BEVEZETÉS A POTENCIÁLELMÉLETBE

1. fejezet

MIÉRT OLYAN A GRAVITÁCIÓS TÖRVÉNY, AMILYENNEK NEWTON TALÁLTA ?

1.1. Milyen gravitációs törvényt várhatott Newton az égi mechanika vizsgálatából?

Ahhoz, hogy fizikailag értelmes legyen, amivel foglalkozunk, a feladatban rejlő szimmetriákat és egyéb nyilvánvaló elemi tulajdonságokat figyelembe kell vegyük. Olyan gravitációs törvényt kell keressünk, amely eleget tesz a fizikai szemléletből adódó legelemibb szimmetria-feltevéseknek és néhány egyéb triviálisan igaz kritériumnak. Gyűjtsük össze ezeket az elvárt feltételeket!

Kiindulási helyzetben egy adott, mondjuk normált tömegpont gravitációs terét vizsgáljuk: tekinthetünk erre a tömegpontra, mint a bolygórendszerben a Napra. A bolygók tömegpontok és a Napon kívül helyezkednek el: a tömegvonzást egységnyi bolygótömegre ható erő gravitációs terével jellemezzük. Az energiaszinteket (munkavégzési szükségletet ahhoz, hogy a tömegpont adott helyzetbe kerüljön), a potenciálfüggvény jellemzi. Ebből következően a potenciálfüggvény deriváltja (gradiense) az erőtér. A gravitációs erőtörvény azt határozza meg, hogy a Nap erőterében hol mekkora erőtér-vektor lesz.

A gravitációs erőtörvény - azaz az $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ erőtér - nyilván nem függhet a koordináta-rendszer választásától, azaz a koordinátarendszer izometrikus változtatásai helybenhagyják. Ezért feltehető, hogy a Nap az origóban van, és a további körüljárástartó egybevágósági transzformációk (a tér elforgatásai, azaz az ortogonális transzformációk) is helybenhagyják az erőteret. Az elforgatások csoportját szokásos $SO(n)$-nel jelölni: első megállapításunk, feltételünk tehát az, hogy

$$< \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})\,;\boldsymbol{\tau} >=< \mathbf{F}(T\boldsymbol{\theta})\,;T\boldsymbol{\tau} > \quad (\forall r > 0, \forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau} \in S(\mathbf{0}, r), \forall T \in SO(n)). \tag{1.1}$$

További logikus feltevés, hogy az erőtérben nincsenek ugrálások, hirtelen nagy változasok, azaz az erőtér *folytonos*, és az is világos, hogy egyre távolabb a gravitációs vonzerő egyre kisebb lesz és tart a nullához (nagyon távol nem észlelünk érdemi erőhatást).

Végül egy utolsó feltételünk is lehet, ami azt fogalmazza meg, hogy van értelme a tömegpont fogalmával dolgoznunk, sőt ez nem csak első közelítésben helyes, hanem matematikai precizitással is.

A Nap gravitációs terében elképzelve egy kiterjedt testet (bolygót, üstököst), annak kis darabjaira hat az erőtér, úgy, amint azt a gravitációs törvény előírja. Az egyes nagyon kis térfogatrészekben elhelyezkedő test-darabok már tényleg tömegpontnak tekinthetőek, és a kiterjedt testek mechanikájában szokásos feltevés szerint az ezekre ható erőket a klasszikus mechanika törvényei szerint lehet összeadni. Azaz eredőjük egy erőpár forgatónyomatéka és egy közös támadáspontban felvett, az eredeti erők vektorösszegével egyenlő eredő erő hatását fogja mutatni.

Mi lesz itt a vektorösszeg, ha a test térfogati felbontása egyre finomodik? Mivel az erőtér a normált egységnyi tömegre ható erő, súlyoznunk kell a térfogatrészecskékben elhelyezkedő tömeggel, azaz határátmenetben a térfogati sűrűséggel. Jelölje ezt most $\rho(\mathbf{x})$: akkor az eredő erő $\int\int\int_V \mathbf{F}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Ha most ismét szimmetriát keverünk bele a feltevéseinkbe, és feltesszük, hogy a vizsgált V bolygó konstans $\rho \equiv 1$ sűrűségű, és mondjuk r sugarú gömb az $\mathbf{x}$ körül, akkor azt kapjuk, hogy a forgatónyomatéknak el kell tűnnie a szimmetria miatt, az eredő erő pedig a fenti integrállal fejezhető ki. Ugyanakkor, ha az egész M bolygótömeg a tömegközéppontban elhelyezkedő egyetlen, pontszerű tömegpontban volna koncentrálódva, akkor az erő $M\mathbf{F}(\mathbf{x})$ kellene legyen. Mármost annak matematikai megfogalmazása, hogy a tömegpontok használata a gravitációelméletben nem csak egy jó közelítés, hanem egy matematikailag pontosan teljesülő fizikai tulajdonsága a gravitációs erőtérnek, erőtörvénynek, azt jelenti, hogy a fenti két mennyiség egyenlő.

Az M tömeget a feltételezett 1 sűrűségből és a bolygótest pontos alakjából ki is számolhatjuk: $M = \omega_d r^d$, ahol ω_d az egységgömb térfogata. Ezzel átosztva a tömegpont használatának matematikai egzaktságára vonatkozó feltételünk az

$$M(\mathbf{F}, r, \mathbf{x}) := \frac{1}{\omega_d r^d} \int\int\int_V \mathbf{F}(\mathbf{y}) dy = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

alakot ölti. Ez a feltevés pedig azt fejezi ki, hogy az $\mathbf{F}$ erőtér eleget tesz az ún. *középérték-tételnek*, ami valóban alapvető fontosságú. A középérték-tételnek eleget tevő függvényeket nevezzük *harmonikus* függvényeknek az analízisben: szokás azt mondani, hogy a potenciálelmélet nem más, mint a harmonikus függvények elmélete. Egy D tartományon harmonikus függvényeket általában $\mathcal{H}(D)$ jelöli.

Később (a harmonikus függvények alaptételénél), látni fogjuk, hogy a középérték-tulajdonsággal definiált harmonikusság ekvivalens egy másik alapvető analízisbeli tulajdonsággal, azzal, hogy a függvény *Laplace-tulajdonságú*, azaz eleget tesz az ún. *Laplace-egyenletnek*: $\Delta F = \mathbf{0}$, azaz koordinátánként $\Delta F_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$. Ez már tiszta analízis, amit későbbre hagyhatunk, de alább megvizsgáljuk, milyen lehet az az erőtörvény, amely kielégíti a fenti természetes feltételeket. A feltételek tehát:

1. (Szimmetria.) Az origóban elhelyezett tömegpont (gravitációs töltés) az (1.1) forgásszimmetria-feltételnek megfelelő $\mathbf{F}$ gravitációs erőteret hoz létre.

2. (Folytonosság.) Az $\mathbf{F}$ gravitációs erőtér $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$-ban folytonos.

3. (Eltűnés a végtelenben.) Az $\mathbf{F}$ gravitációs erőtér ∞-ben 0-hoz tart.

4. (Középérték-tulajdonság.) Az $\mathbf{F}$ gravitációs erőtér – illetve ennek minden F_j koordináta-függvénye – eleget tesz az (1.2) középérték-tulajdonságnak.

5. (Konzervativitás.) Legalábbis $d = 2$ esetén még azt is feltesszük, hogy az $\mathbf{F}$ gravitációs erőtér *konzervatív*.

Első lépésünk az lesz, hogy csak az első feltevéssel (forgásszimmetria) belátjuk, hogy az erőnek centrálisnak kell lennie. Ez megy is, ha a dimenzió legalább 3; ha $d = 2$, akkor még egy feltevést is felhasználunk majd, nevezetesen az ötötdiket, ti. hogy az erőtér konzervatív legyen. Gondoljuk meg, hogy ez mit jelent! Nekünk csak az a nagyon speciális eset kell belőle, hogy ha egy bolygó tömegpont körpályán kering a Nap körül, akkor a teljes körforgás során végzett össz munka (elvesztett vagy felhalmozott energia) összességében 0 lesz. Gondoljunk bele, mennyire természetes ez a feltevés is, hiszen különben állandóan gyorsítani vagy éppen lassítani kellene a bolygónkat, ami természetellenes feltevésnek mutatkozik. Feltehettük volna eleve ezt a feltevést is mindjárt az elején, de mivel csak $d = 2$ esetén van rá egy kis szükség, általában nem is tesszük fel.

1.1.1. Tétel. *Forgásszimmetrikus, és $d = 2$ esetén konzervatív erőtér mindig centrális irányú.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\mathbf{F}(\mathbf{e}) = \mathbf{F}((1, 0, ..., 0))$ centrális irányú, azaz $\mathbf{e}$ irányú. Forgásszimmetria miatt ekkor ez átmegy minden pontra az egységgömbön: s mivel itt az egységgömbnek semmi speciális szerepe nincs, ugyanígy igaz lesz mindenütt is.

Ha a síkon vagyunk, akkor csak egy további bázisvektor van $\mathbf{e}$ mellett: legyen ez $\mathbf{u}$. Nyilván az $\mathbf{F}(\mathbf{e})$ vektort e két vektor bázisában felírhatjuk: $\mathbf{F}(\mathbf{e}) = a\mathbf{e} + b\mathbf{u}$.

Az összes ortogonális transzformáció ekkor a körcsoport forgatásaival írható le: legyen $T = T_\alpha$ az α szögű elforgatás. Ekkor a forgásszimmetria feltételéből következően

$$\begin{aligned}(a, b) &= (< \mathbf{F}(\mathbf{e})\,; \mathbf{e} >, < \mathbf{F}(\mathbf{e})\,; \mathbf{u} >)\\ &= < \mathbf{F}(T\mathbf{e})\,; T\mathbf{e} >, < \mathbf{F}(T\mathbf{e})\,; T\mathbf{u} >) \qquad (T = T_\alpha, \forall\alpha \in [0, 2\pi]).\end{aligned}$$

Tehát, ha mondjuk az α irányba mutató $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ egységvektort $\mathbf{e}(\alpha)$ jelöli, akkor

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}(\alpha)) = a\mathbf{F}(\mathbf{e}(\alpha)) + b\mathbf{F}(\mathbf{e}(\alpha + \pi/2)) \qquad (\forall\alpha \in [0, 2\pi]).$$

Most a C egységkör mentén körbemenvén a végzett munka nyilván

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(\alpha))d\mathbf{e}(\alpha) &= \int_0^{2\pi} (a\mathbf{e}(\alpha) + b\mathbf{e}(\alpha + \pi/2))\frac{d}{d\alpha}\mathbf{e}(\alpha)d\alpha\\ &= \int_0^{2\pi} \langle\, a\mathbf{e}(\alpha) + b\mathbf{e}(\alpha + \pi/2), (-\sin\alpha, \cos\alpha)\rangle d\alpha\\ &= -\int_0^{2\pi} b(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)d\alpha = -2b\pi.\end{aligned}$$

Mivel az erőtér konzervatív volt, ennek el kell tűnnie, tehát $b = 0$ és az erőtér centrális.

Ha most $d > 2$, akkor kicsit egyszerűbben célhoz érünk. Írjuk fel ugyanis az $\mathbf{F}(\mathbf{e})$ vektort a térben egy centrális és egy arra merőleges, tehát tangenciális erő eredőjeként: $\mathbf{F}(\mathbf{e}) = a\mathbf{e} + b\mathbf{u}$, ahol $\mathbf{u}$ valamilyen tangenciális egységvektor. Tekintsük a tér egy olyan bázisvektor-rendszerét, amelyben az első bázisvektor $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$, a második $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$, a többiek pedig rendre $\mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_d$. Mivel $d > 2$, legalább három bázisvektor van. Legyen most a forgásszimmetriáról szóló feltevés szerint felhasználható T ortogonális transzformáció olyan, amelyik helybenhagyja az összes bázisvektort, kivéve a másodikat és a harmadikat, amelyeket megcserél. Pontosabban, $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ és $T(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2$ a T körüljárás-tartó értelmezésének megfelelően. Nyilván T mátrixa majdnem az identitás mátrix, kivéve, hogy a második és harmadik sor és oszlop metszete éppen a derékszögű elforgatás mátrixa lesz (első sor 0,1, második sor -1,0). Elég lesz erre a transzformációra és $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}$-ra alkalmazni a feltételt. Kapjuk, hogy $b = <\mathbf{F}(\mathbf{e})\,;\mathbf{u}> = <\mathbf{F}(T\mathbf{e})\,;T\mathbf{u}> = <\mathbf{F}(\mathbf{e})\,;\mathbf{e}_3> = < a\mathbf{e} + b\mathbf{u}\,;\mathbf{e}_3> = 0$, tehát $b = 0$, amint akartuk.

1.2. Segédeszközök a vektoranalízisből

Tekintsünk egy folytonos erőteret, amely az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ pontban $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ erővel hat az egységnyi próbatestre. Legyen C egy $\mathbf{r}(s) : I \to \mathbb{R}^d$ paraméterezésű, szép, sima görbe, amelyen egy pontszerű, egységnyi próbatest megy végig, miközben az erőtér $\mathbf{F}$ erővel hat rá. Ekkor az erőtér által végzett munka

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{r}(s) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{r}'(s)ds \qquad (I = [t_0, t_1]).$$

Alapvető fizikai kérdés: mikor lesz az úttól független a munka?

1.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* **F konzervatív erőtér** $\mathbb{R}^d$*-ben (vagy egy* $D \subset \mathbb{R}^d$ *tartományban), ha* $\forall P, Q \in \mathbb{R}^d$ *(illetve* $\forall P, Q \in D$*) pontpárra és* $C = C_{P,Q}$*,* P*-ből* Q*-ba menő, (*$C \subset D$*) szép, sima (minimum: rektifikálható Jordan) ívre a munka állandó, azaz*

$$W_{P,Q} := \int_{C_{P,Q}} \mathbf{F}d\mathbf{r}$$

nem függ $C_{P,Q}$-tól.

Megjegyzés. Minden ilyen $W_{P,Q}$ úttól független mennyiséget leírhatunk egyetlen, tetszőleges, de rögzített $O \in D$ pontból induló görbék menti munkák különbségeként: $W_{P,Q} = W_{P,O} - W_{Q,O}$.

1.2.2. Definíció. *$W(P)$ az $\mathbf{F}$ erőtér egy* **potenciálfüggvénye**, *ha $\forall P, Q \in D$ esetén $W_{P,Q} = W(P) - W(Q)$.*

Nyilván minden potenciálfüggvény $W(P) + \text{const.}$ alakú.

1.2.3. Definíció. *Az $\mathbf{F}dx$ differenciál ($F_1dx_1 + \cdots + F_ddx_d$ 1-forma vagy 1 rendű differenciál-forma)* **egzakt**, *ha létezik olyan $f \in \mathbf{D}(D)$ differenciálható függvény, hogy $\mathbf{F} = \nabla f (= \operatorname{grad} f)$ a D tartományon.*

1.2.1. Tétel. *Egy $\mathbf{F} \in \mathbf{C}(D)$ vektormezőre nézve ekvivalensek az alábbiak.*

(i) $\mathbf{F}$ konzervatív erőtér D-n;

(ii) $\mathbf{F}$-nek létezik f potenciálfüggvénye D-n;

(iii) $\mathbf{F}dx$ egzakt differenciál D-n.

Bizonyítás. $(i) \implies (ii)$. Tekintsük a $W(P) := W_{O,P}$ függvényt: könnyen látható, hogy W potenciálja az f-nek.

$(ii) \implies (iii)$. Mivel $P \in D$, ahol D nyílt, vehető P egy kis környezete és ebben egy olyan út, amely P-n átmegy és $\mathbf{e}_j$ irányú. Ekkor $\frac{\partial W}{\partial x_j}(P) = \lim_{h\to 0} \frac{W_{P,P+h\mathbf{e}_j}}{h} = F_j(P)$ adódik ($j = 1, \ldots, d$). Tehát $\nabla W = \mathbf{F}$, W primitív függvény, és $\mathbf{F}dx$ egzakt.

$(iii) \implies (i)$. $W_{P,Q} = \int_{C(P,Q)} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \nabla f(\mathbf{r}(s))\mathbf{r}'(s)ds = [f(\mathbf{r}(s))]_{t_0}^{t_1} = f(P) - f(Q)$ fügetlen az úttól.

Van még egy (majdnem) ekvivalens megfogalmazása annak, hogy a munka az úttól független: három dimenzióban ez a rotációval történik és egyszeresen összefüggő tartományon alkalmazható.

1.2.2. Tétel. *Ha $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in \mathbf{C}^1(D)$ konzervatív erőtér a D tartományon, akkor $\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$. Megfordítva, ha $\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{F}$ konzervatív erőtér minden $G \subset D$ egyszeresen összefüggő tartományon; speciálisan, ha maga D egyszeresen összefüggő, akkor az egész D tartományon.*

Bizonyítás. $\mathbf{F}$ konzervatív $\iff$ $\mathbf{F}=\nabla f$. De ebben az esetben $\operatorname{rot}\mathbf{F}\equiv\mathbf{0}$, mert rot grad $\equiv\mathbf{0}$ mint operátor. Szimbolikusan: $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}$, $\nabla f=\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f=\nabla\times\nabla\mathbf{F}=0$, mert a "skaláris" f és a vektor ∇ szorzata párhuzamos a *nabla* vektorral, és így ezek vektoriális szorzata eltűnik. Precízen: Young tételét felhasználva adódik, hogy

$$\mathbf{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)-\mathbf{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)=\mathbf{0}.$$

Megfordítva, ha $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\mathbf{0}$ és $C\subset G$ olyan sima és zárt Jordan-görbe, amely egy $S\subset G$ felület határát adja, $\partial S=C$ – ami akkor létezik minden C-re, ha G egyszeresen összefüggő, – akkor *Stokes tételére* hivatkozva kapjuk, hogy

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{r}(s)=\int\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma(S)=0.$$

Ennek is van megfelelője általában d dimenzióban, csak a vektoriális szorzás és a rotáció fogalmának, illetve a Stokes tételnek a megfelelőire van hozzá szükség. Ezt az általánosítást a *külső differenciális formák* segítségével lehet leírni.

1.2.4. Definíció. (Külső differenciális formák) *$\mathbb{R}^d$ egy k rendű külső differenciál-formája alatt egy*

$$\omega(\mathbf{x})=\sum_{\substack{i=(i_1,\dots,i_k)\\ 1\le i_1\le\dots\le i_k\le d}} a_i(\mathbf{x})dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$$

kifejezést kell érteni, ahol $a_i(\mathbf{x})$ sima függvények.

A differenciális formák tere lineáris tér, amelyet a $dx_i dx_j=-dx_j dx_i$ formulával összekapcsolt, a tömör multiindexes írásmódban csak $d\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ formában jelölt bázisvektorok feszítenek ki. Differenciálformák között alkalmazható a (*ék-szorzás* vagy *külső szorzat*) művelete és a differenciálás is, előbbi a fenti algebrai szabály, utóbbi a természetes

$$d\omega:=\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{|\mathbf{i}|=k}\frac{\partial a_{\mathbf{i}}}{\partial x_\ell}(\mathbf{x})dx_\ell d\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$$

képlet felhasználásával. Ez természetesen k-formából $k+1$-formát csinál, és sima együttható-függvények mellett (amit mindig felteszünk) a Young-tételt alkalmazva könnyen látható, hogy a bázisvektorok ék-szorzatának alternálására vonatkozó fenti algebrai szabály miatt $dd\omega\equiv\mathbf{0}$ minden ω-ra.

(új def.?)

1.2.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy k forma* **zárt**, *ha már $d\omega = \mathbf{0}$. Azt mondjuk, hogy egy $k \geq 1$ forma* **egzakt**, *ha létezik hozzá olyan τ "primitív" $k-1$ forma, amelyre $d\tau = \omega$.*

Nyilván ha ω egzakt, akkor $d\omega = dd\tau = \mathbf{0}$, tehát ω zárt is lesz.

1.2.3. Tétel. *Ha V* $\subset \mathbb{R}^d$ *elég szép tartomány, és $E \subset\subset V$ is elég szép, sima kompakt test V-ben (amelyre az általános Stokes tétel alkalmazható), akkor tetszőleges $\omega \in \mathbf{C}^1(E)$ 1-rendű differenciál-formára a zártság és az egzaktság ekvivalensek.*

Ebből csak a zárt $\Longrightarrow$ egzakt az új, a másik irány triviális volt. Ezt az irányt viszont az általános Stokes tétellel lehet igazolni.

1.2.4. Tétel. (Stokes tétele). *Legyen V* $\subset \mathbb{R}^d$ *egy nyílt tartomány és Ψ egy irányított k-felület, $\Psi \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^k \to V)$, amelynek képhalmaza vagy egyszeresen összefüggő, vagy konvex, vagy konvex paramétertartomány $\mathbf{C}^2$ képe. Legyen továbbá $\omega \in \mathbf{C}^1(V)$ egy k-forma. Ekkor*

$$\int\int\cdots\int_{\Psi} d\omega = \int\cdots\int_{\partial\Psi} \omega.$$

Ebből az általános tételből könnyen beláthatjuk, hogy egy ω zárt 1-forma egzakt is. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges C sima, irányított, zárt görbét, amely a sima $S \subset E$ felület határa. S paraméterezése, Ψ, így egy irányított 2-felület lesz, C paraméterezett alakja pedig $\partial\Psi$ lesz. Stokes tétele szerint és $d\omega = 0$

$$0 = \int\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega = \int_{C} \omega.$$

Ha tehát az ω 1-rendű differenciálforma $\omega = \mathbf{F}d\mathbf{x}$ alakú, akkor $\mathbf{F}$ konzervatív erőtér lesz, és így van W primitív függvénye, amelyre $\nabla W = \mathbf{F}$. Ez pedig azt jelenti, hogy a W 0-rendű formára (azaz függvényre) $dW = \mathbf{F}d\mathbf{x} = \omega$, tehát ω egzakt.

Az általános Stokes tétel egy jól ismert speciális esete (ti. a $k = d-1$ esete) a Gauss féle divergencia tétel.

1.2.5. Tétel. (Gauss divergencia tétele). *Legyen V egy nyílt tartomány és $E \subset\subset V$ konvex, vagy konvex paramétertartomány $\mathbf{C}^2$ képe, melynek határa az $A = \partial E$ sima, zárt irányított felület. Jelölje a felület menti normális* *egységvektort* $\mathbf{n}$, *a felületi integrált (felületi mértéket)* $d\sigma_A$. *Legyen továbbá* $\mathbf{F} \in \mathbf{C}^1(V)$. *Ekkor*

$$\int\int \cdots \int_E \operatorname{div} \mathbf{F} dx_1 \cdots dx_d = \int \cdots \int_A \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma_A.$$

Ennek közvetlen bizonyítása igen egyszerű mondjuk téglatestre – csak az egyváltozós Newton-Leibniz formulát kell felhasználni minden irányban a megfelelő $F_j(\mathbf{x})dx_j$ integrál kiszámításához. De teljesen hasonló a bizonyítás akkor is, ha az E kompakt résztartomány egy ún. "speciális tartomány", amelynek minden irányban van egy

$$E = \{\mathbf{x} : a_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d) \leq x_j \leq b_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d)\}$$

alakú paraméteres leírása. Végül az egész tartományt ilyenekre kell felbontani, illetve ilyenekre bontott tartományokkal kell közelíteni.

A Gauss divergencia tételt $\mathbf{F} := f \cdot \nabla g$, azaz $F_j := f g'_{x_j}$ és így $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^d (f g'_{x_j})'_{x_j}$ esetére alkalmazva nyerhető, mivel ekkor $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^d f g''_{x_j, x_j} + \sum_{j=1}^d f'_{x_j} g'_{x_j} = f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$, a z

1.2.6. Tétel. (Green első formulája.) *Ha* E *sima, kompakt test a* V *tartományban, és* $f, g \in \mathbf{C}^2(V)$, *akkor*

$$\int\int \cdots \int_E f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{\partial E = A} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\sigma_A.$$

Ennek szimmetrikus alakja áll elő, ha az (f, g) párra való alkalmazásból levonjuk a (g, f) párra adódó eredményt.

1.2.7. Tétel. (Green második formulája.) *Ha* E *sima, kompakt test a* V *tartományban, és* $f, g \in \mathbf{C}^2(V)$, *akkor*

$$\int\int \cdots \int_E (f \Delta g - g \Delta f) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{\partial E = A} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma_A.$$

Végül ha az egyik függvényt konstans 1-nek vesszük, akkor kapjuk

1.2.8. Tétel. (Green kis formulája.) *Ha E sima, kompakt test a V tartományban, és $w \in C^2(V)$, akkor*

$$\iint \cdots \int_E \Delta w d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{\partial E = A} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\sigma_A.$$

Ezekből a formulákból világosan kitűnik, hogy miért is alkalmazzák őket előszeretettel a harmonikus függvények elméletében.

1.3. Polárkoordináták és számolások ezekkel

Az előzőekben megállapítottuk, hogy pontszerű tömeg gravitációs erőtere és potenciálja a forgatásokra invariáns kell legyen, azaz az erőtér pontbeli vektora $\pm$ sugárirányú, nagysága egy gömbfelszínen állandó; a potenciálfüggvény szintfelületei a gömbfelszínek. Ha n elektron erőterét akarjuk meghatározni, az egyes elektronok erőterének szuperpozíciója (azaz additivitása) következik a fizikai szemléletből, így ilyen gömbszimmetrikus, csak távolságtól függő potenciálok összegét várjuk. Tömeg- vagy tölteseloszlás esetén az eloszlásfüggvény szerinti integrál lép az összegezés helyébe. Ha az „erőtörvény" eleget tesz fizikai szemléletünkből fakadó elvárásainknak, akkor a potenciál $U(\mathbf{x}) = \Phi(|\mathbf{x}|)$ alakú „alap függvény", illetve több pont és eloszlás esetén $\sum_{j=1}^{n} \Phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|)$, $\int \Phi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mu(\mathbf{y})$ alakú kell legyen. Az ilyen $\Phi(|\mathbf{x}|) = \Phi(r)$ alakú függvények kezelésére sokszor megfelelőbb a polárkoordináták használata, mint a szokásos derékszögű koordinátarendszer.

1.3.1. Definíció. *Az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor polárkoordinátái a*

$$(\boldsymbol{\theta}, r) = (\theta_1, \dots, \theta_d, r) := \left(\frac{x_1}{|\mathbf{x}|}, \frac{x_2}{|\mathbf{x}|}, \dots, \frac{x_d}{|\mathbf{x}|}, |\mathbf{x}|, \right); \ |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_d^2}$$

képlettel definiált $d+1$ koordináta; ezek közül $\boldsymbol{\theta} \in \partial B(\mathbf{0}, 1) = S(\mathbf{0}, 1)$, r a sugár (távolság).

Több különböző jelölésrendszer illetve felírás is forgalomban van, de a probléma az, hogy nem lehet az egész $\mathbb{R}^d$ illetve $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ teret folytonosan „leparaméterezni" (egy gömbfelszínt sem lehet) úgy, hogy r az egyik koordináta. Ugyanis $S(\mathbf{0}, r)$ topológiailag nem ekvivalens egy téglalappal ($B(\mathbf{0}, r) \setminus \{\mathbf{0}\}$ pedig nem ekvivalens egy téglatesttel), tehát egyetlen bijektív és folytonos leképezéssel nem lehet paraméterezni. Ezért a gömbfelszínt „atlasszal", több (elég két) térképpel lehet lefedni, és ezek választása, paraméterezése lehet többféle. Egy szokásos megoldás a felső- és alsó félgömböket $(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}, r)$-rel paraméterezni, ami persze megint nem teljesen tökéletes ($\theta_d = 0$ körül nincs sima átfedés, és maga a paraméterezés sem differenciálható).

Ugyanakkor a lokális eredményeket az invariáns forgatás sokszor átviszi „sima" pontokból a „zűrös" pontokba is.

Jelölje

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}, r) =$$

$$= (x_1, \ldots, x_d) = (\theta_1 r, \ldots, \theta_{d-1} r, \sqrt{1 - \theta_1^2 - \cdots - \theta_{d-1}^2}\ r) = \mathbf{x},$$

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_d) = \varphi(\mathbf{x}) = (\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}, r) = \left(\frac{x_1}{|\mathbf{x}|}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{|\mathbf{x}|}, |\mathbf{x}| \right)$$

a polárkoordináták és a derékszögű koordináták közötti transzformációkat (a felső féltérben, azaz ahol $\theta_d = +\sqrt{1 - \theta_1^2 - \cdots - \theta_{d-1}^2} \geq 0$). Szokásos (a felső féltér $\mathbf{x}$ pontjához tartozó) polárkoordináták alatt $\varphi(\mathbf{x})$-et is érteni.

Ha $f(\mathbf{x}) = f(\boldsymbol{\xi}(\varphi)) = \Phi(\varphi)$, akkor a láncszabály miatt

$$\frac{d\Phi}{dr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \frac{df}{dx_i}(\mathbf{x})\ \frac{dx_i}{dr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \frac{df}{dx_i}(\mathbf{x}) \cdot \theta_i,$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \frac{df}{dx_i}(\mathbf{x})\ \frac{dx_i}{d\theta_j}(\varphi) =$$

$$= \frac{df}{dx_j}(\mathbf{x}) \cdot r + \frac{df}{dx_d}(\mathbf{x}) \cdot \frac{-r\,\theta_j}{\sqrt{1 - \theta_1^2 \cdots - \theta_{d-1}^2}} = r \left(\frac{df}{dx_j} - \frac{\theta_j}{\theta_d}\,\frac{df}{dx_d} \right)$$

Legyen pl. $f_k(\mathbf{x}) := x_k$ $(k = 1, \ldots, d)$, akkor $\Phi_k(\varphi) := x_k$ mellett

$$\frac{d\Phi_k}{dr}(\varphi) = \theta_k\,, \quad \frac{d\Phi_k}{d\theta_j}(\varphi) = \begin{cases} r & \text{ha } j = k < d, \\ -\frac{\theta_j}{\theta_d} r & \text{ha } k = d, \\ 0 & \text{ha } j \neq k \neq d, \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, d-1).$$

Ebből kiszámolható a polárkoordinátás helyettesítés Jacobi mátrixa:

$$J\left(\frac{d\mathrm{x}}{d\varphi}\right) = \det\left(\frac{\partial x_k}{\partial \varphi_j}\right)_{\substack{j=1,\dots,d\\k=1,\dots,d}} = \det\begin{pmatrix} r & 0 & \dots & -\frac{\theta_1}{\theta_d}\,r \\ 0 & r & \dots & \frac{-\theta_2}{\theta_d}\,r \\ \vdots & \vdots & & \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_d \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \sum_{j=1}^{d}\frac{\theta_j^2}{\theta_d} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\theta_d} \end{pmatrix} = r^{d-1}\frac{1}{\theta_d}\,.$$

Látható, hogy ez nem forgásszimetrikus alak - nem is lehet az, mert a paraméterezés sem az. Ha térfogati, felületi $\int$-t szimmetrikusan akarunk kezelni, akkor az $\mathbb{R}^{d-1}$-beli $(\theta_1,\dots,\theta_{d-1})$-kiválasztásából eredő aszimmetriát eltüntetjük, viszatérve a gömbfelületre.

Ekkor a $\boldsymbol{\varphi} = (\theta_1,\dots,\theta_{d-1},r) = (\boldsymbol{\sigma},r)$ paramétereknek megfeleltetjük a $(\boldsymbol{\theta},r) = (\theta_1,\dots,\theta_{d-1},\theta_d,r)$ paramétereket, azaz az $\mathbb{R}^{d-1}$-beli $(\theta_1,\dots,\theta_{d-1}) = \boldsymbol{\sigma}$ paraméterekkel paraméterezzük a $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_d)$ gömbfelületet. Ennek a transzformációnak a során a $\boldsymbol{\varphi}$ (ill. $\boldsymbol{\sigma}$) $\mathbb{R}^d$ (ill. $\mathbb{R}^{d-1}$) beli d (ill. $d-1$) dimenziós paraméter-tartományból az eggyel magasabb dimenziós térben fekvő, de ugyanúgy d (ill. $d-1$) dimenziós felületet kapjuk, és a leképezés a $\theta_d := \sqrt{1-\theta_1^2-\ldots-\theta_{d-1}^2}$ függvény gráfját rajzolja. A felületi ill. térbeli integrál helyettesítésekor, ha $F^*(\boldsymbol{\theta}) = \phi^*(\boldsymbol{\sigma})$, azt kapjuk, hogy a felületi normális vektor

$$\mathrm{N}\left(\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\boldsymbol{\sigma}}\right) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1, & \dots, & \mathbf{e}_d \\ \frac{d\theta_1}{d\theta_1} & \dots & \frac{d\theta_d}{d\theta_1} \\ \vdots & & \\ \frac{d\theta_1}{\partial\theta_{d-1}} & \dots & \frac{\partial\theta_d}{\partial\theta_{d-1}} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_d \\ 1 & 0 & \dots & -\frac{\theta_1}{\theta_d} \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{\theta_2}{\theta_d} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1-\frac{\theta_{d-1}}{\theta_d} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{d-1}\left(\frac{\theta_1}{\theta_d},\dots,\frac{\theta_{d-1}}{\theta_d},1\right)\left(= \frac{(-1)^{d-1}}{\theta_d}\boldsymbol{\xi} = \frac{(-1)^{d-1}}{x_d}\cdot\mathbf{x}\right);$$

$$|\mathbf{N}| = \left|\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\boldsymbol{\sigma}}\right| = \sqrt{\left(\frac{\theta_1}{\theta_d}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\theta_{d-1}}{\theta_d}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\theta_d},$$

azaz

$$\int \dots \int \phi^*(\boldsymbol{\sigma}) \frac{1}{\theta_d} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1} = \int \dots \int F^*(\boldsymbol{\theta}) d\sigma_{S(\mathbf{0},1)}.$$

Összevetve ezt az előbbiekkel nyerjük, hogy $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\sigma}, r)$ és $\phi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, r)$, $F^*(\boldsymbol{\theta}) = F(\boldsymbol{\theta}, r)$ mellett

$$\iint \dots \int f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_d = \iint \dots \int \Phi(\boldsymbol{\varphi}) r^{d-1} \frac{1}{\theta_d} d\boldsymbol{\varphi} =$$

$$\int \left(\int \dots \int \Phi(\boldsymbol{\sigma}, r) \frac{1}{\theta_d} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1} \right) r^{d-1} dr =$$

$$= \int r^{d-1} \left(\int \dots \int F(\boldsymbol{\theta}, r) d\sigma_{S(\mathbf{0},1)} \right) dr = \iint \dots \int F(\boldsymbol{\theta}, r) d\sigma_{S(\mathbf{0},r)} dr,$$

figyelembe véve a $\sigma_{S(\mathbf{0},1)} \to \sigma_{S(\mathbf{0},r)}$ közötti triviális áttérést is. Ha tehát $\mathbf{x} \leftrightarrow (\boldsymbol{\theta}, r)$, $f(\mathbf{x}) = F(\boldsymbol{\sigma}, r)$ megfeleltetést végzünk, akkor az $\int$ transzformáció

$$\iint \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n = \iint \dots \int F \, d\sigma_{S(\mathbf{0},r)} dr$$

Megjegyzés: $\frac{1}{\theta_d} = \frac{1}{\cos\langle \mathbf{e}_d, \mathbf{n}\rangle}$; $S(\mathbf{0}, r)$ körüli vékony gömbhéjon is "kilimeszezhető" a formula.

Hogyan változnak a deriváltak, illetve a magasabb rendű deriváltak és a differenciál-operátorok? Láncszabály alapján

$$\frac{df}{dx_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d-1} \frac{d\Phi}{d\theta_j}(\boldsymbol{\varphi}) \frac{d\theta_j}{dx_i} + \frac{d\Phi}{dr}(\boldsymbol{\varphi}) \frac{dr}{dx_i}. \tag{1.3}$$

Itt

$$\frac{d\theta_j}{dx_i} = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}}\right) =$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}} - \frac{x_j x_i}{(x_1^2+\cdots+x_d^2)^{3/2}} = \tag{1.4}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_j x_i}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\delta_{ij}-\theta_j\theta_i}{r} \qquad (j=1,\ldots,d-1,\ i=1,\ldots,d),$$

$$\frac{dr}{dx_i} = \frac{d}{dx_i}\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}\right) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}} = \tag{1.5}$$

$$= \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = \theta_i \qquad (i=1,\ldots,d).$$

Ugyanazon x_i koordinátafüggvény szerinti második parciális deriváltak a polárkoordináta függvényekre:

$$\frac{d^2\theta_j}{dx_i^2} = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^3}\right) = \frac{-\delta_{ij}x_i}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{\delta_{ij}x_i}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{3x_j x_i^2}{|\mathbf{x}|^5} =$$

$$= \frac{1}{r^2}(3\theta_j\theta_i^2 - \theta_j - 2\delta_{ij}\theta_j) \qquad (j=1,\ldots,d-1,\ i=1,\ldots,d), \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2 r}{dx_i^2} = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{x_i}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_i^2}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{1-\theta_i^2}{r} \qquad (i=1,\ldots,d). \tag{1.7}$$

Alkalmazzuk a Leibniz-szabályt szorzat deriválására (1.3)-ban:

$$\frac{d^2 f}{dx_i^2} = \sum_{j=1}^{d-1} \left\{ \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\right)\frac{d\theta_j}{dx_i} + \frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\cdot\frac{d^2\theta_j}{dx_i^2} \right\} +$$

$$+ \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\right)\frac{dr}{dx_i} + \frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\cdot\frac{d^2 r}{dx_i^2} = \text{ (1.4), (1.5),(1.6) és (1.7) beírásával}$$

$$= \sum_{j=1}^{d-1} \left\{ \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\right)\cdot\frac{\delta_{ij}-\theta_j\theta_i}{r} + \frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\cdot\frac{3\theta_j\theta_i^2-\theta_j-2\delta_{ij}\theta_j}{r^2} \right\} \tag{1.8}$$

$$+ \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\right)\cdot\theta_i + \frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\frac{1-\theta_i^2}{r} .$$

Ismét a láncszabályt, azaz (1.3)-t alkalmazzuk $\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{d\theta_j}\right)$ és $\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)$ további kiszámítására, ezúttal a futó indexet k-val jelölve:

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\right) = \sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k d\theta_j}\cdot\frac{d\theta_k}{dx_i} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr d\theta_j}\frac{dr}{dx_i} = \tag{1.9}$$

$$= \sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k d\theta_j}\frac{\delta_{ik}-\theta_i\theta_k}{r} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr d\theta_j}\theta_i \quad (j=1,\ldots,d-1,\ i=1,\ldots,d)$$

és

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\right) = \sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k dr}\frac{d\theta_k}{dx_i} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr^2}\frac{dr}{dx_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k dr}\frac{\delta_{ik}-\theta_i\theta_k}{r} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr^2}\theta_i \ \ (i=1,\ldots,d). \tag{1.10}$$

Alkalmazzuk most (1.8)-ben az (1.9) és (1.10) formulákat:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx_i^2} = &\sum_{j=1}^{d-1} \frac{\delta_{ij} - \theta_j\theta_i}{r}\left\{ \sum_{k=1}^{d-1} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k d\theta_j}\, \frac{\delta_{ik} - \theta_i\theta_k}{r} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr\,d\theta_j}\theta_i \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{d-1} \frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\, \frac{3\theta_j\theta_i^2 - \theta_j - 2\delta_{ij}\theta_j}{r^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{d-1} \theta_i\, \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k dr}\, \frac{\delta_{ik} - \theta_i\theta_k}{r} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr^2}\,\theta_i^2 + \\ &+ \frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\, \frac{1-\theta_i^2}{r}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Young tétele szerint az utolsó $\sum$ az első $\sum$ második felével összevonható. Rendezés után (1.11)-ből

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx_i^2} = &\sum_{j=1}^{d-1}\sum_{k=1}^{d-1} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k d\theta_j}\, \frac{\delta_{ij}\delta_{ik} + \theta_j\theta_k\theta_i^2 - \delta_{ij}\theta_i\theta_k - \delta_{ik}\theta_j\theta_i}{r^2} + \\ &+ 2\sum_{j=1}^{d-1} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr\,d\theta_j}\, \frac{\theta_i(\delta_{ij} - \theta_j\theta_i)}{r} + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\, \frac{3\theta_j\theta_i^2 - \theta_j - 2\delta_{ij}\theta_j}{r^2} + \\ &+ \frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\frac{1-\theta_i^2}{r} + \frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr^2}\,\theta_i^2\,.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Ebből az alakból i szerinti összegzéssel kapjuk a Laplace operátor polárkoordinátás alakját. A $\sum_{i=1}^{d}$ összegzést a többszörös szummákon legbelülre víve nyerjük — mivel $\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2 = 1$, — hogy

$$\begin{aligned}
\Delta f = & \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k d\theta_j}\frac{1}{r^2}\left(\delta_{jk}+\theta_j\theta_k\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2-\theta_j\theta_k-\theta_j\theta_k\right)+ \\
& +\frac{2}{r}\sum_{j=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{dr d\theta_j}\left(\theta_j-\sum_{i=1}^{d}\theta_j\theta_i^2\right)+\sum_{j=1}^{d-1}\frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)\frac{\theta_j}{r^2}\left\{3\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2-d-2\right\}+ \\
& +\frac{d\Phi}{dr}(\varphi)\left(\frac{d}{r}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2\right)+\frac{d^2\Phi}{dr^2}(\varphi)\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2 \qquad (1.13) \\
= & \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_j d\theta_k}\frac{1}{r^2}(\delta_{jk}-\theta_j\theta_k)-\frac{d-1}{r^2}\sum_{j=1}^{d-1}\frac{d\Phi}{d\theta_1}(\varphi)\cdot\theta_j+ \\
& +\frac{d-1}{r}\frac{d\Phi}{dr}(\varphi)+\frac{d^2\Phi}{dr^2}(\varphi),
\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
\Delta f(\mathbf{x}) = & \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{d-1}\left\{\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_j^2}-(d-1)\theta_j\frac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi)-\sum_{k=1}^{d-1}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta_k d\theta_j}\cdot\theta_k\theta_j\right\}+ \\
& +\frac{d-1}{r}\frac{d\Phi}{dr}(\varphi)+\frac{d^2\Phi}{dr^2}(\varphi). \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $f(\mathbf{x}) = F(|\mathbf{x}|)$ alakú, csak az $\mathbf{0}$-tól vett távolságtól függő – azaz gömbszimmetrikus – függvény. Mikor lehet ez harmonikus függvény?

1.3.1. Tétel. (Laplace egyenlet alapmegoldása). *Ha $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ gömbszimmetrikus függvény és az $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tartományon $\Delta f \equiv 0$ (azaz ha $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$), úgy*

$$f(\mathbf{x}) = F(r) = A\ \Phi_d(r) + B, \quad A, B \text{ konstans, ahol}$$

$$\Phi_d(r) = \begin{cases} -\log r & d = 2 \\ r^{2-d} & d > 2 \end{cases}$$

a Laplace egyenlet ún. alapmegoldása. Ugyanez a megoldás akkor is, ha csak $f \in \mathcal{H}(B(\mathbf{0}, R_2) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, R_1)})$ valamely $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$ mellett.

Bizonyítás. Ha f $\mathbf{0}$ körül forgásszimmetrikus (csak r-től függ), akkor (12)-ben, a Laplace egyenlet polárkoodinátákban felírt alakjában, $\Phi(\varphi) = \Phi(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}, r) = F(r)$ és $\dfrac{d\Phi}{d\theta_j}(\varphi) \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, d-1)$. Ezért a Laplace-operátor (1.13) helyett a sokkal egyszerűbb

$$\Delta f = \frac{d-1}{r} F'_r + F''_{rr} \tag{1.15}$$

alakot ölti, ahol $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (illetve $(R_1, R_2) \to \mathbb{R}$) $\mathbf{C}^2$ függvény. Ebből a Laplace-egyenletre azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dr}\left(r^{d-1} F'_r\right) \cdot r^{1-d} = \frac{d-1}{r} F'_r + F''_{rr} = 0 \ ,$$

$$r^{d-1} F'_r = C, \quad F'_r = C r^{1-d}, \quad F(r) = C \int_{R_0}^{r} \varrho^{1-d} d\rho + C',$$

és ezzel a Tétel következik.

1.3.1. Következmény. *Ha* $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, *és* $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(B(\mathbf{0}, R_2) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, R_1)})$ *forgásszimmetrikus és konzervatív erőtér, akkor*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A \operatorname{grad} \Phi_d(|\mathbf{x}|) + C\mathbf{x} \ .$$

Bizonyítás. $\mathbf{F}$ konzervatív erőtér, $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ egy U potenciálfüggvényre. Lássuk be először, hogy U is forgásszimmetrikus! Egy tetszőleges, az $S(\mathbf{0}, R)$ gömbfelszínen elhelyezkedő teljes C főkör mentén vett körintegrál a konzervativitás miatt 0, ugyanakkor a szimmetria miatt

$$0 = \oint_C \mathbf{F} d\mathbf{x} = 2\pi R \langle \mathbf{F}(R, 0, ..., 0), C'(R, 0, ..., 0) \rangle,$$

tehát $\operatorname{grad} U = \mathbf{F}$ merőleges minden $S(\mathbf{0}, R)$-beli C főkörre és így minden felszíni görbére is, azaz csak normális irányú lehet. Ekkor pedig két $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in S(\mathbf{0}, R)$ pont között a felületen maradó $C(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ görbe mentén integrálva

$$U(\mathbf{z}) - U(\mathbf{y}) = \int_{C(\mathbf{y},\mathbf{z})} \mathbf{F} \, d\, \mathbf{x} = 0,$$

tehát az U potenciál függvény valóban gömbszimmetrikus.

Második lépésben vegyük észre, hogy ha $\Delta F_j(\mathbf{x}) = 0$, az azt jelenti, hogy

$$0 \equiv \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta U) ,$$

tehát $\mathbf{F}$ harmonicitásából következik, hogy

$$\text{grad } (\Delta U) \equiv \mathbf{0} , \qquad \Delta U \equiv c .$$

Tekintsük most az U val együtt forgásszimmetrikus

$$V(\mathbf{x}) := U(\mathbf{x}) - \frac{c}{2d} |\mathbf{x}|^2$$

függvényt, amelyre ezek szerint $\Delta V(\mathbf{x}) = \Delta U(\mathbf{x}) - \frac{c}{2d} \Delta(|\mathbf{x}|^2) = c - \frac{c}{2d} \cdot 2d = 0$. V-re alkalmazható a fenti Tétel, és így

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \text{grad } U(\mathbf{x}) = & \text{ grad } \left(V(\mathbf{x}) + \frac{c}{2d} |\mathbf{x}|^2 \right) \\ = & \text{ grad } \left(A\Phi_d(r) + B + \frac{c}{2d} |\mathbf{x}|^2 \right) = A \text{ grad } \Phi_d(\mathbf{x}) + \frac{c}{2d} \cdot 2\mathbf{x} \\ = & A \text{ grad } \Phi_d(\mathbf{x}) + C \cdot \mathbf{x} . \end{aligned}$$

ahol $C := c/d$ szintén konstans.

Megjegyzés. Itt a konzervativitás csak $d = 2$ esetén kell, egyébként már korábban beláttuk, hogy forgásszimmetrikus erőtér centrális. Ha már tudjuk, hogy az erőtér centrális, akkor abból adódik, hogy a gömbfelszínen végzett munka mindig 0, azaz a gömbhéjak ekvipotenciális felületek, és az is könnyen látható, hogy van potenciál-függvény is. A feladat további része csak a Laplace egyenlet forgásszimmetrikus megoldásait használja ki.

1. Feladat. Számítsuk ki egy tömör, 1 sűrűségű gömb potenciálfüggvényét és gravitációs erőterét!

Megoldás. Legyen a kérdéses gömb $B(\mathbf{0}, R)$. Ezen kívül (és folytonosság miatt még ennek határán is) a potenciál és az erőtér megegyezik azzal, amit akkor kapnánk, ha a teljes tömeg a tömegközéppontban volna koncentrálva (a potenciál illetve az erőtér harmonicitása, illetve ezzel ekvivalens középérték-tulajdonsága miatt). Az ismert gravitációs törvények szerint tehát (ha $d > 2$)

$$U(\mathbf{x}) = \omega_d R^d \Phi_d(|\mathbf{x}|) = \omega_d \frac{R^d}{|\mathbf{x}|^{d-2}} \qquad (|\mathbf{x}| \geq R).$$

A gömb belsejében lévő $\mathbf{x}$ pontra szétválasztjuk az azon kívül lévő $B(\mathbf{0},R)\setminus B(\mathbf{0},|\mathbf{x}|)$ gömbhéj gravitációs hatását és a $B(\mathbf{0},|\mathbf{x}|)$ gömb gravitációs hatását, mely utóbbi a fentiekhez hasonlóan

$$U(\mathbf{x}) = \omega_d|\mathbf{x}|^d\Phi_d(|\mathbf{x}|) = \omega_d|\mathbf{x}|^2 \qquad (|\mathbf{x}| \leq R).$$

lesz.

Lemma. Ha $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0},r)$, akkor a $B(\mathbf{0},R)\setminus B(\mathbf{0},r)$, gömbhéj által gyakorolt gravitációs erő azonosan nulla, a potenciál konstans.

Lemma bizonyítása. Az ismert gravitációs erőtörvényből, illetve a konfigurációra jellemző szimmetriából tudjuk, hogy a szimmetria miatt a $\mathbf{0}$ középpontban a gravitációs erő $\mathbf{0}$, és azt is, hogy egyébként $\mathbf{F}$ a potenciálfüggvény gradiense. A potenciálfüggvény pedig a fizikai konfiguráció miatt gömbszimmetrikus és ismert alakja miatt harmonikus a gömbhéjon belül. A Laplace egyenlet alapmegoldására vonatkozó tételt az $R_1 = 0$, $R_2 = r$ szereposztásban alkalmazva, adódik, hogy ebben a tartományban a potenciálfüggvény $U(\mathbf{x}) = A\,\Phi_d(|\mathbf{x}|)+B$ alakú, ahol A, B konstansok. De esetünkben az origóban a potenciálnak nincs szingularitása, ott korlátos marad, tehát csak $A = 0$ lehetséges, ebből pedig $U(\mathbf{x}) \equiv B$ és $\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$.

A Lemma alapján most már tudjuk, hogy az eredő gravitációs erő a belső gömb gravitációs ereje lesz, tehát $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \omega_d c_d|\mathbf{x}|^d\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^d} = \omega_d c_d\mathbf{x}$. Ebből az $\mathbf{x}$ irányú sugár mentén integrálva – figyelemmel a potenciálnak a gömbön kívül már rögzített értékére – adódik

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) =& U(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}) - \int_{\mathbf{x}}^{\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \omega_d R^d\Phi_d(R) - \omega_d c_d[\frac{1}{2}(R^2 - |\mathbf{x}|^2)] \qquad (1.16)\\ =& \omega_d(1-\frac{1}{2}c_d)R^2 + \omega_d c_d\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 \quad . \end{aligned}$$

1.4. Feladatok és Problémák

1) Mutassuk meg, hogy érvényesek a Csebisev polinomok következő ekvivalens alakjai: $T_n(x) = 2^{n-1} t_n(x)$,

$$t_n(x) := \frac{(x+\sqrt{x^2-1}\,)^n + (x-\sqrt{x^2-1}\,)^n}{2^n} = \prod_{j=1}^{n} \left(x - \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n} \right) =$$

$$= 2^{1-n} \begin{cases} \cos(n \arccos x) & |x| \le 1 \\ (-1)^n \operatorname{sgn}(x) \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}|x|) & |x| > 1. \end{cases}$$

2)* Petruska megjegyzése: ha $H \subset\subset \mathbb{C}$, akkor $T_n^*(H, Z)$ *egyértelmű* (lásd [22] 144. oldalának első sorában a zárójelben).

a) Igazoljuk Petruska állítását!

b) Lássuk be, hogy ugyanez $T_n(H, z)$-re már nem állítható!

c) Adjunk feltételt H-ra, amely mellett $T_n(H, z)$ is egyértelmű!

3)** $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\overline{D} := D \cup \partial D$. Tudjuk, hogy $V_n(\overline{D}) = V_n(\partial D)$ és $V_n(\partial D) \ge \prod_{1 \le j < k \le n} |w_j - w_k| = n^{n/2}$, ahol $w_j = e^{2\pi i j/n}$ az n. egységgyökök. Igaz-e, hogy $\{w_j\}_1^n$ egy Fekete pont rendszer, és $V_n(\overline{D}) = n^{n/2}$?

4) Igazoljuk, hogy ha $E \subset\subset \mathbb{C}$ összefüggő, akkor $M(E) \ge \frac{\operatorname{diam}(E)}{4}$!

5) Igazoljuk, hogy ha $f \in \operatorname{Lip}_1(K, E)$, $E \subset\subset \mathbb{C}$, $f(E) = F$, akkor $M(F) \le K \cdot M(E)$! ($f \in \operatorname{Lip}_1(K)$ azt jelenti, hogy $|f(z) - f(w)| \le K|z - w|\ \forall z, w \in E$-re.)

6) Definiáltuk tetszőleges X normált térre a

$$K(X, n) := \inf\{M : \forall L_1, \ldots, L_n \in X^* \ \|L_1\| \cdot \ldots \cdot \|L_n\| \le M \cdot \|L_1 \cdot \ldots \cdot L_n\|\}$$

n-edik lineáris polarizációs konstansot, és X lineáris polarizációs konstansát is, mint

$$K(X) := \limsup_{n\to\infty} K(X, n)^{\frac{1}{n}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $K(X)$ nem csak lim sup, hanem lim is!

7)** Legyen

$$C(X,n) := \inf\{M : \forall p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \in \mathcal{P}_n(X), \|p_1\| \cdot \ldots \cdot \|p_k\| \leq M\|p\|\}$$

az n. polarizációs konstans, és defniáljuk X polarizációs konstansát mint

$$C(X) := \limsup_{n\to\infty} C(X,n)^{\frac{1}{n}}.$$

Létezik-e a lim is?

8) Igazoljuk, hogy ha E véges halmaz, akkor $M(E) = V(E) = 0$!

9) $M_n(I)$ $(I = [-1,1])$ és $M_n(\overline{D})$ $(D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$ Csebisev-kontansának kiszámításakor beláttuk $T_n(x) = T_n(I,x)$ illetve $T_n(\overline{D}, z)$ egyértel műségét is. A valós esetben ez polinomok gyökeinek, előjelváltásainak számolásával ment, a komplex esetben Cauchy formulával vagy FFT-típusú véges átlagolással. Konstruáljunk bizonyítást $T_n(\overline{D}, z) = z^n$-re a valóshoz hasonló meggondolásokkal! (*Útmutatás*: $T_n(\overline{D}, z) = z^n + Q(z)$, $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$; $\|T_n(\overline{D}, z)\| = |T_n(\overline{D}, z_0)| = e^{i\alpha}T_n(\overline{D}, e^{i\beta})$, és $\Re\{e^{i\alpha}T_n(\overline{D}, z)\} = \cos(n\varphi + \alpha) + q(\varphi)$, ahol q legfeljebb $n-1$ fokú trigonometrikus polinom.)

10)* Legyen $N := [-1,1] \times [-1,1] = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| \leq 1, |\Im z| \leq 1\}$ az egységnégyzet a síkon. Adjunk minél jobb becsléseket $M(E), V(E)$ értékére!

11) Legyen $\overline{V} \subset D$ sima (szép) résztartomány, és $\mathbf{F}$ konzervatív erőtér D-n. Mit kapunk, ha a Gauss divergencia tételt alkalmazzuk $\mathbf{F}$-re?

12)* Beláttuk, hogy ha $h \in \mathcal{H}(D)$, és $\mathrm{dist}\{\mathbf{x}, \partial D\} = R$, akkor h valós analítikus is a D tartományon, és legalábbis egy $\mathbf{x}$ körüli $r = R/3$ sugarú körben valós hatványsorba is fejthető. Adjunk ennél jobb – és minél jobb – becslést a konvergenciasugárra!

13) Beláttuk, hogy ha $h \in \mathcal{H}(D)$, és $\mathrm{dist}\{\mathbf{x}, \partial D\} = R$, akkor h valós analítikus is a D tartományon, és legalábbis egy $\mathbf{x}$ körüli $r = R/3$ sugarú körben valós hatványsorba fejthető. Ugyanakkor ha $h = \Re f$, ahol $f : G \to \mathbb{C}$ egy $G \subset \mathbb{C}^d$ nyílt komplex tartományon, amelyre $D \subset G$, akkor f-nek, és így h-nak is, van egy komplex, és ezért D-re megszorítva valós hatványsora is. E hatványsornak a konvergencia-sugara viszont f komplex szingularitásaitól, $\mathrm{dist}\{\mathbf{x}, \partial D\} = \rho$ értékétől függ: már $d = 1$ esetén is elképzelhető, hogy f

az egész $\mathbb{R}$-en analítikus, de ugyanakkor vannak $\mathbb{R}$-hez közeli szingularitásai, és a konvergencia-sugár ezért kicsi. Tisztázzuk a kérdést, hogy nincs-e itt valami ellentmondás?

14) Gondoljuk meg, egy tartományon szub- illetve szuper-harmonikus függvények eleget tesznek-e a maximum- illetve a minimum-elvnek! Bizonyítsuk, ami igaz, és mutassunk ellenpéldát arra, ami nem teljesül!

15) A harmonikus függvények alaptételéhez – azaz az ekvivalens definíciókról szóló tételhez – hasonlóan lássuk be, hogy a szubharmonikus függvényekre ekvivalensek a következő meghatározások!

a) f felülről félig folytonos és "szub-középérték-feltételnek" tesz eleget, azaz $M(f,r,\mathbf{x}) := \frac{1}{\omega_d r^d} \iint \cdots \int_V f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq f(\mathbf{x})$.
$\geq$

b) $f \in \mathbf{C}^2$ és $\Delta f \geq 0$.

16) a.) Lehet-e az $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}^d}(D)$ függvénynek izolált gyöke?

b) És ha $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}^d}(D)$ függvény?

c.) És ha $f \in \underline{\mathcal{H}_{\mathbb{R}^d}}(D)$ valós szubharmonikus?

d.) És ha $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}^d}(D)$ valós szuperharmonikus?

17) Származtassunk a Φ_d alapfüggvényből újabb potenciálelméleti magfüggvényt úgy, hogy tekintsük a $K := H \odot \Phi_d$ azaz $K(\mathbf{x}) := H(\Phi_d(|\mathbf{x}|))$ kompozíció-függvényt, ahol $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ monoton növő és konkáv segédfüggvény. Lássuk be, hogy nemcsak a Φ_d, de az általánosabb K magfüggvény használata mellett is teljesül, hogy egy tetszőleges μ valószínűségi mérték által leírt eloszlás $U^\mu(\mathbf{x}) := \iint \cdots \int_V K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dy$ potenciálfüggvénye szuperharmonikus, $U^\mu \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}^d)$.

18) Számítsuk ki a három (vagy n) dimenziós térben egy vékony, nagy (végtelen) kiterjedésű és egyenletes $\rho = 1$ sűrűségű sík anyag-lemez által létrehozott gravitációs erőteret és potenciálteret. Vessük ezt össze azzal a feladattal, amikor az egyenletes felületi sűrűség egy gömbfelszínen helyezkedik el!

19)* Az előadásokon szerepelt, hogy a Csebisev-konstans, a transzfinit átmérő és a kapacitás egyenlőek $\mathbb{C}$-ben, sőt ez igaz tetszőleges kompakt metrikus térben és általános magfüggvényekkel is mindaddig, amíg a potenciál-függvények teljesítik a maximum-feltételt. Érvényben maradnak-e ezek az ekvivalenciák akkor, ha a maximum-feltétel nem teljesül?

20)* Ha n elektron van egy K vezető testen elhelyezve, akkor a rendszer energiáját kiszámolva nem egészen azt kapjuk, amit a jól ismert energia-integrál kifejez. Legyenek az elektronok mondjuk x_j ($j = 1, \ldots, n$), és jelölje Φ_d a Laplace-egyenlet alap-megoldását: ekkor a tényleges energia

$$\frac{2}{n^2} \sum \sum_{i<j} \Phi_d(x_i - x_j) = \int \int_{K \times K \setminus \Delta} \Phi_d(x - y) d\mu_n(x) d\mu_n(y),$$

ahol $\Delta := \Delta_K := \{(x, x) : x \in K\}$ és $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}$. Ez felveti, hogy a szokásos energia-integrál helyett dolgozzunk esetleg a módosított

$$I^{\#}(\mu) := \frac{1}{1 - \mu \times \mu(\Delta)} I^*(\mu), \quad I^*(\mu) := \int \int_{K \times K \setminus \Delta} \Phi_d(x - y) d\mu_n(x) d\mu_n(y)$$

energia-integrálok valamelyikével. Mennyiben változik meg az elmélet ettől?

21)* A fizikából ismert Faraday-elv veti fel a kérdést: lehetne-e egy K halmazon az egyensúlyi eloszlást nem valószínűségi, hanem $\mu(K) = 1$ (véges) előjeles Borel-mértékeken való infimum kereséssel megtalálni? Mi változik illetve marad érvényben ilyen megközelítés mellett?

22)* Jelölje az $E \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz térfogatát (d dimenziós Lebesgue-mértékét) $|E|$, a klasszikus Newtoni potenciálhoz tartozó kapacitását pedig $C(E)$. (A $d = 2$ esetben a potenciál magfüggvény negativitása miatt az energia-minimumból származtatott kapacitást értelmezzük a szokásos exponenciális alakkal !) Ismeretes, hogy ha E kapacitása nulla, akkor egyben 0 Lebesgue-mértékű is. Bizonyítsuk ezt be egy $C(E) \geq \varphi(|E|)$ típusú egyenlőtlenség igazolásával, ahol $\varphi := \varphi_d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ alkalmas szigorúan monoton növő függvény! (Útmutatás: először oldjuk meg gömbre a feladatot, majd tekintsük a $\lambda|_E$ megszorított Lebesgue mértéket E-n, és egy olyan $\mathbf{x}_0$ pontot, ahol az $U^{\lambda|_E}$ potenciál maximális. Hasonlítsuk össze E és a vele azonos térfogatú, $\mathbf{x}_0$ körüli $B(\mathbf{x}_0, R)$ gömb potenciálját, és becsüljük meg ebből $\frac{1}{|E|}\lambda|_E$ energia-integrálját.)

Irodalomjegyzék

[1] Anagnostopoulos, V. & Révész, Sz. Gy., Polarization constants for products of linear functionals over $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{C}^2$ and Chebyshev constants of the unit sphere, *manuscript*, 2001, 10 pages.

[2] Andrievskii, V. V., On the inverse logarithmic potential problem, East J. on Approximation **7**(2001), 195-204.

[3] Simon L. & Baderko, A. E., Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, 1983.

[4] Carleson, L, Selected Problems on Exceptional Sets, D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.

[5] Conway, Foundations of One Complex Variable II, Graduate Texts in Mathematics, vol. **159**, Springer, 1995.

[6] Demailly, J-P., Potential Theory in Several Complex Variables *manuscript*, 1995, 37 pages.

[7] Dineen, S., The Schwarz Lemma, Oxford Science Publications, Clarendeon Press, Oxford, 1989.

[8] Doob, J. L., Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. **262**, Springer Verlag, 1984.

[9] Edwards, R. E., Fourier Series I-II, Holt-Reinhart-Winston, 1967.

[10] Edwards, R. E., Functional Analysis, Holt-Reinhart-Winston, 1965.

[11] Fekete, M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit Ganzzahliger Koeffizienten, Math. Zeitschrift, 17 (1923), 228-249.

[12] Gardner, R. J. & Hawkes, J., Majorizing sequences and approximation, Ark. Math. **14** (1976), 197-211.

[13] Halász Gábor, Komplex függvénytani füzetek II., Fejezetek a komplex függvénytanból, ELTE TTK jegyzet, 1997.

[14] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Pure and Applied Mathematics, Volume XXII, Wiley-Interscience, 1969.

[15] Hörmander, L., An Introduction to Complex Analysis of Several Variables, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., 1966.

[16] Howroyd, J. D., On the theory of Hausdorff measures in metric spaces, *PhD Thesis*, University College, London, 1994, 69 p.

[17] Kellogg, O. D., Foundations of Potential Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **Bd. 31**, Springer, 1929.

[18] Korevaar, J., Fekete extreme points and related problems, in Approximation Theory and Function Series, Budapest, 1995, Bolyai Society Mathematical Studies, **5**, 1996, pp.35-62.

[19] Korevaar, J., Fekete Potentials and Polynomials for Continua, J. Approx. Theory **109** (2001), 110-125.

[20] Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, Sixth Edition, John Wiley & Sons, 1988.

[21] Landkof, N. S., Foundations of Modern Potential Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. **180**, Springer Verlag, 1972.

[22] Petruska György, Komplex függvénytan, ELTE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, 1983.

[23] Pólya György - Szegő Gábor, Feladatok és tételek az analízis köréből, I-II, Tankönyvkiadó, 1980, 1981.

[24] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, Second Edition, McGraw Hill Book Company, 1964.

[25] Saff, E. & Totik, V., Logarithmic Potentials with External Fields, Grundlehren der Mathematischen, Wissenschaften, vol. **316**, Springer, 1997.

[26] Totik Vilmos, Középérték tulajdonságú függvények, Polygon, II. kötet 1. szám, 1992.

[27] Tsuji, M., Potential Theory in Modern Function Theory, Marusan Co., Tokyo, 1958.

[28] Zaharjuta, V. P., Transfinite diameter, Chebishev constants, and capacity for compacta in $\mathbb{C}^n$, Math. USSR Sbornik, Vol. 25 (1975), No. 3, 350-364 (English translation).