' \subseteq E$ tetszőleges (D_α-egység). Akkor ellenőrizhető, hogy

$(E', \langle P(\sigma) \cap E' : \sigma \in Rész t(\tau)\rangle)$ egy τ,K-mozaik.

Idáig a szituáció analóg a $NAt_\alpha \curvearrowright pNAt_\alpha$ helyzettel. Azonban, míg $pNAt_\alpha$ teljes leírása $\{W \upharpoonright \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in NAt_\alpha\}$-nak (azaz minden $pNAt_\alpha$ megkapható NAt_α-ból levágással), addig nem minden mozaik kapható meg egy τ,K-Akp - ból "levágással", pl. a következő (E,P) mozaik nem kapható meg:



Itt $\alpha=2$, $E={}^2 2$, $\tau=c_0(d_{01} \cdot x)$ és $P=\{(x,0),(d_{01},D_{01}^{[2]}),(d_{01} \cdot x,0),(\tau,\{(0,1)\})\}$.
De vannak mozaikok, ahol a "turpisság" csak több lépésben derül ki, pl. a következőnél:



.

Ezért a jelen bizonyításban nem is a mozaikok, hanem a jó mozaikhalmazok fognak lényeges szerepet játszani: alább definiáljuk a teljes mozaikhalmaz fogalmát és arra már igaz lesz, hogy minden teljes mozaikhalmaz egy τ,K-Akp -ból származó összes "levágott" mozaik halmaza. Megjegyezzük, hogy az előző bizonyításbeli τ-fa is valamely algebra-kiértékelés pár egy része.

(ii) Ha (E,P) egy mozaik, akkor P csak annyiban tér el egy "igazi jelentésfüggvény" viselkedésétől, hogy lehetséges, hogy

$s \in P(c_i\sigma)$ és $(\forall u)s(i/u) \notin P(\sigma)$.

Ezt a "hiányosságot" (vagy "defektet") fogjuk majd lépésenként kijavítani (nevezetesen úgy, hogy E -hez hozzávesszünk egy s(i/u) új sorozatot, melyre deklaráljuk, hogy $P(\sigma)$ -beli, ld. alább a "$\mathcal{M}$-folytatható" definícióját). A mozaikoknak az az előnye az algebra-kiértékelés párokkal szemben, hogy "kicsik": míg mozaikok vannak $U \subseteq \alpha$-n, addig algebra-kiértékelés pár esetleg csak egy végtelen U halmazon van.

(iii) Arról, hogy (a Crs_α esetben) miért kell δE-n is "figyelni a kiértékelést", a 10.9.Mj.-ben írunk. ■

<u>10.3. DEFINICIÓ</u> Legyen (E,P) és (E',P') τ,K-mozaik rendre az U-n és U'-n.

(i) Legyen $W \subseteq U$. Akkor

$$W\upharpoonright(E,P) \overset{d}{=} (E \cap {}^{\alpha}W,\ \langle P(\sigma) \cap {}^{\alpha}W : \sigma \in \text{Részt}(\tau)\rangle).$$

Azt mondjuk, hogy (E',P') kiterjesztése (E,P) -nek, jelölésben $(E,P) \prec (E',P')$, ha $(E,P) = U\upharpoonright(E',P')$.

(ii) τ,K-mozaikok közötti izomorfia a természetes módon definiálható.: Azt mondjuk, hogy f izomorfizmus (E,P) és (E',P') között, jelben $f : (E,P) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (E',P')$, ha $f : U \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow U'$ és $E' = \{f \circ s : s \in E\}$, $P' = \langle\{f \circ s : s \in P(\sigma)\} : \sigma \in \text{Részt}(\tau)\rangle$. Ha $\mathcal{M}$ egy mozaikhalmaz, akkor $\mathbf{I}\mathcal{M}$ jelöli az $\mathcal{M}$ elemeivel izomorf mozaikok osztályát. ■

<u>10.4. DEFINICIÓ</u> Legyen $\mathcal{M}$ egy mozaikhalmaz és legyen (E,P) egy mozaik az U -n.

(i) (E,P) $\mathcal{M}$-szerű ha $(\forall s \in E)\ \text{Rng}s\upharpoonright(E,P) \in \mathbf{I}\mathcal{M}$.

(ii) (E,P) $\mathcal{M}$-folytatható ha minden $i \in \alpha$, $c_i\sigma \in \text{Részt}(\tau)$ és $s \in P(c_i\sigma) \cap E$ -hez van (E,P) -nek egy $\mathcal{M}$-szerű (E',P') kiterjesztése, melyben $(\exists u)\ s(i/u) \in P'(\sigma) \cap E'$.

(iii) $\mathcal{M}$ teljes ha minden eleme $\mathcal{M}$-folytatható.

(iv) $\mathcal{M} \models \tau \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall M \in \mathcal{M}) M \models \tau$, ahol $(E,P) \models \tau \overset{df}{\Longleftrightarrow} P(\tau) \supseteq E$.

(v) $\Pi(\tau,K)$ (vagy csak röviden Π) jelöli az olyan (E,P) τ,K-mozaikok halmazát, melyre $E \subseteq {}^{\alpha}\alpha$. ■

<u>10.5. RÉSZÁLLITÁS</u> $K \models \tau=1 \iff [\mathcal{M} \models \tau$ minden teljes $\mathcal{M} \subseteq \Pi(\tau,K)$ -ra$]$.

<u>10.6. RÉSZÁLLITÁS</u> Eldönthető, hogy " $\mathcal{M} \models \tau$ minden teljes $\mathcal{M} \subseteq \Pi$ -re" igaz-e.

A 10.5-6.RÁ. bizonyítása előtt egy lemmában összegyűjtjük a mozaikok alapvető tulajdonságait.

10.7. DEFINICIÓ

(i) Legyen $M = (E,P)$ és $M' = (E',P')$ mozaik rendre az U-n és U'-n. Azt mondjuk, hogy M és M' kompatibilis, ha $(U \cap U')\upharpoonright M = (U \cap U')\upharpoonright M'$.

(ii) Legyen $\mathcal{M}$ egy mozaikhalmaz. Akkor $\bigcup\mathcal{M} \stackrel{d}{=} (E,P)$, ahol $E \stackrel{d}{=} \bigcup\{E' : (E',P') \in \mathcal{M}\}$, és minden $\sigma \in \text{Részt}(\tau)$ -ra $P(\sigma) = \bigcup\{P'(\sigma) : (E',P') \in \mathcal{M}\}$. ∎

10.8. LEMMA Legyen (E,P) mozaik az U-n és legyen $\mathcal{M}$ mozaikhalmaz.

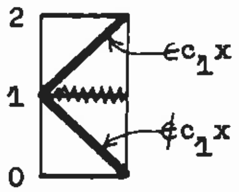
(i) Legyen $W \subseteq U$ és $f : U \twoheadrightarrow U'$, $E' \stackrel{d}{=} \{f \circ s : s \in E\}$, $P' = \langle\{f \circ s : s \in P(\sigma)\} : \sigma \in \text{Részt}(\tau)\rangle$. Akkor (E',P') és $W\upharpoonright(E,P)$ mozaik és mindkettő $\mathcal{M}$-szerű ill. $\mathcal{M}$-folytatható ha (E,P) az.

(ii) Legyen $\mathcal{P}$ páronként kompatibilis mozaikok halmaza. Akkor $\bigcup\mathcal{P}$ mozaik és $(E',P') \prec \bigcup\mathcal{P}$ minden $(E',P') \in \mathcal{P}$ -re. Továbbá, $\bigcup\mathcal{P}$ $\mathcal{M}$-szerű ha $\mathcal{P}$ minden eleme $\mathcal{M}$-szerű.

(iii) Ha $\mathcal{M}$ teljes, akkor $[(E,P)\ \mathcal{M}\text{-szerű} \Rightarrow (E,P)\ \mathcal{M}\text{-folytatható}]$.

Bizonyítás: Az (i) ellenőrzése rutinszámolás, nem írjuk le. A (ii) bizonyítása: Legyen $\bigcup\mathcal{P} = (E,P)$. Akkor E egy K-egység mert K-egységek uniója, és $\delta E = \bigcup\{\delta E' : (E',P') \in \mathcal{P}\}$ mert D_α-egységek uniója D_α-egység. Ezért $P : \text{Részt}(\tau) \to Sb\delta(E)$. Annak belátásához, hogy $\bigcup\mathcal{P}$ mozaik, először a (2)d) feltétel teljesülését mutatjuk meg. Legyen $i \in \alpha$ és $c_i\sigma \in \text{Részt}(\tau)$. Legyen $s \in P(\sigma) \cap E$. Akkor van $M' = (E',P') \in \mathcal{P}$ és $M'' = (E'',P'') \in \mathcal{P}$, hogy $s \in P'(\sigma)$ és $s \in E''$. Mivel $s \in P'(\sigma)$ azért $s \in \delta E'$ és így $s \in {}^\alpha\text{base}(E')$ mert $\text{base}(E') = \text{base}(\delta E')$. Mivel M' és M'' kompatibilis, ekkor $s \in E'$ mert $s \in E''$. Tehát $s \in P'(\sigma) \cap E' \subseteq P'(c_i\sigma) \subseteq P(c_i\sigma)$. Beláttuk, hogy $P(\sigma) \cap E \subseteq P(c_i\sigma)$. Azt kell még megmutatni, hogy $c_i^{[\delta E]}P(c_i\sigma) \subseteq P(c_i\sigma)$. Legyen $s \in c_i^{[\delta E]}P(c_i\sigma)$. Akkor $s \in \delta E'$ valamely $M' = (E',P') \in \mathcal{P}$ -re és $z \stackrel{d}{=} s(i/u) \in P''(c_i\sigma)$ valamely $M'' = (E'',P'') \in \mathcal{P}$ és és u esetén. Legyen $j \in \alpha \sim \{i\}$ (van ilyen mert $\alpha \geq 2$) és legyen $w \stackrel{d}{=} s(i/s_j)$. Akkor $w = z(i/z_j)$, tehát $w \in \delta E''$ és így $w \in P''(c_i\sigma)$ mert $z \in P''(c_i\sigma)$. Akkor viszont $w \in P'(c_i\sigma)$ mert $\text{Rng}\,w \subseteq \text{Rng}\,z \cap \text{Rng}\,s$ és M'' és M' kompatibilis. Így $s \in P'(c_i\sigma) \subseteq P(c_i\sigma)$ mivel $s \in \delta E'$. Beláttuk, hogy a (2)d) feltétel teljesül $\cup\mathcal{P}$-re. A (2) többi feltételét egyszerűbb le-ellenőrizni: $P(d_{ij}) = \cup\{P'(d_{ij}) : (E',P')\in\mathcal{P}\} = \cup\{D_{ij}^{[E']} : (E',P')\in\mathcal{P}\} = D_{ij}^{[E]}$. Legyen $s\in P(\sigma\cdot\delta)$. Akkor $(\exists(E',P')\in\mathcal{P})s\in P'(\sigma\cdot\delta) = P'(\sigma)\cap P'(\delta)\cap E' \subseteq P(\sigma)\cap P(\delta)\cap E$. Tfh. $s\in P(\sigma)\cap P(\delta)\cap E$. Akkor van $M' = (E',P')\in\mathcal{P}$, $M'' = (E'',P'')\in\mathcal{P}$ és $M''' = (E''',P''')\in\mathcal{P}$ hogy $s\in P'(\sigma)$, $s\in P''(\delta)$ és $s\in E'''$. Mivel M', M'' és M''' kompatibilis, ekkor $s\in E'$, $s\in P'(\delta)$, így $s\in P'(\sigma)\cap P'(\delta)\cap E' = P'(\sigma\cdot\delta)\subseteq P(\sigma\cdot\delta)$. Beláttuk, hogy $P(\sigma\cdot\delta) = P(\sigma)\cap P(\delta)\cap E$. Tfh. $s\in P(-\sigma)$, mondjuk $s\in P''(-\sigma)\subseteq E''$ valamely $M'' = (E'',P'')\in\mathcal{P}$-re. Legyen $M' = (E',P')\in\mathcal{P}$ tetszőleges. Ha $s\in\delta(E')$, akkor $s\in P'(-\sigma)$ mert M'' és M' kompatibilis, tehát $s\notin P'(\sigma)$. Ha $s\notin\delta(E')$, akkor nyilván $s\notin P'(\sigma)$. Tehát $s\notin\cup\{P'(\sigma) : (E',P')\in\mathcal{P}\} = P(\sigma)$. Tfh. $s\in E\sim P(\sigma)$. Akkor $s\in E'$ és $s\notin P'(\sigma)$ valamely $(E',P')\in\mathcal{P}$-re, tehát $s\in E'\sim P'(\sigma) = P'(-\sigma)\subseteq P(-\sigma)$. Beláttuk, hogy $P(-\sigma) = E\sim P(\sigma)$. Ezzel le-ellenőriztük, hogy $\cup\mathcal{P}$ mozaik. Legyen $M' = (E',P')\in\mathcal{P}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $M'\prec\cup\mathcal{P}$. Legyen $W = \text{base}(E')$ és $\sigma\in\text{Részt}(\tau)$. Akkor $E'\subseteq E\cap{}^{\alpha}W$ és $P'(\sigma)\subseteq P(\sigma)\cap{}^{\alpha}W$ a definicióból közvetlenül adódik. Legyen $s\in E\cap{}^{\alpha}W$. Akkor $s\in E''$ valamely $M'' = (E'',P'')\in\mathcal{P}$-re. Mivel M' és M'' kompatibilis, azért $s\in E''\Rightarrow s\in E'$. Tehát $E' = E\cap{}^{\alpha}W$. A $P'(\sigma) = P(\sigma)\cap{}^{\alpha}W$ bizonyítása ugyanígy megy: Legyen $s\in P(\sigma)\cap{}^{\alpha}W$. Akkor $s\in P''(\sigma)$ valamely $M'' = (E'',P'')\in\mathcal{P}$-re és ekkor $s\in P'(\sigma)$ mert M'' és M' kompatibilis. Beláttuk, hogy $M'\prec\cup\mathcal{P}$. Tfh. $\mathcal{P}$ minden eleme $\mathcal{M}$-szerű. Legyen $s\in E$. Akkor $s\in E'$ valamely $M' = (E',P')\in\mathcal{P}$-re. Ekkor $\text{Rngs}\upharpoonright\cup\mathcal{P} = \text{Rngs}\upharpoonright M'\in\mathbf{I}\mathcal{M}$ mert M' $\mathcal{M}$-szerű. Beláttuk 10.8.L(ii)-t. A 10.8.L(iii) bizonyítása: Tfh. $M=(E,P)$ $\mathcal{M}$-szerű. Legyen $i\in\alpha$, $c_i\sigma\in\text{Részt}(\tau)$, $s\in P(c_i\sigma)\cap E$ és $W \overset{d}{=} \text{Rngs}$. Akkor $W\upharpoonright M\in\mathbf{I}\mathcal{M}$ mert M $\mathcal{M}$-szerű, tehát 10.8(i) szerint $W\upharpoonright M$ $\mathcal{M}$-folytatható mert $\mathcal{M}$ teljes. Legyen $M' = (E',P')$ egy $\mathcal{M}$-szerű kiterjesztése $W\upharpoonright M$-nek úgy, hogy $(\exists u)s(i/u)\in P'(c_i\sigma)\cap E'$. A 10.8.L(i) szerint feltehetjük, hogy $\text{base}(E)\cap\text{base}(E') = W$. Akkor pedig M és M' kompatibilis, és így $M'' = M\cup M'$ mozaik és $M\prec M''$. Legyen $M'' = (E'',P'')$. Akkor nyilván $(\exists u)s(i/u)\in P''(c_i\sigma)\cap E''$. Továbbá, M'' $\mathcal{M}$-szerű mert M is és M' is az. Beláttuk, hogy M $\mathcal{M}$-folytatható. QED(10.8. Lemma)

10.9. MEGJEGYZÉS (i) A Crs_α esetben azért volt szükség arra, hogy a 10.1.D(ii) (2)d) feltételében a $P(c_i\sigma) = C_i^{[\delta E]}P(c_i\sigma)$-t és ne csak a $P(c_i\sigma) = C_i^{[E]}P(c_i\sigma)$-t követeljük meg, hogy mikor illeszteni akarjuk egymáshoz a mozaikokat, akkor az "ellentmondás" kiderüljön a metszetükön, ld. a 10.8.L(ii) bizonyítását. Ha pl. $\alpha=2$, $\tau=c_1x$, $E=\{(1,2)\}$, $P=\{(x,0),(c_1x,\{(1,2)\})\}$, $E'=\{(1,0)\}$, $P'=\{(x,0),(c_1x,0)\}$ (ld. az ábrát)



(E,P)

(E′,P′)

akkor csak számolás árán derül ki, hogy (E,P) és (E′,P′) nem illeszthető. A jelenlegi definíciónál ahhoz, hogy (E,P) mozaik legyen, az kell, hogy $P(c_1x)=\{(1,2),(1,1)\}$ és ekkor látható, hogy $(1,1)\in P(c_1x)$ de $(1,1)\notin P'(c_1x)$, tehát P és P′ "nem ért egyet" az (1,1) sorozatra nézve.

(ii) A jelen bizonyítás "kulcsa" a 10.8.L(ii). Eszerint a "folytathatóság" lokális tulajdonság, nevezetesen hogy egy M mozaikban egy s sorozat "kijavítható", az csak $Rngs\restriction M$ -től függ, a távolabbi környezet azt nem befolyásolja. (Emiatt esik szét egy modell mozaikhalmazzá, pontosabban emiatt lehet a modellt újból összerakni a belőle keletkezett mozaikhalmazból.) ∎

<u>A 10.6. Részállítás bizonyítása:</u> Könnyű ellenőrizni, hogy Π véges, és ha $(E,P)\in\Pi$ akkor E, δE, P és U is véges. Tehát, véges sok $\mathcal{M}\subseteq\Pi$ van. Mivel minden $(E,P)\in\Pi$ -ről eldönthető, hogy $P(\tau)\supseteq E$ vagy nem, azért elég azt belátni, hogy egy adott $\mathcal{M}\subseteq\Pi$ -ről eldönthető, hogy teljes-e. Ehhez azt kell tudni eldönteni egy adott $(E,P)\in\Pi$ -ről, hogy $\mathcal{M}$ -folytatható-e. Legyen (E,P) mozaik az U -n, $U\subseteq\alpha$. Legyen $i\in\alpha$, $c_i\sigma\in Részt(\tau)$ és $s\in P(c_i\sigma)\cap E$. Véges sok ilyen i,σ,s választás van. 10.8.L(i) szerint, ha van (E,P) -nek $\mathcal{M}$-szerű (E′,P′) kiterjesztése, melyre $(\exists u)s(i/u)\in P'(\sigma)\cap E'$, akkor olyan is van, melyre $U'\subseteq U\cup\{\alpha\}$. Tehát végignézhetjük az összes lehetséges (E′,U′) mozaikot $U\cup\{\alpha\}$ -n (véges sok ilyen van) és egyenként eldöntjük róluk, hogy a) $(\exists u)s(i/u)\in P'(\sigma)\cap E'$, b) $(E,P)\prec(E',P')$ és c) (E′,P′) $\mathcal{M}$-szerű. Mivel a), b), c) mindegyike eldönthető (hiszen az (E,P), (E′,P′) mozaikokban "minden véges"), ezért eldönthető, hogy (E,P) $\mathcal{M}$-folytatható-e. <u>QED</u>(10.6. Részállítás)

A 10.5. Részállítás bizonyítása: Az alapgondolat itt az, hogy a modellek helyettesíthetők teljes mozaikhalmazokkal: minden $\mathfrak{A}\in K$, $k : X \to A$ modell-kiértékelés párhoz az $\mathcal{M}(\mathfrak{A},k)$ mozaikhalmaz (mely az $\mathfrak{A},k$ "levágásaiból" áll) teljes, és ami még fontosabb, minden teljes $\mathcal{M}$ mozaikhalmazból "kirakható" egy $\mathfrak{A},k$ algebra-kiértékelés pár, melyre $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathfrak{A},k)$.

(I) "$K \not\models \tau=1 \Rightarrow (\exists\mathcal{M}\subseteq\Pi)[\mathcal{M}$ teljes és $\mathcal{M}\not\models\tau]$" bizonyítása: Legyen $\mathfrak{A}\in K$ és $k : X \to A$ olyan, hogy $\mathfrak{A} \not\models \tau=1[k]$. Legyen $U \stackrel{d}{=} base(\mathfrak{A})$. Minden $W\subseteq U$ -ra legyen

$$\mathfrak{A}(W) \stackrel{d}{=} (E(W),P(W)), \quad \text{ahol}$$

$$E(W) \stackrel{d}{=} 1^{\mathfrak{A}}\cap{}^{\alpha}W \quad \text{és} \quad \text{ha } \sigma\in \text{Részt}(\tau), \text{ akkor}$$

$$P(W)\sigma \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sigma^{\mathfrak{A}}[k]\cap{}^{\alpha}W & \text{ha } (\forall i)(\forall\eta)\ \sigma\neq c_i\eta \\ c_i^{[\delta E(W)]}(\sigma^{\mathfrak{A}}[k]\cap{}^{\alpha}W) & \text{ha } (\exists\eta)\ \sigma=c_i\eta \end{cases}.$$

Vegyük észre, hogy $P(W)\sigma\cap E(W) = \sigma^{\mathfrak{A}}[k]\cap{}^{\alpha}W$ minden $\sigma\in$ Részt(τ) -ra. Legyen $\mathcal{M} \stackrel{d}{=} \mathcal{M}(\mathfrak{A},k) \stackrel{d}{=} \{\mathfrak{A}(Rng s) : s\in E\}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{M}$ teljes mozaikhalmaz és $\mathcal{M}\not\models\tau$. Először azt látjuk be, hogy $\mathcal{M}$ mozaikhalmaz. Legyen $W\subseteq U$. Belátjuk, hogy $\mathfrak{A}(W)$ egy τ,K-mozaik. Könnyű ellenőrizni, hogy $E(W)$ egy K-egység (mert K teljesíti a (b),(d) feltételeket). Nyilvánvalóan, $P(W)$: Részt$(\tau) \to Sb\delta E(W)$, és $P(W)$ teljesíti a 10.1. D(ii) -beli (2)a)-d) feltételeket a $P(W)$ definiciója miatt. Tehát $\mathfrak{A}(W)$ egy τ,K-mozaik a W -n. Következőképp belátjuk, hogy $\mathcal{M}$ teljes. Legyen $W\subseteq U$. Akkor nyilvánvalóan $\mathfrak{A}(W)\prec\mathfrak{A}(U)$ és $\mathfrak{A}(U)$ $\mathcal{M}$-szerű. Továbbá, ha $i\in\alpha$, $c_i\sigma\in$ Részt(τ) és $s\in P(W)(c_i\sigma)\cap E(W)$, akkor $(\exists u\in U)s(i/u)\in P(U)(\sigma)\cap E(U)$. Tehát $\mathfrak{A}(W)$ $\mathcal{M}$-folytatható és így teljes. Végül belátjuk, hogy $\mathcal{M}\not\models\tau$. Mivel $\mathfrak{A}\not\models\tau=1[k]$, azért $\tau^{\mathfrak{A}}[k]\neq 1^{\mathfrak{A}}$. Legyen $s\in 1^{\mathfrak{A}}\sim\tau^{\mathfrak{A}}[k]$ és $W \stackrel{d}{=} Rng s$. Akkor $s\in E(W)\sim P(W)(\tau)$, tehát $P(W)(\tau)\not\supseteq E(W)$, és így $\mathcal{M}\not\models\tau$. Legyen $\mathcal{M}' \stackrel{d}{=} \Pi\cap I\mathcal{M}$. Akkor könnyű ellenőrizni, hogy $\mathcal{M}'$ teljes és $\mathcal{M}'\not\models\tau$. QED(I)

(II) "$\mathcal{M}\subseteq\Pi$ teljes és $\mathcal{M}\not\models\pi \Longrightarrow K\not\models\tau=1$" bizonyítása: Legyen $\mathcal{M}\subseteq\Pi$ teljes és tfh. $\mathcal{M}\not\models\tau$. A gondolatmenet a következő: Legyen $M_0 \in\mathcal{M}$ olyan, hogy $M_0\not\models\tau$. Most M_0 -ból kiindulva és használva 10.8.L (iii)-at, lépésenként megszerkesztünk egy $M_0\prec M = (E,P)$ mozaikot, melyre igaz már, hogy

$$P(c_i\sigma) \cap E = c_i^{[E]}(P(\sigma) \cap E), \quad \text{minden} \quad c_i\sigma \in \text{Részt}(\tau) \text{ -ra}$$

(itt csak arra kell ügyelni, hogy minden "defektre" rálépjünk egyszer). Ekkor ha $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}\mathfrak{b}E$ és $k(x) = P(x) \cap E$ minden $x \in X$ -re, akkor könnyű látni, hogy $\sigma^{\mathfrak{A}}[k] = P(\sigma) \cap E$ minden $\sigma \in \text{Részt}(\tau)$ -ra. Tehát $\mathfrak{A} \not\models \tau = 1[k]$ mert $M_0 < M$. Továbbá $\mathfrak{A} \in K$ mert M egy τ, K-mozaik.

Noha a fenti gondolatmenetből maradéktalanul (és szinte mehanikusan) rekonstruálható a részletes bizonyítás, a teljesség kedvéért vázoljuk azt is. Ha $M=(E,P)$ egy mozaik, akkor $D(M)$ jelöli az M "defektjeinek" halmazát, azaz

$$D(M) \stackrel{d}{=} \{(s,i,\sigma) : s \in (P(c_i\sigma) \cap E) \sim c_i^{[E]}(P(\sigma) \cap E), \quad i \in \alpha, \quad c_i\sigma \in \text{Részt}(\tau)\}.$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy

(1) $[M=(E,P) < M', \quad s \in E \quad \text{és} \quad (s,i,\sigma) \notin D(M)] \Rightarrow (s,i,\sigma) \notin D(M')$.

Következőképp megmutatjuk, hogy

(2) Minden $\mathcal{M}$-szerű mozaik kiterjeszthető egy $\mathcal{M}$-szerű M' mozaikká úgy, hogy $D(M) \cap D(M') = 0$.

Valóban, legyen $\beta \stackrel{d}{=} |D(M)|$ és legyen $f : \beta \twoheadrightarrow D(M)$ a $D(M)$ egy felsorolása. Definiáljuk rekurzióval a következő mozaiksorozatot: $M_0 \stackrel{d}{=} M$. Legyen $\gamma < \beta$ és tfh. minden $\eta < \gamma$ -ra M_η már definiálva van, úgy hogy

(*) minden $\delta < \eta$ -ra $M_\delta < M_\eta$ és M_η $\mathcal{M}$-szerű.

Legyen $M'_\gamma = \bigcup\{M_\eta : \eta < \gamma\}$. Akkor a 10.8.L(ii) szerint M'_γ $\mathcal{M}$-szerű mozaik, így 10.8.L(iii) szerint M'_γ $\mathcal{M}$-folytatható. Ezért van egy M_γ $\mathcal{M}$-szerű kiterjesztése M'_γ -nak úgy, hogy $f_\gamma \notin D(M_\gamma)$. Belátható, hogy (*) teljesül M_γ -ra. Legyen $M' \stackrel{d}{=} \bigcup\{M_\gamma : \gamma < \beta\}$. Akkor könnyen ellenőrizhető, hogy M' rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. QED(2)

Most definiáljuk $\mathcal{M}$-szerű mozaikok egy ω-hosszú sorozatát: Legyen $M_0 \in \mathcal{M}$ olyan, hogy $M_0 \not\models \tau$. Tfh. M_n már definiálva van úgy, hogy M_n $\mathcal{M}$-szerű és $(\forall m<n) M_m < M_n$. Akkor legyen M_{n+1} egy $\mathcal{M}$-szerű kiterjesztése az M_n -nek úgy, hogy $D(M_n) \cap D(M_{n+1}) = 0$. (Ilyen van (2) szerint.)

Legyen $M \stackrel{d}{=} \bigcup\{M_n : n\in\omega\} = (E,P)$. Akkor nyilvánvalóan $M_0 \prec M$ és alább belátjuk, hogy

(**) $c_i^{[E]}(P(\sigma)\cap E) = P(c_i\sigma)\cap E$ minden $c_i\sigma \in$ Részt(τ) -ra.

Először belátjuk, hogy $P(c_i\sigma)\cap E \subseteq c_i^{[E]}(P(\sigma)\cap E)$. Ez ekvivalens azzal, hogy $D(M)=0$. Legyen $s\in E$. Akkor $(\exists n\in\omega)s\in E_n$. Ekkor a szerkesztés és miatt $(s,i,\sigma)\notin D(M_{n+1})$, így $(s,i,\sigma)\notin D(M)$ az (1) és $M_{n+1}\prec M$ miatt. Beláttuk, hogy $D(M)=0$. Már csak azt kell belátni, hogy $c_i^{[E]}(P(\sigma)\cap E) \subseteq P(c_i\sigma)$. Ez abból következik, hogy M egy mozaik mivel a (2)d) feltétel szerint $P(\sigma)\cap E \subseteq P(c_i\sigma) = c_i^{[\delta E]}P(c_i\sigma)$. QED(II)
QED(10.5. Részállítás)

Megjegyezzük, hogy a fenti szerkesztésben törekedhettünk volna arra, hogy $\mathcal{M}$ minden eleme felhasználásra kerüljön, ekkor egy olyan $\mathfrak{A},k$ modell-kiértékelés párt kaptunk volna, melyre (apró nüanszoktól eltekintve) $\mathbf{I}\,\mathcal{M}(\mathfrak{A},k) = \mathbf{I}\,\mathcal{M}$.

A 10.5-6 Részállításokból a 10.T(iii) közvetlenül következik. Mivel könnyen látható, hogy a Crs_α, D_α, G_α osztályok teljesítik a 10.T(iii) (a)-(d) feltételeit, eddig beláttuk azt is, hogy $EqCrs_\alpha$, EqD_α, EqG_α eldönthető ha $\alpha<\omega$. Annak bizonyítása maradt hátra, hogy $EqCrs_\alpha$, EqG_α eldönthető az $\alpha \geq \omega$ esetben is.

Az előző bizonyításhoz hasonlóan, az $\alpha\geq\omega$ esetet az $\alpha<\omega$ esetre vezetjük vissza (ld. 5.14.L. az előző bizonyításban). Ugyanakkor azt is megmutatjuk, hogy ugyanez a fajta visszavezetés nem működik D_α-ra. Legyen X egy végtelen (változójel) halmaz. A továbbiakban $Tm_X(cil_\alpha)$ helyett csak $Tm(cil_\alpha)$ -t írunk.

10.10. LEMMA*/ Legyen $\gamma\subset\alpha$, $2\leq|\gamma|<\omega$ és $\tau\in Tm(cil_\gamma)$.

(i) $\mathbf{Rd}_\gamma \mathbf{I}Crs_\alpha = \mathbf{I}Crs_\gamma$ és
$Crs_\alpha \models \tau=1 \iff Crs_\gamma \models \tau=1$.

(ii) $\mathbf{HSPRd}_\gamma G_\alpha \subset \mathbf{I}G_\gamma$, de
$G_\alpha \models \tau=1 \iff G_\gamma \models \tau=1$, ha $ind(\tau)\subset\gamma$.

*/ A 10.10.L(i)-t [N78] Prop.8(ii) -ben publikáltuk és a bizonyítást idézik a [HMT] monográfiában is, ld. [HMT] 5.5.15.

(iii) $\mathbf{HSPRd}_\gamma D_\alpha \subset \mathbf{I}D_\gamma$, és minden $n \leq |\gamma|-2$ -höz van $\sigma \in Tm(cil_\gamma)$, hogy $D_\alpha \models \sigma=1 \not\Rightarrow D_\gamma \models \sigma=1$ és $|\gamma\sim ind(\sigma)| \geq n$.
Továbbá $D_\alpha \models \delta=1 \not\Rightarrow G_\gamma \models \delta=1$ valamely $\delta \in Tm(cil_\gamma)$-ra.

Megjegyezzük, hogy a (iii) utolsó állítása mutatja, hogy (ii)-ben az "$ind(\tau) \subset \gamma$" feltétel nem hagyható el.

Bizonyítás:

(I) $\mathbf{Rd}_\gamma Crs_\alpha \subseteq \mathbf{I}Crs_\gamma$, $\mathbf{Rd}_\gamma D_\alpha \subseteq \mathbf{I}D_\gamma$, $\mathbf{Rd}_\gamma G_\alpha \subseteq \mathbf{I}G_\gamma$ és $Crs_\gamma \subseteq \mathbf{IRd}_\gamma Crs_\alpha$ bizonyítása: A feltételek közül itt csak a $\gamma \subseteq \alpha$-t fogjuk használni. Legyen $\mathfrak{A} \in Crs_\alpha$, $V \overset{d}{=} 1^{\mathfrak{A}}$ és $U \overset{d}{=} base(\mathfrak{A})$. Definiáljuk az rd_γ "redduktum-függvényt": Legyen $f \in V$, akkor

$rb_\gamma(f) \overset{d}{=} \langle (f_i, f') : i \in \gamma \rangle$, ahol $f' \overset{d}{=} (\alpha\sim\gamma)\restriction f$, és ha $X \subseteq V$ akkor
$rd_\gamma(X) \overset{d}{=} rb_\gamma{}^{*}X = \{rb_\gamma(f) : f \in X\}$.

Nem nehéz indukcióval belátni, hogy

(*) rd_γ izomorfizmus $\mathfrak{Rd}_\gamma \mathfrak{Sb} V$ és $\mathfrak{Sb}\, rd_\gamma V$ között.

(A bizonyítás le van írva [HMTAN]4.7.1.2(p.191)-ben és [HMT]3.1.125 -ben. Megjegyezzük, hogy az $rb_\gamma(f)$ gyakorlatilag $\gamma\restriction f$, azért kell a $\gamma\restriction f$ sorozat tagjait "megszinezni" f' -vel, hogy az rd_γ függvény egy-egyértelmű legyen és homomorfizmus a $\sim$-ra.) Mivel $\mathfrak{Rd}_\gamma \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Rd}_\gamma \mathfrak{Sb} V$ (az $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Sb} V$ miatt) és $rd_\gamma V$ egy Crs_γ-egység, (*) -ból következik $\mathbf{Rd}_\gamma Crs_\alpha \subseteq \mathbf{I}Crs_\gamma$. A másik két hasonló állításhoz csak azt kell ellenőrizni, hogy $rd_\gamma V$ egy D_γ ill. G_γ-egység, ha V egy D_α ill. G_α-egység. Ennek leellenőrzése egyszerű, a számolást itt nem írjuk le.

Legyen $\mathfrak{A} \in Crs_\gamma$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{A} \in \mathbf{IRd}_\gamma Crs_\alpha$. Legyen $V = 1^{\mathfrak{A}}$, $u \notin base(\mathfrak{A})$, $q \overset{d}{=} \langle u : i \in \alpha\sim\gamma \rangle$ és minden $x \in A$ -ra $f(x) \overset{d}{=} \{s \cup q : s \in x\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy $f : \mathfrak{A} \rightarrowtail \mathfrak{Rd}_\gamma \mathfrak{Sb} fV$ homomorfizmus és $f^{*}A$ zárt az $\mathfrak{Sb}\, fV$ műveleteire nézve. Tehát $\mathfrak{A} \in \mathbf{IRd}_\gamma Crs_\alpha$. Ezzel beláttuk azt is, hogy $\mathbf{I}Crs_\gamma = \mathbf{Rd}_\gamma \mathbf{I}Crs_\alpha$.

(II) "$G_\alpha \models \tau=1 \Leftrightarrow G_\gamma \models \tau=1$ ha $ind(\tau) \subset \gamma$" bizonyítása: $G_\gamma \models \tau=1 \Rightarrow G_\alpha \models \tau=1$ teljesül minden $\tau \in Tm(cil_\gamma)$-ra, mert $G_\alpha \not\models \tau=1 \Rightarrow \mathbf{Rd}_\gamma G_\alpha \not\models \tau=1 \Rightarrow G_\gamma \not\models \tau=1$ mert $\mathbf{Rd}_\gamma G_\alpha \subseteq \mathbf{I}G_\gamma$. Tehát csak azt kell bizonyítani, hogy

$G_\gamma \nvDash \tau=1 \Rightarrow G_\alpha \nvDash \tau=1$ ha $ind(\tau) \subset \gamma$. Ehhez elég $G_\gamma \nvDash \tau=0 \Rightarrow G_\alpha \nvDash \tau=0$ -t bizonyítani minden $ind(\tau)\subset\gamma$ -ra. Tfh. $ind(\tau) \overset{d}{=} H \subset \gamma$ és $G_\gamma \nvDash \tau=0$, mondjuk $\mathfrak{A} \nvDash \tau=0[k]$ valamely $\mathfrak{A}\in G_\gamma$ és $k : X \to A$ -ra. Legyen $p \in \tau^{\mathfrak{A}}[k]$, $U = base(\mathfrak{A})$, $q \overset{d}{=} (\gamma\sim H)\upharpoonright p$ és legyen $r \in {}^{(\alpha\sim H)}Rngq$ tetszőleges. (Ilyen r van mert $\gamma\sim H\neq 0$.) Legyen $V \overset{d}{=} \{s\in {}^H U : s\cup q \in 1^{\mathfrak{A}}\}$ és $W \overset{d}{=} \bigcup\{{}^{\alpha}Rng(s\cup q) : s\in V\}$. Nyilván, W egy G_α-egység. Belátjuk, hogy

(*) $V = \{s\in {}^H U : s\cup r \in W\}$.

Valóban, legyen $s\in {}^H U$. Tfh. $s\cup r\in W$. Akkor $Rng(s\cup r)\subseteq Rng(z\cup q)$ valamely $z\in V$ -re, a W definiciója miatt. Akkor $z\cup q\in 1^{\mathfrak{A}}$ a V definiciója miatt és $Rng(s\cup q)\subseteq Rng(z\cup q)$. Tehát $s\cup q\in 1^{\mathfrak{A}}$ mert $1^{\mathfrak{A}}$ G_γ-egység, tehát $s\in V$. Fordítva, tfh. $s\in V$. Akkor $Rng(s\cup r) \subseteq Rng(s\cup q)$ miatt $s\cup r\in W$. QED(*)

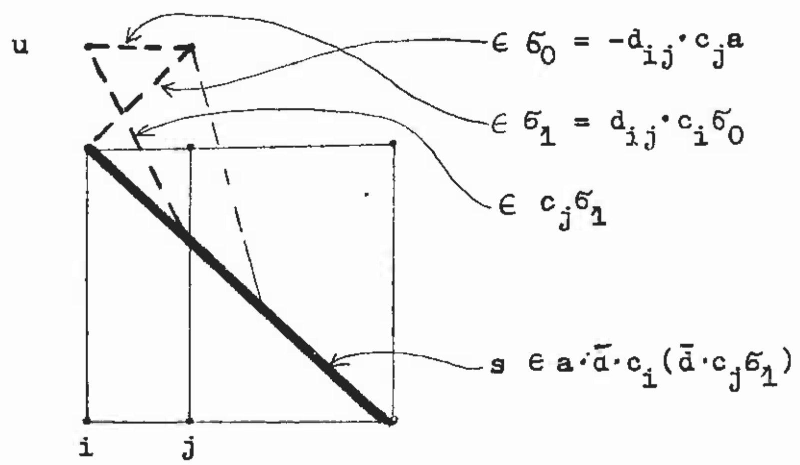
Legyen $\mathfrak{L} \overset{d}{=} \mathfrak{Sb}\,V$ és $\mathfrak{B} \overset{d}{=} \mathfrak{Sb}\,W$. Definiáljuk

$f \overset{d}{=} \langle \{s\in {}^H U : s\cup q\in a\} : a\in A\rangle$ és

$g \overset{d}{=} \langle \{s\in {}^H U : s\cup r\in b\} : b\in B\rangle$.

Akkor $f(1^{\mathfrak{A}})=V$ definició szerint, és $g(W)=V$, sőt $Rngg=SbV$ a (*) szerint. Nem nehéz leellenőrizni, hogy $f : \mathfrak{Rd}_H\mathfrak{A} \to \mathfrak{L}$ és $g : \mathfrak{Rd}_H\mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{L}$ homomorfizmus (a bizonyítás megtalálható pl. [HMT]3.1.117 -ben) és ugyanakkor $f(\tau^{\mathfrak{A}}[k])\neq 0$. Legyen $k'(x) \overset{d}{=} fk(x)$ és legyen $k''(x)\in B$ olyan, hogy $gk''(x) = k'(x)$ minden $x\in X$ -re. Akkor $\tau^{\mathfrak{L}}[k'] = f(\tau^{\mathfrak{A}}[k]) = g(\tau^{\mathfrak{B}}[k''])$, tehát $\tau^{\mathfrak{B}}[k'']\neq 0$. Mivel $\mathfrak{B}\in G_\alpha$, ez bizonyítja, hogy $G_\alpha \nvDash \tau=0$. QED(II)

A fenti bizonyítás lényeges része a (*) állítás. Egy példán illusztráljuk, hogy (*) nem igaz (a megfelelő módosításokkal) a D_α osztályokra: Legyen $H\subset n\in\alpha=\omega$, $p \overset{d}{=} n\upharpoonright Id$, $1^{\mathfrak{A}} = \{p\}\cup\bigcup\{D_{ij}^{[n\omega]} : i<j<n\}$ és legyen $r\in {}^{(\alpha\sim H)}\omega$ tetszőleges. Akkor $1^{\mathfrak{A}}$ egy D_n-egység és p az egyetlen ismétlésmentes sorozat $1^{\mathfrak{A}}$ -ban. Legyen $q = (n\sim H)\upharpoonright p$, $V \overset{d}{=} \{s\in {}^H\omega : s\cup q\in 1^{\mathfrak{A}}\}$ és legyen W az $\{s\cup r : s\in V\}$-t tartalmazó legkisebb D_α-egység. Akkor $V \neq \{s\in {}^H\omega : s\cup r\in W\}$. Ez azért igaz, mert van $z\in {}^H\omega$ ismétlésmentes sorozat úgy, hogy $z\neq H\upharpoonright Id$ és $z\cup r\in W$ (ekkor $z\notin V$): ha


u
$\in \sigma_0 = -d_{ij} \cdot c_j a$
$\in \sigma_1 = d_{ij} \cdot c_i \sigma_0$
$\in c_j \sigma_1$
$s \in a \cdot \bar{d} \cdot c_i (\bar{d} \cdot c_j \sigma_1)$
i
j

3. ÁBRA

r ismétléses, akkor azért mert az ismétlés biztosít egy "segédrekeszt", aminek segítségével az összes $z \cup r$, $z \in {}^H H$ sorozat előállítható $(H \restriction Id) \cup r$ -ből (ld. a (IV) -beli $(*^3)$ bizonyítását később), ha meg r nem ismétléses, akkor Rngr végtelen és azért.

(III) $\mathfrak{G}_\gamma \notin \mathbf{HSPRd}_\gamma \mathfrak{G}_\alpha$, $\mathfrak{D}_\gamma \notin \mathbf{HSPRd}_\gamma \mathfrak{D}_\alpha$ és $(\exists \delta \in Tm(cil_\gamma))[\mathfrak{D}_\alpha \models \delta=1,\ \mathfrak{G}_\gamma \not\models \delta=1]$

bizonyítása: Elég az utolsó állítást bizonyítani, mert abból következik az első kettő: Legyen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}_\gamma \subseteq \mathfrak{D}_\gamma$ olyan, hogy $\mathfrak{A} \not\models \delta=1$. Akkor $\mathfrak{A} \notin \mathbf{HSPRd}_\gamma \mathfrak{D}_\alpha \supseteq \mathbf{HSPRd}_\gamma \mathfrak{G}_\alpha$ mert $\mathfrak{D}_\alpha \models \delta=1$.

Az egyszerűség kedvéért tfh. $\gamma=n \in \omega$. Legyen $\bar{d} \stackrel{d}{=} \prod\{-d_{ij} : i<j<n\}$ és minden $i,j \in n$ -re legyen

$$\delta_{ij}(x) \stackrel{d}{=} x \cdot \bar{d} - c_i(\bar{d} \cdot c_j(d_{ij} \cdot c_i(-d_{ij} \cdot c_j(x)))).$$

Legyen $y_0, y_1, \dots, y_n \in X$ n+1 db. különböző változójel és minden $i \leq n$ -re legyen

$$\tau_i \stackrel{d}{=} y_i \cdot \prod\{-y_j : j \in (n+1) \sim \{i\}\}. \quad \text{Legyen}$$

$$\delta \stackrel{d}{=} \delta_{01}(\tau_n) \cdot \prod\{c_i \delta_{if(i)}(\tau_i) : i \in n\},$$

ahol $f(i) \stackrel{d}{=} i+1 (\mathrm{mod}\, n)$ ha $i \in n$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{G}_n \not\models \delta=0$ míg $\mathfrak{D}_\alpha \models \delta=0$ ha $n \subset \alpha$. Először azt mutatjuk meg, hogy $\mathfrak{D}_\alpha \models \delta=0$. Legyen $i,j \in \alpha$, $i \neq j$, $\mathfrak{A} \in Crs_\alpha$, $a \in A$ és $s \in 1^{\mathfrak{A}}$. Akkor a következőt nem nehéz leellenőrizni (ld. a 3. Ábrát a túloldalon):

(*) Ha $s \in \delta^{\mathfrak{A}}_{ij}(a)$ akkor nincs $u \in base(\mathfrak{A}) \sim Rng(n \restriction s)$, melyre $\{s(i/u), s(j/u), s(i/u)(j/u)\} \subseteq 1^{\mathfrak{A}}$.

Legyen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_\alpha$ és $k : X \to A$. Legyen $a_i \stackrel{d}{=} \tau_i^{\mathfrak{A}}[k]$. Akkor $\{a_i : i \leq n\}$ páronként diszjunkt elemekből áll. Tfh. $s \in \delta_{01}(a_n) \cdot \prod\{c_i \delta_{ifi}(a_i) : i \in n\}$. Legyen $k \in \alpha \sim n$, $u \stackrel{d}{=} s(k)$. Tfh. $u \notin Rng(n \restriction s)$. Akkor $s(0/u)$, $s(1/u)$, $s(0/u)(1/u) \in 1^{\mathfrak{A}}$ mert $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_\alpha$, a (*) szerint ez ellentmond $s \in \delta_{01}(a_n)$ -nek. Akkor van $i \in n$, hogy $u=s(i)$. Ha $j \in n \sim \{i\}$, akkor $u \neq s_j$ mert $n \restriction s$ ismétlésmentes az $s \in \delta_{01}(a_n)$ miatt. Akkor $s \in c_i \delta_{ifi}(a_i)$ miatt van w, melyre $z \stackrel{d}{=} s(i/w) \in \delta_{ifi}(a_i)$. Most $w \neq u$ mert $s=s(i/u) \in a_n$, $s(i/w) \in a_i$ és $a_n \cap a_i = 0$. Ekkor $u \notin Rng(n \restriction z)$ és ez ugyanúgy mint az előbb, ellentmond $z \in \delta_{ifi}(a_i)$ -nek a (*) alapján. Beláttuk, hogy $\mathfrak{D}_\alpha \models \delta=0$.

Most szerkesztünk egy $\mathfrak{A}\in G_n$ -et, melyre $\mathfrak{A}\nvDash\delta=0$. Minden $i\in n$ -re legyen $u_i = n+i$ és legyen

$$V = {}^n n\cup\bigcup\{{}^n([n\cup\{u_i\}]\sim\{i\}) : i\in n\},\quad \mathfrak{A}\overset{d}{=}\mathfrak{Sb}\,V,\quad s\overset{d}{=}n\upharpoonright Id,$$

$$a_n\overset{d}{=}\{s\},\quad a_i\overset{d}{=}\{s(i/u_i)\}\ \text{ha } i\in n \text{ és } k(y_i)\overset{d}{=}a_i \text{ ha } i\leq n.$$

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{A}\nvDash\delta=0[k]$, nevezetesen $s\in\delta^{\mathfrak{A}}[k]$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\tau_i^{\mathfrak{A}}[k]=a_i$ minden $i\leq n$ -re. Tehát elég azt megmutatni, hogy

$$s\in\delta_{01}(a_n)\quad\text{és}\quad s(i/u_i)\in\delta_{ifi}(a_i)\ \text{ minden } i\in n \text{ -re.}$$

Vegyük észre, hogy

(**) $(\forall i\in n)(\forall z\in 1^{\mathfrak{A}})\{i,n_i\}\nsubseteq Rng z$.

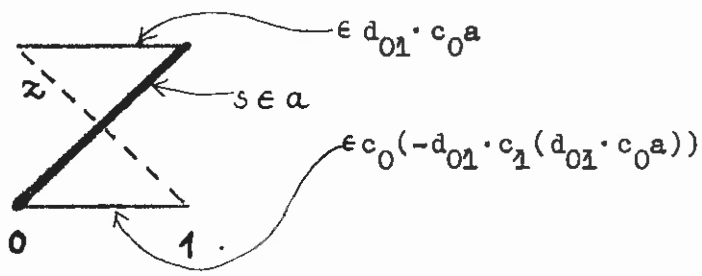
Nyilván, $s\in a_n\cdot\bar{d}$ és $s(i/u_i)\in a_i\cdot\bar{d}$. Tfh. $s\in c_0(\bar{d}\cdot c_1(d_{01}\cdot c_0(-d_{01}\cdot c_1 a_n)))$. Akkor van v és w, hogy $s_v^0\in\bar{d}$, $v\neq w$ és $s_{wv}^{01}\in c_1 a_n$. Mivel $s_v^0\in\bar{d}$, azért (**) szerint $v\in\{0,u_0\}$, és $s_{wv}^{01}\in c_1 a_n=c_1\{s\}$ miatt $w=0$, ezért $v=u_0$ mert $w\neq v$, ekkor viszont $s_{wv}^{01}\in 1^{\mathfrak{A}}$ ellentmond (**)-nak. Beláttuk, hogy $s\in\delta_{01}(a_n)$. A $z=s(i/u_i)\in\delta_{ij}(a_i)$ ahol $j=fi$ bizonyítása teljesen hasonlóan történik: Tfh. $z\in c_i(\bar{d}\cdot c_j(d_{ij}\cdot c_i(-d_{ij}\cdot c_j a_i)))$. Akkor $z_v^i\in\bar{d}$, $v\neq w$ és $z_{wu}^{ij}\in c_j a_i$ valamely v,w -re. A $z_v^i\in\bar{d}$ miatt $v\in\{i,u_i\}$, a $z_{wu}^{ij}=c_j a_i$ miatt $w=u_i$, ekkor $v=i$, és ekkor $z_{wv}^{ij}\in 1^{\mathfrak{A}}$ ellentmond (**)-nak. QED(III) (III)-ból és IG_γ, ID_γ varietás voltából (144.old) következik 10.10.L(ii),(iii) első állítása.

<u>(IV) "$D_\alpha\models\sigma=0$ és $D_\gamma\nvDash\sigma=0$ valamely $\sigma\in Tm(cil_2)$-re" bizonyítása:</u>

Legyen $\tau(x)\overset{d}{=}x-d_{01}\cdot c_1(d_{01}-c_0(-d_{01}\cdot c_1(d_{01}\cdot c_0 x)))$. Belátjuk, hogy

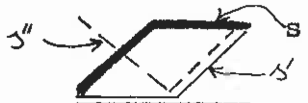
($*^3$) Ha $\mathfrak{A}\in D_\alpha$, $a\in A$ és $s\in\tau^{\mathfrak{A}}(a)$, akkor $s(0/s_1)(1/s_0)\notin 1^{\mathfrak{A}}$ és s ismétlésmentes.

Először belátjuk, hogy ha s ismétléses, akkor minden $i,j\in\alpha$-ra $s(i/s_j)(j/s_i)\in 1^{\mathfrak{A}}$. Tfh. $s(n)=s(k)$, $n\neq k$. Ha $\{i,j\}=\{n,k\}$, akkor ké-

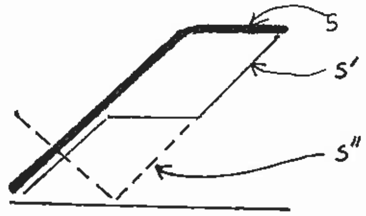


4. ÁBRA

szen vagyunk. Tf. először, hogy $n\in\{i,j\}$, mondjuk $n=j$ és $k\notin\{i,j\}$.



Legyen $s' \stackrel{d}{=} s(j/s_i)$ és $s'' \stackrel{d}{=} s'(i/s'_k)$. Akkor $s', s''\in 1^{\mathfrak{A}}$ mert $\mathfrak{A}\in D_\alpha$ és látható, hogy $s''= s(i/s_j)(j/s_i)$. Tegyük fel most, hogy $\{i,j\}\cap\{k,n\}=0$.



Legyen $s' \stackrel{d}{=} s(k/s_j)$, $s'' \stackrel{d}{=} s'(i/s'(j))(j/s'(i))$ és $z \stackrel{d}{=} s''(k/s''(n))$. Akkor $s', s'', z\in 1^{\mathfrak{A}}$ (használva az előző eset bizonyítását is) és $z = s(i/s_j)(j/s_i)$. Beláttuk, hogy egy D_α-egységben minden ismétléses sorozat összes transzponáltja is bennevan.

Tehát elég belátni, hogy ha $s\in\tau^{\mathfrak{A}}(a)$, akkor $s(0/s_1)(1/s_0)\notin 1^{\mathfrak{A}}$ (mert ekkor s csak ismétlésmentes lehet az előzőek miatt). Legyen $s\in -d_{01}\cdot a$ és tfh. $z = s(0/s_1)(1/s_0)\in 1^{\mathfrak{A}}$. A szemben lévő 4. Ábra alapján látható, hogy ekkor $s\notin\tau^{\mathfrak{A}}(a)$. Ezzel beláttuk $(*^3)$ -at.

A bizonyítás hátralevő részében, az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\gamma \stackrel{d}{=} n\in\omega$. Legyen $y_0,\dots,y_{n-2}\in X$ $n-1$ db. különböző változójel. Legyen

$$\tau_i \stackrel{d}{=} y_i \quad \text{ha} \quad i\in n-1$$

$$\tau_{n-1} \stackrel{d}{=} \prod\{-y_i : i\in n-1\}\cdot c_1 y_1 \ ,$$

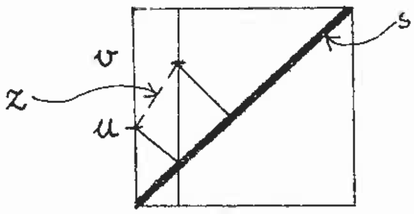
$$\delta \stackrel{d}{=} \tau(y_1)-c_0c_1(-d_{01}\cdot \sum\{c_0\tau_i\cdot c_1(d_{01}\cdot c_0\tau_i) : i\in n\})\cdot y_1 \ .$$

Megmutatjuk, hogy $D_\alpha \models \delta=0$ ha $n\subset\alpha$ és $D_n \not\models \delta=0$. Legyen $\mathfrak{A}\in D_\alpha$, $k : X\to A$ és tfh. $s\in\delta^{\mathfrak{A}}[k]$. Akkor $(*^3)$ szerint s ismétlésmentes és így $|Rngs|>n$. Minden $i\in n$ -re legyen

$$a_i \overset{d}{=} \tau_i^{\mathfrak{A}}[k] \quad \text{és}$$

$$H_i \overset{d}{=} \{u\in Rngs : s(1/u)\in a_i\}.$$

Akkor $\bigcup\{H_i : i\in n\} = Rngs$ és $|Rngs|>n$ miatt van $i\in n$, melyre $|H_i| \geq 2$. Legyen $i\in n$ és $u,v\in H_i$, $u\neq v$. Legyen $k,\ell\in n$ úgy, hogy $k<\ell$ és $s(k)=u$, $s(\ell)=v$.



Akkor $s(0/u)\in 1^{\mathfrak{A}}$, és $z \overset{d}{=} s(0/u)(1/v)\in 1^{\mathfrak{A}}$ mert $\ell>0$; és $s\in c_0c_1(-d_{01}\cdot\{z\})$. Megmutatjuk, hogy $z\in c_0a_i\cdot c_1(d_{01}\cdot c_0a_i)$, ez ellentmond $s\in\delta^{\mathfrak{A}}[k]$-nak. $z(0/s_0) = s(1/v)\in a_i$ mert $v\in H_i$, így $z\in c_0a_i$. Ugyanakkor $z(1/u)\in d_{01}\cdot c_0a_i$, mert $z(1/u)(0/s_0) = s(1/u)\in a_i$ az $u\in H_i$ miatt. Beláttuk, hogy $D_\alpha \models \delta=0$ ha $|\alpha|>n$.

Most megszerkesztünk egy $\mathfrak{A}\in D_n$ -et és $k : X\to A$ -t, melyre $\mathfrak{A}\not\models \delta=0[k]$. Legyen $s \overset{d}{=} n\upharpoonright Id$, $V \overset{d}{=} \{s\}\cup\bigcup\{D_{ij}^{[n_n]} : i<j<n\}$, $\mathfrak{A} \overset{d}{=} \mathfrak{S}b V$ és $k(y_i) \overset{d}{=} \{s(1/i)\}$ minden $i\in n-1$ -re. Megmutatjuk, hogy $s\in\delta^{\mathfrak{A}}[k]$. Legyen $a_i \overset{d}{=} \tau_i^{\mathfrak{A}}[k]$ és $H_i \overset{d}{=} \{u\in Rngs : s(1/u)\in a_i\}$, ha $i\in n$. Akkor $a_i = \{s(1/i)\}$ és $H_i = \{i\}$ minden $i\in n$ -re. Könnyű leellenőrizni, hogy $s\in\tau(a_1)$, mert $a_1 = \{s\}$. Ugyanakkor, mivel $|H_i|<2$, azért $s\notin c_0c_1(-d_{01}\cdot c_0a_i\cdot c_1(d_{01}\cdot c_0a_i))$, minden $i\in n$ -re. Tehát $s\in\delta^{\mathfrak{A}}[k]$.
<u>QED</u>(10.10. Lemma)

Nyilvánvalóan, a 10.T(iii) és a 10.10.L(i) ill. (ii) segítségével kapunk egy-egy eldöntő algoritmust $EqCrs_\alpha$ ill. EqG_α-ra, ha $\alpha=\omega$. <u>QED</u>(10. Tétel)

<u>11. TÉTEL</u> (i) $EqG_\alpha \neq EqD_\alpha$ ha $\alpha\geq 2$.

(ii) $EqD_\alpha \neq EqFD_\alpha$ ha $\alpha\geq\omega$.

<u>Bizonyítás:</u> Legyen $\tau(x)\in Tm(cil_2)$ az a term, amit a 10.10.L. bizonyításá-

nak (IV) részében definiáltunk és amelyről bizonyítottuk, hogy ha $\mathfrak{A}\in D_\alpha$, $a\in A$ és $s\in\tau^{\mathfrak{A}}(a)$, akkor a) $s(0/s_1)(1/s_0)\notin 1^{\mathfrak{A}}$ és b) s ismétlésmentes. Az a) részből következik, hogy $G_\alpha \models \tau(x)=0$, és a b) részből következik, hogy $FD_\alpha \models \tau(x)=0$ ha $\alpha\geq\omega$ (mert ha $s\in 1^{\mathfrak{A}}$ ismétlésmentes és $\mathfrak{A}\in D_\alpha$, akkor $d^{\mathfrak{A}}_{0i}\neq d^{\mathfrak{A}}_{0j}$ minden $0<i<j<\alpha$-ra, tehát $|A|\geq\omega$). Könnyű azonban szerkeszteni $\mathfrak{A}\in D_\alpha$-t (minden $\alpha\geq 2$-re), melyre $\mathfrak{A}\not\models\tau(x)=0$, nevezetesen a (IV) részben meg is adtunk egy ilyet.
QED(11. Tétel)

12. MEGJEGYZÉS (i) A következő eltérést sejtjük G_α és D_α között: Legyen $\alpha<\omega$. Ha $\mathfrak{A}\in G_\alpha$-hoz hozzávehető még egy koordináta, akkor hozzávehető már akárhány sok koordináta, azaz $\mathbf{ISRd}_\alpha G_{\alpha+1} = \mathbf{ISRd}_\alpha G_{\alpha+\beta}$ tetszőleges $\beta\geq 1$-re. (Ez valószínűleg bizonyítható a 10.10.L bizonyításának (II) részebeli módszerekkel.) Viszont minden $n\in\omega$-hoz van $\mathfrak{A}\in D_\alpha$, melyhez hozzávehető n koordináta, de n+1 már nem, azaz $\mathbf{ISRd}_\alpha D_{\alpha+n}\neq\mathbf{ISRd}_\alpha D_{\alpha+n+1}$. (Pl. a 10.10.L bizonyításabeli (IV) részben megkonstruált $\mathfrak{A}\in D_\gamma$-nak ($\gamma=\alpha+n$) az α-reduktumáról ki lehet mutatni, hogy nem $\mathbf{ISRd}_\alpha D_{\alpha+n+1}$-beli.)

(ii) Ha $\alpha\leq 2$, akkor Crs_α erősen eldönthető, mert $\mathbf{I}Crs_\alpha = WCA_\alpha$ ebben az esetben. A 6.Mj.-beli módszerekkel valószínűleg bizonyítható, hogy G_2 és D_2 is erősen eldönthető. Legyen mostantól $\alpha\geq 3$. Nem tudjuk, hogy Crs_α erősen eldönthető-e. Sőt, nem tudjuk, hogy $EqCrs_\alpha = EqFCrs_\alpha$ igaz-e és hogy Crs_α szóproblémája megoldható-e. (Ezeket nem tudjuk D_α-ra és G_α-ra sem, kivéve 11.T(ii)-t.) Nem tudjuk, hogy EqD_α eldönthető-e ha $\alpha\geq\omega$. Jelen dolgozatból kiindulva, Richard Thompson adott egy elegáns axiomatizálást (véges sok sémával) EqD_α-ra. ∎

A 10.T(iii) -ban szereplő (a)-(b) feltételt teljesítő K-egységekről mondhatnánk, hogy "lazán összefüggők". Alább definiáljuk ennek a tulajdonságnak az "ellenkezőjét", melyet "foltozhatóságnak" nevezünk és bizonyítjuk, hogy a foltozható egységű Crs_α-k osztályának azonosságelmélete már nem eldönthető.

13. DEFINICIÓ Azt mondjuk egy V Crs_α-egységről, hogy foltozható (vagy "patchwork" tulajdonsággal rendelkező, vagy P_α-egység), ha

$$(\forall s,z\in V)(\forall H\subseteq\alpha)[(H\upharpoonright s)\cup(\alpha\sim H)\upharpoonright z]\in V.$$

$$P_\alpha \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in Crs_\alpha : 1^{\mathfrak{A}} \text{ foltozható}\}.$$ ∎

A tapasztalatok szerint a "foltozhatóság" az a tulajdonság, melynek hiánya erősen rányomja bélyegét a Crs_α, D_α, G_α osztályokra, és a foltozhatóság erősen összefügg a C_4 axióma teljesülésével. Erről szól az alábbi lemma.

14. LEMMA

(i) $[\mathfrak{G}\mathfrak{b}\, V \models C_4^\alpha \iff \mathfrak{G}\mathfrak{b}\, V \in \mathbf{P}P_\alpha]$, ha V egy Crs_α-egység; de ha $\alpha \geq 3$ akkor van $\mathfrak{A} \in Crs_\alpha$, melyre $\mathfrak{A} \models C_4^\alpha$ és $\mathfrak{A} \notin \mathbf{HSP}P_\alpha$.

(ii) $\mathbf{HSP}\ P_\alpha = \mathbf{SP}P_\alpha = \mathbf{I}\{\mathfrak{A} \in Crs_\alpha : 1^{\mathfrak{A}}$ diszjunkt bázisú P_α-egységek uniója $\}$, és EqP_α nem eldönthető (és nem is véges bázisú) ha $\alpha \geq 3$.

(iii) $\mathbf{SP}(P_\alpha \cap D_\alpha) = \mathbf{SP}Cs_\alpha = RCA_\alpha$.

Bizonyítás: (i) első részének bizonyítása: Legyen V egy Crs_α-egység. Minden $s \in V$-re legyen $zd(s) \stackrel{d}{=} \bigcup\{C_{i_0}^{[V]} \dots C_{i_n}^{[V]}\{s\} : n \in \omega,\ i \in {}^{n+1}\alpha\}$, és legyen $Subu(V) \stackrel{d}{=} \{zd(s) : s \in V\}$.[**] Akkor nem nehéz belátni[*], hogy $\mathfrak{G}\mathfrak{b}\, V$ izomorf az $\{\mathfrak{G}\mathfrak{b}\, W : W \in Subu(V)\}$-beli algebrák egy direktszorzatával. Tehát elég belátni, hogy $zd(s)$ foltozható minden $s \in V$-re, ha $\mathfrak{G}\mathfrak{b}\, V \models C_4^\alpha$. A bizonyítás további részében $C_i^{[V]}$ helyett csak C_i-t írunk, minden $i \in \alpha$-ra.

Tfh. $\mathfrak{G}\mathfrak{b}\, V \models C_4^\alpha$. Belátjuk, hogy akkor igaz a következő:

(*) $\{s, s(i/u)\} \subseteq V \implies [s(j/w) \in V \iff s(i/u)(j/w) \in V]$.

Valóban, tfh. $\{s, s(i/u)\} \subseteq V$. Ha $i=j$, akkor készen vagyunk. Tfh. $i \neq j$. Ha $z \stackrel{d}{=} s(i/u)(j/w) \in V$, akkor $z \in C_j C_i\{s\} = C_i C_j\{s\}$, ezért $s(j/w) \in V$. Ha $s(j/w) \in V$, akkor $s(i/u) \in C_i C_j\{s(j/w)\} = C_j C_i\{s(j/w)\}$, ezért $s(i/u)(j/w) \in V$. QED(*)

Legyen $Z \subseteq W \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy Z foltozható W-ben, ha $(\forall s, z \in Z)$ $(\forall H \subseteq \alpha)[H \upharpoonright s \cup (\alpha \sim H) \upharpoonright z] \in W$. Azt mondjuk, hogy Z jó, ha

$(\forall i \in \alpha)(\forall z \in C_i Z)[\{z\} \cup Z$ foltozható $C_i Z$-ben$]$.

---

[*] Vagy lehet használni [HMT]3.1.76 -ot.

[**] A "set of subunits" rövidítése.

Legyen $s\in V$. Akkor nyilvánvalóan, $\{s\}$ jó. Bizonyítjuk a következőt:

(**) ha $Z\subseteq V$ jó, akkor C_iZ is jó, minden $i\in\alpha$ -ra.

Legyen $j\in\alpha$. Azt kell belátni, hogy $(\forall p\in C_jC_iZ)(\{p\}\cup C_iZ$ foltozható $\subseteq C_iZ$-ben). Ehhez elég azt belátni, hogy $(\forall p\in C_jC_iZ)(\forall q\in C_iZ)(\forall H\subseteq\alpha)$ $[H\restriction p\cup(\alpha\sim H)\restriction q]\in C_jC_iZ$. Legyen $p\in C_jC_iZ$, $q\in C_iZ$, $H\subseteq\alpha$ és $G\overset{d}{=}\alpha\sim H$. Akkor $p=z(i/u)(j/w)$ és $q=s(i/v)$ valamely $z,s\in Z$ és u,v,w -re, úgy hogy $z(i/u)\in V$ és ekkor $z(j/w)\in V$ a (*) miatt. Legyen $g\overset{d}{=}$ $H\restriction z(i/u)(j/w)\cup G\restriction s(i/v)$ és $f\overset{d}{=}H\restriction z\cup G\restriction s$. Akkor $f\in C_iZ$ mert Z jó, $z\in Z$ és $s\in C_iZ$. Ha $\{i,j\}\subseteq G$ akkor $g=H\restriction z\cup G\restriction s(i/v)\in C_iZ$ mert Z jó. Ha $i\in H$ és $j\in G$, akkor hasonlóan $g=H\restriction z(i/u)\cup G\restriction s\in C_iZ$ mert Z jó és $z(i/u)\in C_iZ$. Tfh. $j\in H$ és $i\in G$. Akkor $g=H\restriction z(j/w)\cup G\restriction s(i/v)$ $=f(j/w)(i/v)$. Továbbá $f\in V$, $f(j/w)=H\restriction z(j/w)\cup G\restriction s\in V$ és $f(i/v)=$ $H\restriction z\cup G\restriction s(i/v)\in V$ mert Z jó, így (*) miatt $f(j/w)(i/v)\in V$, és így $g\in C_jC_iZ$. Végül, tfh. $\{i,j\}\subseteq H$. Akkor hasonlóan, $f,f(i/u),f(j/w)\in V$ mert $z,z(i/u),z(j/w)\in V$, $s\in Z$ és Z jó, így (*) miatt $g=f(i/u)(j/w)$ $\in V$, tehát $g\in C_jC_iZ$. QED(**)

Készen vagyunk annak megmutatására, hogy $zd(s)$ foltozható. Legyen $p,q\in zd(s)$ és $H\subseteq\alpha$. Akkor $p\in C_{i_1}\dots C_{i_n}\{s\}$ és $q\in C_{j_1}\dots C_{j_k}\{s\}$ valamely $i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_k\in\alpha$ -ra, így $p,q\in Z\overset{d}{=}C_{i_1}\dots C_{i_n}C_{j_1}\dots C_{j_k}\{s\}$. Mivel $\{s\}$ jó, a (**) -ból kapjuk indukcióval, hogy Z is jó. Ekkor $[H\restriction p\cup(\alpha\sim H)\restriction q]\in C_{i_1}Z\subseteq zd(s)$. Beláttuk, hogy ha $\mathfrak{Sb}V\models C_4$ akkor $\mathfrak{Sb}V\in \mathbf{P}\mathsf{P}_\alpha$. A másik irányt könnyű belátni, csak azt kell ellenőrizni, hogy ha V foltozható, akkor $\mathfrak{Sb}V\models C_4^\alpha$.

A többi rész bizonyítása: Azt mondjuk, hogy V egy Gp_α-egység, ha diszjunkt bázisú P_α-egységek úniója, azaz ha van $\langle U_j : j\in J\rangle$ páronként diszjunkt halmazok rendszere, melyre $V=\bigcup\{V\cap{}^\alpha U_j : j\in J\}$ és $V\cap{}^\alpha U_j$ foltozható minden $j\in J$ -re. $\mathsf{Gp}_\alpha\overset{d}{=}\{\mathfrak{A}\in\mathsf{Crs}_\alpha : 1^{\mathfrak{A}}$ egy Gp_α-egység$\}$. A [HMT]3.1.76-ot használva (melyet nem nehéz belátni), könnyen látható, hogy $\mathbf{SP}\mathsf{P}_\alpha=\mathbf{I}\mathsf{Gp}_\alpha$. Ahhoz hogy $\mathsf{EqP}_\alpha=\mathbf{I}\mathsf{Gp}_\alpha$ azt kell még látni, hogy $\mathbf{H}\mathsf{Gp}_\alpha\subseteq\mathbf{I}\mathsf{Gp}_\alpha$. Ennek bizonyítása pontosan ugyanúgy megy, mint a $\mathbf{H}\mathsf{Crs}_\alpha\subseteq$ $\mathbf{I}\mathsf{Crs}_\alpha$ -é, csak annyit kell még ahhoz a bizonyításhoz hozzátenni, hogy

Rep(F,c)V egy Gp_α-egység ha V az (ezt nem túl nehéz ellenőrizni, pl. a [HMT]3.1.91 bizonyításához hasonlóan). Rátérünk annak bizonyítására, hogy EqP_α nem eldönthető. Legyen $\tau \in Tm(cil_3)$. Definiálunk (rekurzívan) $\tau' \in Tm(cil_3)$-at, melyre igaz lesz, hogy $Cs_3 \models \tau=0 \iff P_\alpha \models \tau'=0$. Mivel $EqCs_3$ nem eldönthető (ld. 1.K. utáni megjegyzés vagy [HMT]4.2.18), ez bizonyítja majd, hogy EqP_α nem eldönthető. Legyen $\delta \stackrel{d}{=} \prod\{c_i d_{ij} : i,j\in 3\}$. Definiáljuk a $tr : Tm(cil_3) \to Tm(cil_3)$ függvényt a következőképpen:

$$tr(y) \stackrel{d}{=} \delta\cdot y \quad \text{ha} \quad y\in X$$
$$tr(d_{ij}) \stackrel{d}{=} \delta\cdot d_{ij} \quad \text{ha} \quad i,j\in 3$$
$$tr(\sigma\cdot\eta) \stackrel{d}{=} tr(\sigma)\cdot tr(\eta) \quad \text{ha} \quad \sigma,\eta\in Tm(cil_3)$$
$$tr(-\sigma) \stackrel{d}{=} \delta - tr(\sigma) \quad \text{ha} \quad \sigma\in Tm(cil_3)$$
$$tr(c_i\sigma) \stackrel{d}{=} \delta\cdot c_i\, tr(\sigma) \quad \text{ha} \quad i\in 3 \text{ és } \sigma\in Tm(cil_3)\,.$$

Megmutatjuk, hogy $Cs_3 \not\models \tau=0 \iff P_\alpha \not\models tr(\tau)=0$. Legyen $\mathfrak{A}\in P_\alpha$, $k : X\to A$ és $s\in tr(\tau)^{\mathfrak{A}}[k]$. Legyen $q \stackrel{d}{=} (\alpha\sim 3)\upharpoonright s$, $V \stackrel{d}{=} \{z : z\cup q\in 1^{\mathfrak{A}}\}$ és $W \stackrel{d}{=} \{z : z\cup q\in \delta^{\mathfrak{A}}[k]\}$. Mivel $\mathfrak{A}\in P_\alpha$, azért $V = H\times G\times K$ valamely H,G,K halmazokra és ellenőrizhető, hogy $W = {}^3U$ ahol $U = H\cap G\cap K$. Akkor a következőt nem nehéz látni (τ-ra vonatkozó indukcióval): minden $z\in V$-re $z\cup q \in tr(\tau)^{\mathfrak{A}}[k] \iff z\in tr(\tau)^{\mathfrak{G}\mathfrak{b}V}[k'] \iff z\in \tau^{\mathfrak{G}\mathfrak{b}^3U}[k'']$, ahol $k'(y) \stackrel{d}{=} \{z\in V : z\cup q\in k(y)\}$ és $k''(y) \stackrel{d}{=} \{z\in {}^3U : z\cup q\in k(y)\}$ minden $y\in X$-re. Tehát $s\in tr(\tau)^{\mathfrak{A}}[k] \Rightarrow 3\upharpoonright s\in \tau^{\mathfrak{G}\mathfrak{b}^3U}[k'']$, azaz $Cs_3 \not\models \tau=0$. Fordítva, könnyű látni, hogy $Cs_3 \subseteq \mathbf{ISRd}_3 Cs_\alpha$ (ld. pl. [HMT]3.1.121), és mivel $Cs_3 \models \delta=1$, azért $Cs_3 \models \tau=tr(\tau)$, így $Cs_3 \not\models \tau=0 \Rightarrow Cs_3 \not\models tr(\tau)=0 \Rightarrow Cs_\alpha \not\models tr(\tau)=0 \Rightarrow P_\alpha \not\models tr(\tau)=0$, mivel $Cs_\alpha \subseteq P_\alpha$. Beláttuk, hogy EqP_α nem eldönthető. Az előbbi bizonyítást kicsit módosítva rögtön belátható, hogy $Eq(P_\alpha\cap D_\alpha) = Eq(Cs_\alpha)$, amiből (iii) következik. Mivel $P_\alpha\cap D_\alpha = \{\mathfrak{A}\in P_\alpha : \mathfrak{A}\models c_i d_{ij}=1 \text{ minden } i,j\in\alpha\text{-ra}\}$ és Cs_α nem véges bázisú (ill. nem axiomatizálható véges sémával, ld. [HMT]4.1.3, 4.1.7), azért P_α sem véges bázisú (ill. nem axiomatizálható véges sémával). Mivel Resek és Thompson eredménye szerint $Crs_\alpha\cap CA_\alpha$ axiomatizálható véges sémával és Monk eredménye szerint $EqCs_\alpha$ nem, azért van $\mathfrak{A}\in Crs_\alpha\cap CA_\alpha$ hogy $\mathfrak{A}\notin \mathbf{HSP}Cs_\alpha$. Akkor (iii) szerint $\mathfrak{A}\notin \mathbf{SP}P_\alpha = \mathbf{HSP}P_\alpha$, de $\mathfrak{A}\models C_4$. QED(14. Lemma)

Rátérünk a modellelméleti következményekre. Az első következmény azt mondja, hogy ha gyengítjük az elsőrendű logika érvényesség-fogalmát azáltal, hogy bizonyos "nemsztenderd" modelleket is megengedünk, akkor az elsőrendű logika "ereje" elvész. Ez információt ad arra nézve, hogy a szokásos modellek mely tulajdonságai lényegesek. A második következmény a logika szokásos vizsgálataihoz kapcsolódik: definiáljuk a formulák egy eldönthető halmazát (alaki megkötéssel), és bizonyítjuk, hogy e halmaz elemei körében a szokásos érvényesség eldönthető.

A most következő részben $t : \mathcal{R} \to \omega$ egy relációs tipus (mely tehát nem tartalmaz függvényjelet) és F_t a t-tipusú szokásos elsőrendű formulák halmaza. A $V = \{\mathbf{v}_i : i \in \omega\}$ változójel-halmazt használjuk*/. Mod_t jelöli a t -tipusú modellek osztályát. Ha $\mathfrak{M} \in Mod_t$, akkor $\mathfrak{M} = \langle M, R^{\mathfrak{M}} \rangle_{R \in \mathcal{R}}$, azaz M jelöli az $\mathfrak{M}$ univerzumát és $R^{\mathfrak{M}} \subseteq {}^{t(R)}M$ jelöli az R relációjelnek $\mathfrak{M}$-ben megfelelő relációt.

<u>15. DEFINICIÓ</u>

(i) Legyen $K \subseteq Mod_t$. Azt mondjuk, hogy K egy általánosított Kripke-modell vagy parciális modell, jelben $K \in \mathcal{K}_t$, ha

$$(\forall \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in K)\ (M \cap N) \upharpoonright \mathfrak{M} = (M \cap N) \upharpoonright \mathfrak{N} ,$$

tehát ha K "kompatibilis" modellek osztálya. Definiáljuk a szokásos elsőrendű formulák érvényességét $\mathcal{K}_t$ elemeiben: Legyen $K \in \mathcal{K}_t$. Akkor $Val(K) \overset{d}{=} \bigcup \{{}^{\omega}M : \mathfrak{M} \in K\}$ a változójelek lehetséges kiértékelései K -ban. Legyen $k \in Val(K)$, $R \in \mathcal{R}$, $t(R)=n$, $i_1, \dots, i_n, i, j \in \omega$, és $\varphi, \psi \in F_t$. Akkor

$$K \models^{k} R(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} \langle k(i_1), \dots, k(i_n) \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \text{ valamely } \mathfrak{M} \in K \text{ -ra,}$$

$$K \models^{k} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} k(i) = k(j),$$

$$K \models^{k} \exists \mathbf{v}_i \varphi[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} K \models^{k} \varphi[k(i/u)] \text{ valamely } u\text{-ra, úgy, hogy } k(i/u) \in Val(K),$$

$$K \models^{k} \varphi \wedge \psi[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} (K \models^{k} \varphi[k] \text{ és } K \models^{k} \psi[k]),$$

$$K \models^{k} \neg\varphi[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} K \not\models^{k} \varphi[k],$$

$$K \models^{k} \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall k \in Val(K))\ K \models^{k} \varphi[k],$$

$$\models^{k} \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall K \in \mathcal{K}_t) K \models^{k} \varphi .$$

---

*/Tehát az I.2 fejezet jelöléseivel, $F_t = Fm_w^{\langle \omega, t \rangle}$, és $Mod_t = Mod(t)$.

(ii) Modellek előírt kiértékeléshalmazzal. Legyen

$\mathcal{M}_t \overset{d}{=} \{\langle \mathfrak{M}, V\rangle : \mathfrak{M}\in \mathrm{Mod}_t \text{ és } V \subseteq {}^{\omega}M\}$.

Legyen $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{M}, V\rangle \in \mathcal{M}_t$, $k\in V$ és $R, i_1,\dots,i_n, i, j, \varphi, \psi$ mint az (i)-ben. Akkor

$\mathfrak{A} \models^m R(\mathbf{v}_{i_1}\dots\mathbf{v}_{i_n})[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} \langle k(i_1),\dots,k(i_n)\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$,

$\mathfrak{A} \models^m \mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} k(i)=k(j)$,

$\mathfrak{A} \models^m \exists\mathbf{v}_i\varphi[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\exists u)[\mathfrak{A} \models^m \varphi[k(i/u)]$ és $k(i/u)\in V]$,

$\mathfrak{A} \models^m \varphi\wedge\psi[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\mathfrak{A} \models^m \varphi[k]$ és $\mathfrak{A} \models^m \psi[k])$

$\mathfrak{A} \models^m \neg\varphi[k] \overset{df}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{A} \not\models^m \varphi[k]$,

$\mathfrak{A} \models^m \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall k\in V)\, \mathfrak{A} \models^m \varphi[k]$,

$\models^m \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall \mathfrak{A}\in\mathcal{M}_t)\, \mathfrak{A} \models^m \varphi$. Legyen

$\mathcal{P}_t \overset{d}{=} \{\langle \mathfrak{M}, V\rangle \in \mathcal{M}_t :$ V foltozható és kiegyenesíthető$\}$.

$\models^p \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall \mathfrak{A}\in\mathcal{P}_t)\, \mathfrak{A} \models^m \varphi$.

(iii) Azt mondjuk, hogy ϱ egy atomi formula, ha ϱ $R(\mathbf{v}_{i_0}\dots\mathbf{v}_{i_{n-1}})$ alakú, ahol $R\in\mathcal{R}$, $n=t(R)$ és $i\in{}^n\omega$.

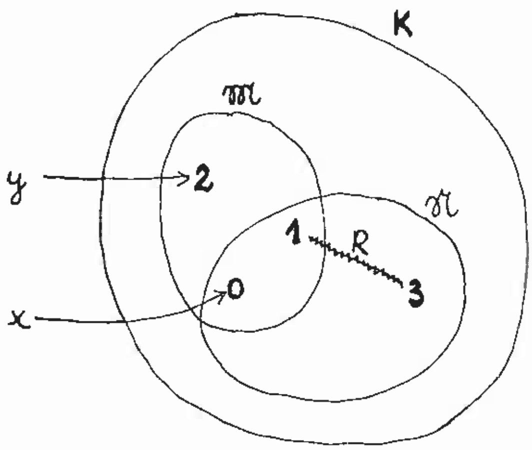
Azt mondjuk, hogy $\varphi\in F_t$ relativizált, ha van ϱ atomi formula, melyre φ $\varrho\to\psi$ alakú ahol ψ atomi formulákból $\neg,\wedge$ és "$\exists\mathbf{v}_i(\varrho\wedge\dots)$" segítségével épül fel és a ψ-ben legfeljebb a ϱ változójelei fordulnak elő. Formálisan: Legyen $R\in\mathcal{R}$, $n=t(R)$, $i_1, \dots, i_n\in\omega$ és $\varrho = R(\mathbf{v}_{i_1}\dots\mathbf{v}_{i_n})$. Akkor $RL(\varrho)\subseteq F_t$ az a legkisebb halmaz, melyre

(i) $\eta\in RL(\varrho)$ ha η atomi formula, melyben legfeljebb $\mathbf{v}_{i_1},\dots,\mathbf{v}_{i_n}$ szerepel a változójelek közül

(ii) $\{\neg\eta, \eta\wedge\xi, \exists\mathbf{v}_{i_k}(\varrho\wedge\eta)\}\subseteq RL(\varrho)$ ha $\eta,\xi\in RL(\varrho)$ és $1\le k\le n$.

$RF_t \overset{d}{=} \{\varrho\to\psi : \varrho\in F_t$ atomi formula és $\psi\in RL(\varrho)\}$.

Ha $\varphi\in RF_t$, akkor azt mondjuk, hogy φ relativizált. Azt mondjuk, hogy φ szokásosan relativizált formula, $\varphi\in SRF_t$, ha van ϱ atomi formula, hogy φ a $\{\varrho\wedge\eta : \eta$ atomi formula$\}$ elemeiből $\wedge, \varrho\wedge\neg, \varrho\wedge\exists\mathbf{v}_i$ segítségével épül fel és a φ-ben előforduló változójelek mind előfordulnak ϱ-ban. ∎



5. ÁBRA

Megjegyezzük, hogy $\models^k$, $\models^m$, $\models^p$ a $\models$ általánosításai: Ha $K \in \mathcal{K}_t$ egyelemű, akkor $(\forall\varphi)[K \models^k \varphi \iff K \models \varphi]$, és ha $\langle \mathfrak{M}, V\rangle \in \mathcal{M}_t$ olyan, hogy $V = {}^{\omega}M$, akkor $(\forall\varphi)[\langle \mathfrak{M}, V\rangle \models^m \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi]$.

16. KÖVETKEZMÉNY

(i) $\{\varphi \in F_t : \models^k \varphi\}$ eldönthető, azaz minden formuláról eldönthető, hogy érvényes-e az általánosított Kripke-modellekben. Hasonlóan

$\{\varphi \in F_t : \models^m \varphi\}$ eldönthető, de

$\{\varphi \in F_t : \models^p \varphi\} = \{\varphi \in F_t : \models \varphi\}$ nem eldönthető.

(ii) $\{\varphi \in RF_t : \models \varphi\}$ és $\{\varphi \in SRF_t : \not\models \neg\varphi\}$ eldönthető, azaz a relativizált formulákról eldönthető az érvényesség és a szokásosan relativizált formulákról eldönthető a kielégíthetőség.

A 16.K.-t a következő megjegyzés után bizonyítjuk.

17. MEGJEGYZÉS (i) $\mathcal{K}_t$ definiciója annyiban általánosabb a szokásos Kripke-modellek definiciójánál, hogy nincs kikötve, hogy $K \in \mathcal{K}_t$ elemeinek univerzumai diszjunktak legyenek egymástól. Alább egy példán megmutatjuk, hogy $\not\models^k \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$. Legyen t -ben egy kétargumentumú relációjel, R. Legyen $K = \{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\}$, ahol $M = \{0,1,2\}$, $N = \{0,1,3\}$, $R^{\mathfrak{M}} = 0$, és $R^{\mathfrak{N}} = \{(1,3)\}$. Legyen $x = v_0$, $y = v_1$ és legyen $k \in {}^{\omega}M$ olyan, hogy $k0 = 0$, $k1 = 2$ és $(\forall i > 1)k(i) = 0$. Akkor $K \models^k \exists y\exists x R(y,x)[k]$, de $K \not\models^k \exists x\exists y R(y,x)[k]$, ld. az 5. Ábrát szemben.

(ii) Modellek előírt kiértékeléshalmazzal nem ismeretlenek a logikában, nevezetesen a többszortú logika modelljei ilyenek: csak olyan kiértékeléseket engedünk meg, melyek az s -szortú változójeleket a modell s-szortú univerzumába képezik. A 16.K(i) szerint a szokásos elsőrendű modellek definiciójában nem az a fontos, hogy minden lehetséges kiértékelést megengedünk, hanem az, hogy a kiértékelések halmaza foltozható és kiegyenesíthető.

(iii) $\langle F_t, \mathcal{K}_t, \models^k\rangle$, $\langle F_t, \mathcal{M}_t, \models^m\rangle$ és $\langle F_t, \mathcal{P}_t, \models^p\rangle$ rendre a G_ω, Crs_ω, és $P_\omega \cap D_\omega$ algebraosztályoknak megfelelő logikák az [AS] vagy [HMT]§5.6 értelmében.

(iv) Az SRF_t elemeinek érvényessége is eldönthető a triviális módon: ha $\varphi\in SRF_t$ akkor φ nem érvényes mert $\varrho\wedge\psi$ alakú ahol ϱ atomi formula. Az SRF_t elemeiről a kielégíthetőséget már korántsem ilyen könnyű eldönteni. ∎

A 16. Következmény bizonyítása: Először feltesszük, hogy F_t csak szigorú formulákból áll. Később megmutatjuk, hogyan kell módosítani a gondolatmenetet ha nemcsak szigorú formulákat engedünk meg. Legyen $\varphi\in F_t$. Legyen $n = 1+\max\{i : \mathbf{v}_i \text{ előfordul } \varphi\text{-ben}\}$. Legyen $\chi \overset{d}{=} \forall\mathbf{v}_0\ldots\forall\mathbf{v}_{n-1}\wedge\{\exists\mathbf{v}_i R(\mathbf{v}_0\ldots\mathbf{v}_{n-1}) \leftrightarrow R(\mathbf{v}_0\ldots\mathbf{v}_{n-1}) : R\in\mathcal{R},\ i\in n\sim t(R),\ R \text{ előfordul } \varphi\text{-ben}\}$, és legyen φ' az a formula, melyet úgy kapunk φ-ből, hogy minden benne előforduló $R(\mathbf{v}_0\ldots\mathbf{v}_m)$ atomi formulát ahol $R\in\mathcal{R}$, kicserélünk $R(\mathbf{v}_0\ldots\mathbf{v}_{n-1})$-re. Legyen $h : \mathcal{R}\to\omega$ olyan, hogy $h(R)=n$ minden $R\in\mathcal{R}$-re. Akkor $\overline{\varphi} \overset{d}{=} \chi\to\varphi'\in F_h$ és nem nehéz ellenőrizni, hogy $\models^k\varphi \iff \models^k\overline{\varphi}$. Sőt, ugyanez igaz $\models^k$ helyett $\models^m$, $\models^p$ ill. $\models$ -re is.*/ Definiáljuk $\tau\mu : F_h \to Tm_{\mathcal{R}}(cil_\omega)$ -t ahogy az I. fejezetben. Legyen $K\in\mathcal{K}_h$. Akkor $E[K] \overset{d}{=} \{n\upharpoonright k : k\in Val(K)\}$, $\overline{\varphi}^K \overset{d}{=} \{n\upharpoonright k : K\models^k\psi[k]\}$, minden $\psi\in F_h$ -ra, és $k[K] : \mathcal{R}\to SbE[K]$ olyan, hogy $k[K]R = \widetilde{R(\mathbf{v}_0\ldots\mathbf{v}_{n-1})}^K$ minden $R\in\mathcal{R}$-re.
Nem nehéz ellenőrizni, hogy

(*) $K\models^k\overline{\varphi} \iff \mathfrak{G}\ell E[K]\models\tau\mu(\overline{\varphi})=1[k[K]]$ és

(**) minden E G_n-egységhez és $k : \mathcal{R}\to SbE$ -hez van $K\in\mathcal{K}_h$ úgy, hogy $E=E[K]$ és $k=k[K]$.

A fenti (*),(**) -ből következik, hogy $\models^k\varphi \iff \models^k\overline{\varphi} \iff G_n\models\tau\mu(\overline{\varphi})=1$. Teljesen hasonlóan látható be, hogy $\models^m\varphi \iff Crs_n\models\tau\mu(\overline{\varphi})=1$, $\models^p\varphi \iff P_n\cap D_n\models\tau\mu(\overline{\varphi})=1$, és $\models\varphi \iff Cs_n\models\tau\mu(\overline{\varphi})=1$. Most 16.K(i) következik a 10.T. és a 14.L(iii) -ból.

Tegyük most fel, hogy nemcsak szigorú formulák vannak F_t-ben, hanem $R(\mathbf{v}_{i_0}\ldots\mathbf{v}_{i_{n-1}})\in F_t$ minden $R\in\mathcal{R}$, és $i_0,\ldots,i_{n-1}\in\omega$ -ra, ha $t(R)=n$. A [HMT]4.3.6-hoz hasonlóan bizonyítható, hogy minden $\varphi\in F_t$-hez van szigorú $\psi\in F_t$, melyre $\models^k\varphi\leftrightarrow\psi$, $\models^p\varphi\leftrightarrow\psi$, tehát $\models\varphi\leftrightarrow\psi$ is. Sőt a ψ a φ-ből rekurzívan kiszámítható (nevezetesen a [HMT]4.3.6-ban rekurzívan megadott ψ jó lesz nekünk is). Ezzel a $\models^k$ -ra és $\models^p$ -re vonatkozó állítást visszavezettük az előző "szigorú" esetre. Ez a visszavezetés $\models^m$ -re nem működik. Az $\models^m$ esetében vissza kell nyúlni a 10.T. bizonyításához.

---

*/ $\models^p$ -re ezt pl. úgy lehet ellenőrizni, hogy $\langle\mathfrak{M},V\rangle$-ben $Subu(V)$ elemeit "diszjunkt bázisúvá tesszük".

Legyen $\varphi\in F_t$. $Részf(\varphi)$ jelöli a φ részformuláinak halmazát. Legyen $n \overset{d}{=} 1+\max\{i : \mathbf{v}_i$ előfordul φ-ben$\}$. Azt mondjuk, hogy (E,P) egy φ-mozaik, ha az alábbi (i),(ii) teljesül

(i) E egy Crs_n-egység és $P : Részf(\varphi) \to Sb\delta E$.

(ii) (a) $s\in P(R(\mathbf{v}_{i_0}\ldots\mathbf{v}_{i_k})) \iff z\in P(R(\mathbf{v}_{j_0}\ldots\mathbf{v}_{j_k}))$ ha $s,z\in E$, $s_{i_0}=z_{j_0},\ldots,s_{i_k}=z_{j_k}$ és $R(\mathbf{v}_{i_0}\ldots\mathbf{v}_{i_k}),R(\mathbf{v}_{j_0}\ldots\mathbf{v}_{j_k})\in$ $Részf(\varphi)$.

(b) $P(\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j) = D_{ij}^{[E]}$ ha $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_j \in Részf(\varphi)$

$P(\psi\wedge\eta) = P(\psi)\cap P(\eta)\cap E$ ha $\psi\wedge\eta\in Részf(\varphi)$

$P(\neg\psi) = E\sim P(\psi)$ ha $\neg\psi\in Részf(\varphi)$

$P(\psi)\cap E \subseteq P(\exists\mathbf{v}_i\psi) = C_i^{[\delta E]}P(\exists\mathbf{v}_i\psi)$ ha $\exists\mathbf{v}_i\psi \in Részf(\varphi)$.

Most a 10.T. bizonyítását a fenti mozaik-fogalommal végigvíve kapunk egy eldöntő eljárást a $\{\varphi\in F_t : \overset{m}{\models}\varphi\}$ halmazra.

Rátérünk a (ii) bizonyítására. Legyen ϱ egy atomi formula. Definiáljuk a $rl(\varrho) : F_t \to F_t$ függvényt:

$$rl(\varrho)\eta \overset{d}{=} \varrho\wedge\eta \quad \text{ha } \eta \text{ atomi formula}$$
$$rl(\varrho)(\varphi\wedge\psi) \overset{d}{=} rl(\varrho)\varphi\wedge rl(\varrho)\psi\ ,$$
$$rl(\varrho)(\neg\varphi) \overset{d}{=} \varrho\wedge\neg rl(\varrho)\varphi\ ,$$
$$rl(\varrho)(\exists\mathbf{v}_i\varphi) \overset{d}{=} \varrho\wedge\exists\mathbf{v}_i rl(\varrho)\varphi\ .$$

Legyen ϱ egy atomi formula és legyen $\varphi\in F_t$ olyan, hogy minden φ-ben előforduló változójel előfordul ϱ-ban is. Tegyük fel először, hogy $\varrho = R(\mathbf{v}_0\ldots\mathbf{v}_{n-1})$ szigorú. Akkor az előbbi módszerekkel nem nehéz látni, hogy $\not\models \neg rl(\varrho)\varphi \iff \overset{m}{\not\models}\neg\varphi$, vagyis az $rl(\varrho)\varphi$-ről eldönthető, hogy kielégíthető-e. Tegyük fel most, hogy $\varrho = R(\mathbf{v}_{i_0}\ldots\mathbf{v}_{i_{n-1}})$.

Minden $k<n$-re legyen $f(\mathbf{v}_{i_k})=\mathbf{v}_\ell$ ahol $\ell=\min\{m : \mathbf{v}_{i_m}=\mathbf{v}_{i_k}\}$ és jelölje φ' azt a formulát, melyet úgy kapunk φ-ből, hogy minden x változójelet kicserélünk benne $f(x)$-re. Legyen

$$R \overset{d}{=} \{(k,\ell)\in{}^2n : f(\mathbf{v}_{i_k})=\mathbf{v}_\ell\} \text{ és}$$

$Crs^R_\alpha \stackrel{d}{=} \{\mathfrak{A}\in Crs_\alpha : (\forall(k,\ell)\in R)\ \mathfrak{A}\models d_{k\ell}=1\}$,

minden α-ra. Legyen $\mathcal{M}'_t \stackrel{d}{=} \{\langle\mathfrak{M},V\rangle\in\mathcal{M}_t :$ V egy Crs^R_ω-egység$\}$, és minden $\psi\in F_t$ -re $[\models^{m'}\psi \stackrel{df}{\iff} (\forall\langle\mathfrak{M},V\rangle\in\mathcal{M}'_t)\langle\mathfrak{M},V\rangle\models^{m}\psi]$. Akkor nem nehéz látni az eddigiekhez hasonló módszerekkel, hogy $\{\psi\in F_t : \models^{m'}\psi\}$ eldönthető és $[\not\models \neg rl(\varrho)\varphi \iff \not\models^{m'}\neg\varphi']$. Tehát eldönthető, hogy $rl(\varrho)\varphi$ kielégíthető-e. Mivel minden $\psi\in SRF_t$ $rl(\varrho)\varphi$ alakú a fenti feltételekkel, ezzel beláttuk, hogy az SRF_t elemeiről eldönthető a kielégíthetőség. Legyen most φ relativizált. Akkor φ $\varrho\to\psi$ alakú, ahol $\psi\in RL(\varrho)$. A φ érvényességéhez tehát azt kell eldönteni, hogy $\varrho\wedge\neg\psi$ kielégíthető-e. Indukcióval belátható, hogy $\models \varrho\wedge\neg\psi\leftrightarrow rl(\varrho)\neg\psi$. Mivel $rl(\varrho)\neg\psi\in SRF_t$, ennek kielégíthetősége eldönthető. QED(16. Következmény)

IRODALOMJEGYZÉK

[A77] Andréka,H., Univerzális algebrai vizsgálatok az algebrai logika területén. Kandidátusi disszertáció, Budapest, 1977.

[AGN77] Andréka,H. Gergely,T. Németi,I., On universal algebraic construction of logics. Studia Logica 36,1-2(1977), 9-47. MR 58#21599

[AN75] Andréka,H. Németi,I., A simple, purely algebraic proof of the completeness of some first order logics. Algebra Universalis 5(1975) 8-15. MR 52#2875

[AN78] Andréka,H. Németi,I., On universal algebraic logic and cylindric algebras. Bulletin of Section of Logic Wroclaw, Vol.7, No.4(1978), 152-159. MR 80e:03075

[AN80] Andréka,H. Németi,I., On systems of varieties definable by schemes of equations. Algebra Universalis 11(1980), 105-116. MR 82d:08007

[AN81] Andréka,H. Németi,I., Dimension complemented and locally finite dimensional cylindric algebras are elementarily equivalent. Algebra Universalis 13(1981), 157-163. MR 82j:03081

[AN85] Andréka,H. Németi,I., On the number of generators of cylindric algebras. J. Symbolic Logic 50,4(1985), 865-873.

[ANS84] Andréka,H. Németi,I. Sain,I., Abstract model theoretic approach to algebraic logic. Preprint, 1984.

[AS] Andréka,H. Sain,I., Connections between algebraic logic and initial algebra semantics of CF languages. Mathematical Logic in Computer Science (Proc. Coll. Salgótarján 1978) Colloq. Math. Soc. J. Bolyai Vol. 26, North-Holland, 1981. 25-83.

[Bh22] Behmann,H., Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. 86(1922), 163-229.

[Be59] Bernays,P., Über eine natürliche Erweiterung des Relationenkalküls. Constructivity in Mathematics (Proc. of the coll. held at Amsterdam, 1957) North-Holland, Amsterdam, 1959. 1-14.

[Bi48,67] Birkhoff,G., Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 25. 2nd ed. 1948, 3rd ed. 1967.

[B85] Bíró,B., Személyes kommunikáció, Budapest, 1985.

[BS] Bíró,B. Shelah,S., Isomorphic but not lower-base-isomorphic cylindric set algebras. J. Symbolic Logic, megjelenés alatt.

[CT51] Chin,L.H. Tarski,A., Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras. University of California Publications in Mathematics, new series, Vol. 1, No. 9(1951), 341-384.

[Cr74] Craig,W., Logic in an algebraic form. Three languages and theories. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[CF58] Curry,H.B. Feys,R., Combinatory Logic. Vol. I. North-Holland, Amsterdam, 1958.

[CHS72] Curry,H.B. Hindley,J.R. Seldin,J.P., Combinatory Logic. Vol. II. North-Holland, Amsterdam, 1972.

[D1864] De Morgan,A., On the syllogism, no. IV, and on the logic of relations. Transactions of the Cambridge Philosophical Society 10 (1864), 331-358.

[Di39] Dilworth,R.P., Non-commutative residuated lattices. Trans. AMS 46 (1939), 426-444.

[DG79] Dreben,B. Goldfarb,W.D., The Decision Problem. Solvable Classes of Quantificational Formulas. Addison-Wesley, London, 1979.

[F83] Ferenczi,M., Measures on cylindric algebras. Acta Math. Hungar. 42 (1983), 3-17.

[F84] Ferenczi,M., On the extension of mappings to cylindric homomorphisms. Notre Dame J. of Formal Logic, megjelenés alatt.

[GG84] Gabbay,D. Guenthner,F. (szerk.), Handbook of Philosophical Logic. Vol. II. Extensions of Classical Logic. Reidel Kiadó, Dordrecht, 1984.

[G81] Guitart,R., The theory of sketches (revisited). Proc. of "Journéés Faisceaux et Logique" (19th P.S.S.L.), Paris, 1981. Szintén: Preprint serie of Univ. Paris-Nord, July 1981.

[GL80] Guitart,R. Lair,C., Calcul syntaxique des modeles et calcul des formulas internes. Diagrammes Vol. 4, Dec. 1980.

[H67] Henkin,L., Logical systems containing only a finite number of symbols. Séminaire de mathématiques supérieures, No. 21. Les Presses de l' Université de Montréal, Montréal, 1967.

[H68] Henkin,L., Relativization with respect to formulas and its use in proofs of independence. Compositio Math.20(1968), 88-106.

[H73] Henkin,L., Internal semantics and algebraic logic. Truth, syntax, and modality (H. Leblanc ed.) Studies in Logic Vol. 68, North-Holland, Amsterdam, 1973. 111-127.

[H77] Henkin,L., Algebraic aspects of logic: past, present, future. Colloq. Inter. de Logique. CNRS, Vol. 249, 1977. 89-106.

[H82] Henkin,L., Lecture Notes on cylindric algebras. Berkeley, 1982. Sokszorosított jegyzet a jugoszláviai 1982. évi algebrai logika szemináriuma számára.

[H83] Henkin,L., Proofs in first-order logics with only finitely many variables. Abstr. Amer. Math. Soc., Vol. 4 (1983) 8.

[HMT] Henkin,L. Monk,J.D. Tarski,A., Cylindric Algebras. I. rész. North-Holland, Amsterdam, 1971. II. rész. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[HMT86] Henkin,L. Monk,J.D. Tarski,A., Representable cylindric algebras. Annals. of Pure and Applied Logic, megjelenés alatt.

[HMTAN] Henkin,L. Monk,J.D. Tarski,A. Andréka,H. Németi,I., Cylindric Set Algebras. Lecture Notes in Mathematics Vol. 883, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[Jo73] Johnson,J.S., Axiom systems for logic with finitely many variables. J. Symbolic Logic 38(1983), 576-578.

[J59] Jónsson,B., Representation of modular lattices and of relation algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 92(1959), 449-464.

[J82] Jónsson,B., Varieties of relation algebras. Algebra Universalis 15 (1982), 273-298.

[J84] Jónsson,B., The theory of binary relations. First draft. Preprint, 1984.

[J85] Jónsson,B., Levél Andréka H. és Németi I.-hez. 1985. febr. 13.

[KT31] Kuratowski,C. Tarski,A., Les opérations logiques et les ensembles projectifs. Fund. Math. 17(1931), 240-248.

[Lw67] Lawvere,F.W., Theories as categories and the completeness theorem. Abstract. J. Symbolic Logic 32(1967), 562.

[Lw72] Lawvere,F.W., Introduction and ed. for Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Lecture Notes in Mathematics 274, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Lv82] Levin,H.D., Categorial grammar and the logical form of quantification. Indices. (Monographs in Philosophical Logic and Formal Linguistics) Vol. 1, Bibliopolis Kiadó, Nápoly, 1982.

[Lw79] Lewis,H.R., Unsolvable Classes of Quantificational Formulas. Addison-Wesley Kiadó, London, 1979.

[L13] Löwenheim,L., Potenzen im Relativkalkul und Potenzen allgemeiner endlicher Transformationen. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 12th year (1913), 65-71. (Published as appendix to Archiv der Mathematik und Physik, ser. 3, Vol. 21, No. 1 (1913).)

[L15] Löwenheim,L., Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Ann. 76 (1915), 447-470.

[L40] Löwenheim,L., Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkül. J. Symbolic Logic 5(1940), 1-15.

[Lü04] Lüroth,J., Aus der Algebra der Relative (nach dem dritten Bande von E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik). Jber. Deutsch. Math.-Verein, Vol. 13(1904), 73-111.

[Ma76] Maddux,R.D., The equational theory of CA_3 is undecidable. Notices Amer. Math. Soc. 23(1976), A-19.

[Ma78] Maddux,R., Topics in relation algebras. Doctoral Dissertation. Univ. of California, Berkeley, 1978.

[Ma78a] Maddux,R.D., Some sufficient conditions for the representability of relation algebras. Algebra Universalis 8(1978), 162-171.

[Ma80] Maddux,R.D., The equational theory of CA_3 is undecidable. J. Symbolic Logic 45(1980), 311-316.

[Ma82] Maddux,R.D., Some varieties containing relation algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 272(1982), 501-526.

[Ma83] Maddux,R.D., A sequent calculus for relation algebras. Ann. Pure App. Logic 25(1983), 73-101.

[Ma85] Maddux,R.D., A collection of research problems on relation algebras. Preprint, 1985. március.

[Ma85a] Maddux,R.D., Személyes kommunikáció. Budapest, 1985.

[Ma85b] Maddux,R.D., Levél (17/07/1985 keltezésű) Andréka H. és Németi I.-hez.

[Mc1880] Macfarlane,A., On a calculus of relationship. Proc. of the Royal Society of Edinburgh 10(1880), 224-232.

[Mc1882] Macfarlane,A., Algebra of relationship - Part II. Proc. of the Royal Society of Edinburgh 11(1882), 5-13.

[Mn75] Manes,E.G., Algebraic Theories. Graduate Text in Mathematics Vol. 26, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[McKe70] McKenzie,R., Representations of integral relation algebras. Michigan Math. J. 17(1970), 279-287.

[McKi40] McKinsey,J.C.C., Postulates for the calculus of binary relations. J. Symbolic Logic 5(1940), 85-97.

[McN85] McNulty,G., Személyes kommunikáció, Szeged, 1985.

[M61] Monk,J.D., Studies in cylindric algebras. Doctoral dissertation. Univ. of California, Berkeley, 1961.

[M61a] Monk,J.D., Relation algebras and cylindric algebras. Notices Amer. Math. Soc. 8(1961), 358.

[M64] Monk,J.D., Singulary cylindric and polyadic equality algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 112(1964), 185-205.

[M69] Monk,J.D., Nonfinitazibility of classes of representable cylindric algebras. J. Symbolic Logic 34(1969), 331-343.

[M71] Monk,J.D., Provability with finitely many variables. Proc. Amer. Math. Soc. 27(1971), 353-358.

[M76] Monk,J.D., Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[M77] Monk,J.D., Some problems in algebraic logic. Colloq. Inter. de Logic CNRS 249(1977), 83-88.

[Mu1882] Murphy,J.J., On the addition and multiplication of logical relatives. Memoirs of the Manchester Literary and Philosophical Society, ser. 3, Vol. 7(27)(1882), 201-224.

[N78] Németi,I., Connections between cylindric algebras and initial algebra semantics of CF languages. Mathematical Logic in Computer Science (Proc. Salgótarján 1978) Colloq. Math. Soc. J. Bolyai Vol. 26, North-Holland, 1981. 561-605.

[N80] Németi,I., Some constructions of cylindric algebra theory applied to dynamic algebras of programs. Comput. Linguist. Comput. Lang. (CL&CL) 14(1980), 43-65. MR 83i:03099

[N81] Németi,I., Dynamic algebras of programs. Fundamentals of Computation Theory (Proc. FCT'81 Szeged) Lecture Notes in Computer Science Vol. 117, Springer-Verlag, Berlin, 1981. 281-290. MR 83i:08009

[N82] Németi,I., Every free algebra in the variety generated by the representable dynamic algebras is separable and representable. Theoretical Computer Science 17(1982), 343-347. MR 83i:08010

[N83] Németi,I., The class of neat-reducts of cylindric algebras is not a variety but is closed wrt. HP. Notre Dame J. of Formal Logic 24,3 (1983), 399-409. MR 85e:03156.

[N84] Németi,I., On infinite dimensional free cylindric algebras. Preprint, Budapest, 1984.

[N84a] Németi,I., Free Boolean algebras with closure operators and a conjecture of Henkin-Monk-Tarski. (Solution of Problem 2.10 in [HMT].) Preprint, Budapest, 1984. december.

[N84b] Németi,I., Algebraic proofs of "$\mathfrak{Fr}_\beta CA_\alpha$ ($\alpha \geq 4$) is not atomic". Kézirat, 1984.

[N84c] Németi,I., Cylindric-relativized set algebras and further developments in algebraic logic. Conference on Universal Algebra and Lattice Theory, Charleston, USA, 1984. julius. Meghívott előadás.

[N85] Németi,I., Free cylindric and relation algebras are not atomic. Abstracts of Oberwolfach meeting "Boolean Algebras", 1985.

[N85a] Németi,I., Not every relation algebra is a reduct of a CA_4. Kézirat, Budapest, 1985. junius.

[N85b] Németi,I., Exactly which varieties of cylindric algebras are decidable? MTA MKI Preprint No 34/85, 1985. Publikálásra benyujtva.

[N85c] Németi,I., Decidability of relation algebras with weakened associativity. Proc. of Amer. Math. Soc., megjelenés alatt.

[N85d] Németi,I., Logic with three variables has Gödel's incompleteness property - thus free cylindric algebras are not atomic. MTA Mat. Kut. Int. Preprint No 49/85, 1985. julius.

[N85e] Németi,I., A non-representable cylindric algebra with pairing functions. Algebra Universalis 22(1986), megjelenés alatt.

[N85f] Németi,I., Some theorems on free relation- and cylindric algebras. Preprint, 1985. április.

[N85g] Németi,I., Decidability of the equational theory of cylindric-relavized set algebras. Preprint, Budapest. 1985. szeptember.

[N85h] Németi,I., On varieties of cylindric algebras with applications to logic. Annals of Pure and Applied Logic, megjelenés alatt.

[N85i] Németi,I., Cylindric-relativised set algebras have strong amalgamation. J. Symbolic Logic 50(1985), 689-700.

[N86] Németi,I., Free cylindric and relation algebras are non-freely generated. (Solution of Problem 2.7 of [HMT].) Preprint, 1986.

[N86a] Németi,I., Free cylindric and relation algebras are non-freely generated. Abstracts of Amer. Math. Soc., megjelenés alatt.

[N86b] Németi,I., On reducts of non-commutative cylindric algebras. Kézirat, Budapest, 1986.

[P1870] Peirce,C.S., Mem. Acad. Arts Sci. 9(1870), 317-378.

[P1882] Peirce,C.S., The logic of relatives. Studies in Logic. John Hopkins University, 1882. 187-203.

[P1885] Peirce,C.S., Americal Journal of Mathematics 7(1985), 194.

[Po82] Poizat,B., Deux ou trois choses que je sais de L_n. J. Symbolic Logic 47(1982), 641-658.

[Q36] Quine,W.V., Toward a calculus of concepts. J. Symbolic Logic 1(1936), 2-25.

[Q60] Quine,W.V., Variables explained away. Proc. Amer. Philos. Soc. 140 (1960), 343-347.

[Q71] Quine,W.V., Algebraic logic and predicate functors. Bobbs-Merrill Publ. Co., 1971.

[R75] Resek,D., Some results on relativized cylindric algebras. Doktori Disszertáció, University of California, Berkeley, 1975.

[Sa82] Sain,I., Finitary logics of infinitary structures are compact. Abstracts Amer. Math. Soc. April 1982, Issue 17, Vol.3, No.3. p.252.

[Sa] Sain,I., Cylindric algebraic versions of the downward Löwenheim-Skolem theorem. Notre Dame J. of Formal Logic, megjelenés alatt.

[Sr1890] Schröder,E., Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik) vols. 1,2(parts 1 and 2), 3(part 1). Algebra und Logik der Relative edited in part by E. Müller and B.G. Teubner, Leipzig, 1890-1905 (published in 4 vols.). (second edition, in 3 vols. published by Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y. 1966.).

[Sr1895] Schröder,E., Note über die Algebra der binaren Relative. Math. Ann. 46(1895), 144-158.

[Sw09] Schweitzer,A.R., A theory of geometrical relations. Amer. J. Math. 31(1909), 365-410.

[S62] Scott,D.S., A decision method for validity of sentences in two variables. J. Symbolic Logic 27(1962), 477.

[Se85] Serény,Gy., Compact cylindric set algebras. Bulletin of Section of Logic, Wroclaw, 14(1985), 57-64.

[Se86] Serény,Gy., Kompakt cilindrikus halmazalgebrák. Egyetemi doktori értekezés, Budapest, 1986.

[Su55] Surányi,J., A matematikai logika eldöntésproblémájáról. (Ismertetés.) Matematikai Lapok 6,2-3(1955), 180-197.

[Su59] Surányi,J., Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der Ersten Stufe. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

[T30] Tarski,A., Über definierbare Mengen reeller Zahlen. Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego (Annales de la Société Polonaise de Mathematique) 9 (1930), 206-207.

[T30a] Tarski,A., On the concept of truth in reference to formalized deductive sciences. (Lengyelül.) Ruch Filozoficzny 12(1930), 210-211.

[T31] Tarski,A., Sur les ensembles definissables de nombres réels I. Fund. Math. 17(1931), 210-239.

[T32] Tarski,A., Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen. Akademie der Wiss. in Wien, Mathematisch-naturwiss. Klasse, Akademischer Anzeiger, 69(1932), 23-25.

[T35] Tarski,A., Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. I. Fund. Math. 24(1935), 177-198.

[T41] Tarski,A., On the calculus of relations. J. Symbolic Logic 6(1941), 73-89.

[T53] Tarski,A., Some metalogical results concerning the calculus of relations. J. Symbolic Logic 18(1953), 188-189.

[T53a] Tarski,A., A formalization of set theory without variables. J. Symbolic logic 18(1953), 189.

[T65] Tarski,A., A simplified formulation of predicate logic with identity. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. 7(1965), 61-79.

[T45sz],[T60sz],[T73sz] Tarski,A., Reláció- és cilindrikus algebrai szemináriumsorozat, Berkeley, 1945, 1960 és 1973 rendre. (Más években is volt ilyen szeminárium, mi jelen hármat idézzük.)

[TG] Tarski,A. Givant,S., A formalization of set theory without variables. American Mathematical Society colloquium publications, Amer. Math. Soc., Providence, megjelenés alatt. Első változat 1963 Berkeley (a Proc. of the 1963 International Symposium at Berkeley számára készült, de túl hosszúnak bizonyult). 1963 és 1983 között több változat készült, pl. az 1974-es változatot sokan (jelen dolgozat is) idézik. Ld. még [T53a].

[Ta79] Taylor,W., Equational logic. Houston J. of Mathematics, 1979.

[Th81] Thompson,R.J., Transformational structure of algebraic logics. Doktori Disszertáció, University of California, Berkeley, 1981.

JELÖLÉSJEGYZÉK