Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. ERDŐS in Budapest.

Für den zuerst von TSCHEBYSCHEF bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von RAMANUJAN[1]) bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr LANDAU einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q-fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecken des Herrn LANDAU kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem LANDAUschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten TSCHEBYSCHEFschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachkeit nicht hinter dem RAMANUJANschen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

1. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

---

[1]) SR. RAMANUJAN, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, **11** (1919), S. 181—182 = *Collected Papers of* SRINIVASA RAMANUJAN (Cambridge, 1927), S. 208—209.

ist durch die Primzahlen p mit $a<p\leqq 2a$ teilbar, da dieselben den Zähler teilen, den Nenner aber nicht; also ist

$$\prod_{a<p\leqq 2a} p \leqq \binom{2a}{a}.$$

Nun ist aber für $a\geqq 5$

$$\binom{2a}{a} < 4^{a-1};$$

in der Tat gilt diese Ungleichung für $a=5$ und, falls dieselbe für ein gewisses a erfüllt ist, so gilt wegen

$$\binom{2(a+1)}{a+1} = \frac{(2a)!\,(2a+1)\,(2a+2)}{(a!)^2\,(a+1)^2} < 4\binom{2a}{a}$$

das gleiche auch für $a+1$. Daher ist

(1) $$\prod_{a<p\leqq 2a} p < 2^{2(a-1)}.$$

2. Es sei $b\geqq 10$; bezeichnen wir allgemein die kleinste ganze Zahl $\geqq \xi$ mit $\{\xi\}$ und es sei

$$a_1=\left\{\frac{b}{2}\right\},\quad a_2=\left\{\frac{b}{2^2}\right\},\ldots, a_k=\left\{\frac{b}{2^k}\right\},\ldots$$

Dann ist $a_1\geqq a_2\geqq\ldots\geqq a_k\geqq\ldots$; ferner

$$a_k<\frac{b}{2^k}+1=2\frac{b}{2^{k+1}}+1\leqq 2a_{k+1}+1$$

also, da a_k und $2a_{k+1}$ ganze Zahlen sind,

(2) $$a_k\leqq 2a_{k+1}.$$

Es sei m die größte Zahl, für welche $a_m\geqq 5$ ist; dann ist $a_{m+1}<5$, also wegen (2) $a_m<10$. Ferner ist $2a_1\geqq b$; daher überdecken wegen (2) die Intervalle

$$a_m<\eta\leqq 2a_m,\ a_{m-1}<\eta\leqq 2a_{m-1},\ldots, a_1<\eta\leqq 2a_1$$

lückenlos das Intervall $10<\eta\leqq b$.

Wir wenden nun die Ungleichung (1) der Reihe nach für $a=a_1, a_2,\ldots, a_m$ an. Durch Multiplikation erhalten wir

$$\prod_{a_1<p\leqq 2a_1} p \prod_{a_2<p\leqq 2a_2} p\ldots \prod_{a_m<p\leqq 2a_m} p < 2^{2(a_1-1+a_2-1+\ldots+a_m-1)} <$$
$$< 2^{2\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2^2}+\ldots+\frac{b}{2^m}\right)} < 2^{2b},$$

also, nach den oben gesagten, a fortiori

(3) $$\prod_{10<p\leqq b} p < 2^{2b}.$$

3. Nach einem bekannten Satz von LEGENDRE[2]) enthält $n!$ den Primfaktor p mit der Multiplizität

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right],$$

wobei, wie üblich, $[\xi]$ die größte ganze Zahl $\leqq \xi$ bezeichnet. Daher wird p in

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{4}$$

mit der Multiplizität

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \tag{5}$$

als Primfaktor enthalten. Hierbei ist jedes Glied $\leqq 1$; in der Tat ist die *ganze* Zahl

$$\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]<\frac{2n}{p^k}-2\left(\frac{n}{p^k}-1\right)=2.$$

Nun verschwinden aber in (5) die Glieder mit $p^k>2n$; daher kann die Multiplizität (5) nicht größer sein, als die größte ganze Zahl r mit $p^r\leqq 2n$. D. h. ist die Potenz der Primzahl p, mit der sie in der Primfaktorenzerlegung von $\binom{2n}{n}$ figuriert, $\leqq 2n$. Hieraus folgt auch, daß die Primzahlen $p>\sqrt{2n}$ in der Primfaktorenzerlegung von $\binom{2n}{n}$ höchstens auf der ersten Potenz vorkommen.

Wir bemerken nun — und dies ist der springende Punkt des vorliegenden Beweises — daß für $n\geqq 3$ die Primzahlen mit $\frac{2}{3}n<p\leqq n$ den Binomialkoeffizient (4) nicht teilen. In der Tat sind dann wegen $3p>2n$ nur die beiden Faktoren p, $2p$ des Zählers von (4) durch p (und zwar wegen $p>2$ nur durch die erste Potenz desselben) teilbar; und der Nenner ist auch teilbar durch p^2.

Diese Überlegungen ergeben für $n\geqq 3$ die Ungleichung

$$\binom{2n}{n}\leqq \prod_{p\leqq\sqrt{2n}}(2n)\prod_{\sqrt{2n}<p\leqq\frac{2}{3}n}p\prod_{n<p\leqq 2n}p$$

[2]) A. M. LEGENDRE, *Zahlentheorie* (Übersetzung von H. MASER; Leipzig, 1886), Bd. 1, S. 11; oder E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909), Bd. 1, S. 75—76.

also, da das erste Produkt rechts höchstens $\sqrt{2n}$ Faktoren besitzt und da allgemein

$$2n \cdot \binom{2n}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-2}{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n}{n} > 2^{2n}$$

gilt, die Ungleichung

$$(6) \qquad 2^{2n} < (2n)^{1+\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leqq \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leqq 2n} p.$$

4. Es sei nun $n \geqq 50$ und setzen wir voraus, daß es zwischen n und $2n$ keine Primzahl gibt. Dann ist das zweite Produkt in (6) leer; für den ersten gilt wegen $\sqrt{2n} \geqq 10$ und (3)

$$\prod_{\sqrt{2n} < p \leqq \frac{2}{3}n} p \leqq \prod_{10 < p \leqq \frac{2}{3}n} p < 2^{2\left[\frac{2}{3}n\right]} \leqq 2^{\frac{4}{3}n};$$

also geht (6) in

$$(7) \qquad 2^{2n} < (2n)^{1+\sqrt{2n}}\, 2^{\frac{4}{3}n}$$

über, was für hinreichend große n unmöglich ist.

Um eine nicht allzu hohe Schranke zu gewinnen, von welcher ab (7), d. h.

$$(8) \qquad 2^{\frac{2}{3}n} < (2n)^{1+\sqrt{2n}}$$

nicht mehr gültig ist, schätzen wir wie folgt ab. Wegen der Ungleichung $a \leqq 2^{a-1}$ (was man etwa durch vollständige Induktion leicht zeigen kann) ist

$$2n = \left(\sqrt[6]{2n}\right)^6 < \left(\left[\sqrt[6]{2n}\right] + 1\right)^6 \leqq 2^{6\left[\sqrt[6]{2n}\right]} \leqq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$$

also folgt aus (8) (falls immer $n \geqq 50$ vorausgesetzt wird)

$$2^{2n} < 2^{\sqrt[6]{2n}\left(18+18\sqrt{2n}\right)} < 2^{\sqrt[6]{2n}\,.\,20\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{\frac{2}{3}}},$$

d. h. $(2n)^{\frac{1}{3}} < 20$, $n < \frac{1}{2} \cdot 20^3 = 4000$.

Daher gibt es für $n \geqq 4000$ wenigstens eine Primzahl p mit $n < p \leqq 2n$.

5. Um hiervon zu dem TSCHEBYSCHEFschen Satz: *für $n \geqq 1$ gibt es wenigstens eine Primzahl p mit $n < p \leqq 2n$* zu gelangen, braucht man nach einer Bemerkung des Herrn LANDAU[3]) nicht für $n = 1, 2, \ldots, 3999$ je eine Primzahl p mit $n < p \leqq 2n$ aufzuweisen. Es genügt zu bemerken, daß von den Primzahlen

(9) 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001

jede größer als die vorangehende und kleiner als die doppelte derselben ist, und daß die letzte 4000 übertrifft. In der Tat, ist $1 \leqq n < 4000$ und ist p das erste Glied $> n$ der Folge (9), so ist, falls p' das vorangehende Glied (und im Falle $p = 2$ die Zahl 1) bezeichnet,

$$n < p \leqq 2p' \leqq 2n.$$

6. Mit Hilfe der Ungleichung (6) gelangt man auch leicht zu einer *unteren Abschätzung* der Anzahl der Primzahlen zwischen n und $2n$. In der Tat ergibt sich aus (6) und (3) durch eine der obigen analoge Überlegung für $n \geqq 4000$

$$\prod_{n < p \leqq 2n} p > 2^{2n - \frac{4}{3}n} (2n)^{-\left(1+\sqrt{2n}\right)} > 2^{\frac{1}{3}\left(2n - \sqrt[6]{2n}\left(18 + 18\sqrt{2n}\right)\right)} >$$
$$> 2^{\frac{1}{3}\left(2n - 19(2n)^{\frac{2}{3}}\right)} = 2^{\frac{2}{3}n\left(1 - 19(2n)^{-\frac{1}{3}}\right)} \geqq$$
$$\geqq 2^{\frac{2}{3}n\left(1 - \frac{19}{20}\right)} = 2^{\frac{1}{30}n},$$

also, da jeder Faktor des Produktes $\leqq 2n$ ist, so ist die Anzahl der Faktoren desselben (in der üblicher Bezeichnung)

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{\log 2}{30} \frac{n}{\log 2n},$$

also

$$\pi(2n) - \pi(n) > \alpha \frac{n}{\log n} \tag{10}$$

für eine geeignete positive Zahl α.

Nach dem TSCHEBYSCHEFschen Satz gilt daher (10) auch für $2 \leqq n < 4000$, sofern α hinreichend klein gewählt wurde.

(*Eingegangen am 24. November 1931.*)

3) E. LANDAU, l. c., Bd. 1, S. 92.