Potenciálelmélet $\mathbf{R}^n$-ben

Contents

Előszó

Ez a jegyzet bevezetés szeretne lenni a potenciálelméletbe és alkalmazásaiba. Alapjául a Révész Szilárd által tartott hasonló című előadás, a korábbi évek Nyári iskoláján elhangzottak, valamint az Interneten található írásos anyagok szolgáltak.

Ez nem egy kész változat, általában 1 éves periódussal készül el az újabb változat.

Minden észrevételt, külalakkal kapcsolatban is, szívesen fogadok; a magyar nyelvű tételkörnyezet kialakítását most tanulom.

Szabó Sándor

CHAPTER 1

Harmonikus függvények

1.1. Alaptulajdonságok

A továbbiakban legyen $n \geq 1$ rögzített pozitív egész, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt, nem-üres halmaz. A számolásokban, amikor nem fontos egy konstans értéke, akkor c-t írunk, különböző helyeken előforduló c nem feltétlenül jelenti ugyanazt.

DEFINITION 1.1.1. Egy kétszer folytonosan differenciálható, $u : \Omega \to \mathbf{C}$ függvény ***harmonikus*** az Ω-án, azaz $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, ha

$$\Delta u \equiv 0, \tag{1.1.1}$$

ahol $\Delta = D_1^2 + \ldots + D_n^2$ és D_j^2 jelöli a második parciális deriváltat a j-edik változóra vonatkozóan. Itt Δ az úgynevezett ***Laplace operátor***, míg (1.1.1) az úgynevezett ***Laplace egyenlet***. Legyen $E \subseteq \mathbf{R}^n$ nem-üres, nem feltétlenül nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy $u : E \to \mathbf{C}$ harmonikus E-n, ha u-t ki lehet terjeszteni harmonikus függvénnyé, egy az E-t tartalmazó nyílt halmazra. Ha $y \in \mathbf{R}^n$, akkor egy $u : \Omega \to \mathbf{C}$ függvény y *eltoltja* az $u(\cdot - y) : \Omega + y \to \mathbf{C}$ függvény; ha $r > 0$, akkor u *r-dilatációja* az $u(r\cdot) : \frac{1}{r}\Omega \to \mathbf{C}$ függvény. Mivel $\Delta(u(\cdot - y)) = (\Delta u)(\cdot - y)$ az $\Omega + y$ halmazon és $\Delta(u(r\cdot)) = r^2(\Delta u)(r\cdot)$, ezért harmonikus függvény eltoltja és dilatációja is harmonikus.

NOTATION 1.1.2. Jelölje $x = (x_1, \ldots, x_n)$ az $\mathbf{R}^n$ egy tetszőleges pontját, $\|x\| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ jelölje az x vektor hosszát.

EXAMPLE 1.1.3. 1. $u : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $u(x) := \|x\|^{2-n}$, $n \neq 2$ harmonikus függvény.

Valóban, legyen $u_\alpha(x) := \|x\|^\alpha$, $x \neq 0$. Ekkor

$$(D_j u_\alpha)(x) = \alpha x_j \|x\|^{\alpha-2}, \tag{1.1.2}$$

$$(D_j^2 u_\alpha)(x) = \alpha \|x\|^{\alpha-4} (\|x\|^2 + (\alpha - 2)x_j^2).$$

Így kapjuk

$$(\Delta u_\alpha)(x) = \alpha(n+\alpha-2)\,\|x\|^{\alpha-2}, \tag{1.1.3}$$

ami pontosan akkor azonosan 0, ha $\alpha = 2-n$.

EXAMPLE 1.1.4. 2. $u : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $u(x) := \log\|x\|$ harmonikus függvény.

Valóban, legyen $u : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $u(x) := \log\|x\|$. Ekkor

$$(D_j u)(x) = x_j \|x\|^{-2},$$

$$(D_j^2 u)(x) = \|x\|^{-4}\left(\|x\|^2 - 2x_j^2\right).$$

Így kapjuk

$$(\Delta u)(x) = (n-2)\,\|x\|^{-2},$$

ami pontosan akkor azonosan 0, ha $n=2$.

THEOREM 1.1.5. *Legyen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ortogonális transzformáció, $T \in O(n)$, és $u \in C^2(\Omega)$. Ekkor*

$$\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T, \qquad \text{a } T^{-1}(\Omega) \text{ halmazon.}$$

PROOF. Legyen T mátrixa az $\mathbf{R}^n$ standard bázisában $[t_{jk}]$. Ekkor

$$D_m(u \circ T) = \sum_{j=1}^{n} t_{jm}(D_j u) \circ T,$$

ahol D_m jelöli az m-edik változóra vonatkozó parciális deriváltat. Újból deriválva és összegezve m-szerint, kapjuk

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ T) &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} t_{km} t_{jm} (D_k D_j u) \circ T \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} t_{km} t_{jm} \right) (D_k D_j u) \circ T \\
&= \sum_{j=1}^{n} (D_j D_j u) \circ T \\
&= (\Delta u) \circ T.
\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

1.1.1. Feladatok. 1. Legyenek u és v valós értékű harmonikus függvények. Ekkor

$$\Delta(uv) = 0 \Longleftrightarrow \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle = 0.$$

Megoldás: Mivel $\Delta(uv) = u\Delta v + 2 \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle + v\Delta u = 2 \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle$, ezért kapjuk az állítást.

2. Legyen $g \in C^2(\mathbf{R}^n)$ valósértékű és $f \in C^2(\mathbf{R})$. Ekkor

$$\Delta(f \circ g) = (f'' \circ g) \|\operatorname{grad} g\|^2 + (f' \circ g)\Delta g. \tag{1.1.4}$$

Megoldás: Kétszer parciálisan deriválva, $D_j(f \circ g) = (f' \circ g)D_j g$, $D_j^2(f \circ g) = (f'' \circ g)(D_j g)^2 + (f' \circ g)D_j^2 g$. Ebből összegzéssel adódik az állítás.

3. Legyen $u \in C^2(\Omega)$ pozitív és t konstans. Ekkor

$$\Delta(u^t) = tu^{t-1}\Delta u + t(t-1)u^{t-2} \|\operatorname{grad} u\|^2 .$$

Megoldás: Legyen $f := \mathrm{id}_t$, $g := u$, ahol $\mathrm{id}_t : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\mathrm{id}_t(x) := x^t$ és alkalmazzuk az előző feladatot.

4. Legyen $u, v \in C^2(\Omega)$, $u > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\Delta(u^v) &= vu^{v-1}\Delta u + u^v(\log u)\Delta v + v(v-1)u^{v-2} \|\operatorname{grad} u\|^2 \\
&+ u^v(\log u)^2 \|\operatorname{grad} v\|^2 + 2u^{v-1}(1 + v \log u) \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle .
\end{aligned}$$

Megoldás: Mivel $D_j(u^v) = D_j(e^{v\log u}) = e^{v\log u}((D_jv)\log u + (v/u)D_ju)$, ezért

$$\begin{aligned} D_j^2(u^v) &= e^{v\log u}\{(D_jv)\log u + (v/u)D_ju\}^2 \\ &+ e^{v\log u}\{(D_j^2v)\log u + ((D_jv)/u)D_ju \\ &+ [((D_jv)u - vD_ju)/u^2]D_ju + (v/u)D_j^2u\}, \end{aligned}$$

azaz,

$$\begin{aligned} D_j^2(u^v) &= u^v(D_jv)^2(\log u)^2 + 2vu^{v-1}(\log u)(D_jv)(D_ju) + v^2u^{v-2}(D_ju)^2 \\ &+ u^v(\log u)(D_j^2v) + u^{v-1}(D_jv)(D_ju) \\ &+ u^{v-1}(D_jv)(D_ju) - u^{v-2}v(D_ju)^2 + u^{v-1}vD_j^2u, \end{aligned}$$

amelyből összegzés és rendezés után kapjuk a bizonyítandót.

5. Legyen $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ és $x \in \mathbf{R}^n$. Ekkor

$$\Delta(\|Ax\|) = \frac{\|Ax\|^2\|A\|_F^2 - \left\|A^TAx\right\|^2}{\|Ax\|^3},$$

ahol $\|A\|_F$ az úgynevezett ***Frobenius norma***.

Megoldás: Legyen A mátrixa az $\mathbf{R}^n$ standard bázisában $[a_{jk}]$ és legyen

$$a_k := \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor $Ax = \sum_{i=1}^n a_ix_i$. Ezért

$$\|Ax\| = \left(\left\langle \sum_{i=1}^n a_ix_i, \sum_{\ell=1}^n a_\ell x_\ell \right\rangle\right)^{1/2} = \left(\sum_{i,\ell=1}^n x_ix_\ell \langle a_i, a_\ell\rangle\right)^{1/2}.$$

Így

$$D_j\|Ax\| = \|Ax\|^{-1}\sum_{i=1}^n x_i\langle a_i, a_j\rangle,$$

valamint

$$\begin{aligned} D_j^2 \|Ax\| &= -\|Ax\|^{-3} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \langle a_i, a_j \rangle \right)^2 + \|Ax\|^{-1} \|a_j\|^2 \\ &= -\|Ax\|^{-3} \sum_{i,\ell=1}^{n} x_i x_\ell \langle a_i, a_j \rangle \langle a_\ell, a_j \rangle + \|Ax\|^{-1} \|a_j\|^2 . \end{aligned}$$

Ebből összegzéssel kapjuk

$$\begin{aligned} \Delta(\|Ax\|) &= \|Ax\|^{-1} \|A\|_F^2 \\ &\quad - \|Ax\|^{-3} \sum_{i,\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_\ell \langle a_i, a_j \rangle \langle a_\ell, a_j \rangle . \end{aligned}$$

Mivel $A^T A = [b_{pq}]$, ahol $b_{pq} = \langle a_p, a_q \rangle$ így

$$\left\|A^T Ax\right\|^2 = \sum_{i,\ell=1}^{n} x_i x_\ell \langle b_i, b_\ell \rangle ,$$

ahol $b_q = \begin{bmatrix} b_{1q} \\ \vdots \\ b_{nq} \end{bmatrix}$. Ezt tovább alakítva,

$$\left\|A^T Ax\right\|^2 = \sum_{i,\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_\ell b_{ji} b_{j\ell} = \sum_{i,\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_\ell \langle a_j, a_i \rangle \langle a_j, a_\ell \rangle .$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

6. Legyen $u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^{2n})$. Mutassuk meg, hogy ha f holomorf $\mathbf{C}^n$-n, akkor $u \circ f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^{2n})$.

Megoldás: Mivel f holomorf, ezért $\Delta f \equiv \mathbf{0}$. A 2. feladatot $f := u$, $g := f$ választással alkalmazva kapjuk az állítást.

7. Legyen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\Delta(u \circ T) \equiv 0$ $\forall u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$, akkor T egy ortogonális transzformáció skalárszorosa.

Megoldás: Legyen T mátrixa az $\mathbf{R}^n$ standard bázisában $[t_{jk}]$. Ekkor (lásd 1.1.5 Tétel)

$$\Delta(u \circ T) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} t_{km} t_{jm} \right) (D_k D_j u) \circ T.$$

Legyen $u(x_1, \dots, x_n) := x_{k_0}x_{j_0}$, ahol $1 \le k_0, j_0 \le n$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$, és így a feltétel szerint

$$0 = \sum_{m=1}^{n} t_{k_0 m} t_{j_0 m},$$

azaz T mátrixának sorvektorai ortogonálisak. Ez azt jelenti, hogy

$$\Delta(u \circ T) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} t_{jm} t_{jm} \right) (D_j D_j u) \circ T.$$

Legyen most $u(x_1, \dots, x_n) := x_{k_0}^2 - x_{j_0}^2$, ahol $1 \le k_0, j_0 \le n$, $k_0 \ne j_0$. Ekkor $u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$, és így a feltétel szerint

$$0 = 2 \left(\sum_{m=1}^{n} t_{k_0 m}^2 \right) - 2 \left(\sum_{m=1}^{n} t_{j_0 m}^2 \right),$$

azaz T mátrixának sorvektorai azonos normájúak. Ebből már következik az állítás.

8. Legyen $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Igazoljuk, hogy a $v : \Omega \to \mathbf{R}$, $v(x) := \langle x, (\operatorname{grad} u)(x) \rangle$ függvényre $v \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Megoldás: Mivel $v(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i (D_i u)(x)$, ezért

$$(D_j v)(x) = (D_j u)(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i (D_i D_j u)(x),$$

melyből $(D_j^2 v)(x) = 2(D_j^2 u)(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i (D_i D_j^2 u)(x)$. Tehát $\Delta v = 2\Delta u + \sum_{i=1}^{n} x_i D_i \Delta u$, ahol x_i az i-edik koordinátafüggvény. Mivel $\Delta u \equiv 0$, kapjuk az állítást.

1.2. Középérték tételek

LEMMA 1.2.1. *(***Gauss-Osztrogradszkij divergencia tétel***).*

$$\int_{\Omega} \mathit{div}\, \mathbf{w}\, dV = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle \, ds,$$

ahol $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $w_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, \dots, n$, *és* $\mathbf{n}$ *a külső normális egységvektor.*

REMARK 1.2.2. Az $n = 1$ esetben visszakapjuk azt a jól ismert állítást, hogy ha

LEMMA 1.2.3. (**Green tétel**). *Legyen $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz sima határral. Ekkor*

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_{\partial\Omega} (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)\, ds,$$

ahol $D_{\mathbf{n}}$ jelöli a külső normális egységvektor szerinti iránymenti deriváltat.

PROOF. Tudjuk, hogy $\operatorname{div} f\mathbf{w} = \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{w}\rangle + f \operatorname{div} \mathbf{w}$. Ezért

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + u\Delta v,$$

és

$$\operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) = \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u\rangle + v\Delta u.$$

Az 1.2.1 Lemma alapján

(1.2.1)
$$\int_{\Omega} (\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + u\Delta v)\, dV = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)\, dV = \int_{\partial\Omega} \langle u \operatorname{grad} v, \mathbf{n}\rangle\, ds,$$

és

$$\int_{\Omega} (\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u\rangle + v\Delta u)\, dV = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u)\, dV = \int_{\partial\Omega} \langle v \operatorname{grad} u, \mathbf{n}\rangle\, ds.$$

A két egyenletet kivonva egymásból és felhasználva, hogy $D_{\mathbf{n}}u = \langle \operatorname{grad} u, \mathbf{n}\rangle$, kapjuk az állítást. ■

LEMMA 1.2.4. *Legyen Ω mint az 1.2.3 Lemmában és $u \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$. Ekkor*

$$\int_{\partial\Omega} D_{\mathbf{n}}u\, ds = 0.$$

PROOF. Legyen $v \equiv 1$ és alkalmazzuk a Green tételt. ■

NOTATION 1.2.5. Jelölje $B(a,r) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| < r\}$ az a középpontú r sugarú nyílt gömböt, $\overline{B}(a,r)$ a zárt gömböt, a $B(0,1)$ egységgömböt jelölje B, a zárt egységgömböt $\overline{B}$. Az egységgömb felületét, a B határát, S jelöli, a normalizált felületi mértéket S-en σ-val jelöljük (tehát $\sigma(S) = 1$). Jelölje ω_n a B térfogatát, σ_n az S felszínét.

THEOREM 1.2.6. (**Középérték tétel**). *Ha* $u \in \mathcal{H}(\overline{B}(a,r))$, *akkor*

$$u(a) = \int_S u(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

PROOF. Először tekintsük az $n > 2$ esetet. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $B(a,r) = B$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$ tetszőlegesen rögzítve. Alkalmazzuk a Green tételt (1.2.3 Lemma) $\Omega := \{x \in \mathbf{R}^n : \varepsilon < \|x\| < 1\}$ és $v(x) := \|x\|^{2-n}$ választással. Kapjuk

$$0 = (2-n)\int_S u\, ds - (2-n)\varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u\, ds$$

$$- \int_S D_{\mathbf{n}} u\, ds - \varepsilon^{2-n}\int_{\varepsilon S} D_{\mathbf{n}} u\, ds.$$

Az 1.2.4 Lemma alapján az utolsó két tag 0, így

$$\int_S u\, ds = \varepsilon^{1-n}\int_{\varepsilon S} u\, ds,$$

azaz,

$$\int_S u\, d\sigma = \int_S u(\varepsilon\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Vegyünk $\varepsilon \to 0$-t és használjuk ki u folytonosságát a 0-ban, kapjuk az állítást.

Az $n = 2$ esetben a bizonyítás hasonló, csak $\|x\|^{n-2}$ helyett $\log\|x\|$-et kell venni. ∎

A harmonikus függvényeknek a térfogati integrálra vonatkozóan is van középérték tételük. Ennek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

LEMMA 1.2.7. *Ha* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *akkor*

$$\frac{1}{nV(B)}\int_{\mathbf{R}^n} f\, dV = \int_0^\infty r^{n-1}\int_S f(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr.$$

PROOF. Fubini tételét alkalmazva kapjuk az állítást. ∎

THEOREM 1.2.8. (**Középérték tétel térfogatra**). *Ha* $u \in \mathcal{H}(\overline{B}(a,r))$, *akkor*

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a,r)} u\, dV.$$

PROOF. Feltehetjük, hogy $B(a,r) = B$. Alkalmazzuk az 1.2.7 Lemmát $f := u\chi_B$ (χ_B a B karakterisztikus függvénye) választással és használjuk a középértéktételt (1.2.6 Tétel). ■

Később a ?? fejezetben igazolni fogjuk a középérték tételek megfordítását.

A középérték tételeknek számos következménye van. Az alábbi a harmonikus függvények gyökeiről szól.

COROLLARY 1.2.9. *Egy valósértékű harmonikus függvény gyökei sohasem izoláltak.*

PROOF. Tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű és $u(a) = 0$. Legyen $r > 0$ olyan, hogy $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$. Mivel u átlaga $\partial B(a,r)$-en 0, ezért u vagy azonosan 0 $\partial B(a,r)$-en, vagy felvesz pozitív és negatív értéket is. Ez utóbbi esetben mivel u folytonos a $\partial B(a,r)$ kompakt halmazon, ezért u-nak van zérushelye $\partial B(a,r)$-en. Tehát u-nak van zérushelye minden elegendően kicsi a-középpontú gömbön, így a nem lehet izolált gyöke u-nak. ■

REMARK 1.2.10. Az u valósértékűségét fel kell tennünk az előző következményben, amint azt az alábbi példa mutatja. Legyen $n \geq 2$ és

$$u(x) := (1-n)x_1^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2 + ix_1.$$

Ekkor u csak az origóban tűnik el.

1.3. Maximum elv

DEFINITION 1.3.1. Az Ω nyílt halmaz összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt nem-üres nyílt halmaz uniójára.

Összefüggő nyílt halmazokra érvényes a következő állítás:

LEMMA 1.3.2. *Az Ω összefüggő nyílt halmaz bármely két pontjához megadható egy azokat összekötő gömblánc, azaz véges sok egymásra következő gömb úgy, hogy*

(i) az egyik adott pont az első, a másik adott pont az utolsó gömb középpontja;

(ii) mindegyik gömb belsejében tartalmazza a következő gömb középpontját;

(iii) mindegyik gömb Ω-ban van.

THEOREM 1.3.3. *(**Maximum elv**). Legyen Ω összefüggő, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű. Ha u-nak van maximuma vagy minimuma Ω-ban, akkor u konstans.*

PROOF. Tegyük fel, hogy u-nak maximuma van $a \in \Omega$-ban. Legyen $r > 0$ olyan, hogy $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$. Ha u kisebb volna mint $u(a)$ a $B(a,r)$ valamely pontjában, akkor az u folytonossága miatt u-nak a $B(a,r)$ gömbre vonatkozó térfogati integrálátlaga kisebb volna mint $u(a)$, de ez ellentmond az 1.2.8 Tételnek. Tehát u konstans $B(a,r)$-en. Az 1.3.2 Lemma alapján következik, hogy u konstans Ω-n. ■

A tétel alábbi következményében nem szükséges feltenni Ω összefüggőségét.

COROLLARY 1.3.4. *Legyen Ω korlátos és $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű. Ekkor az $\overline{\Omega}$ kompakt halmazon u a maximumát és minimumát a határon, $\partial\Omega$-n veszi fel.*

Ebből az állításból következik

COROLLARY 1.3.5. *(**Unicitás**) Ha Ω korlátos, $u, v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékűek és $u \equiv v$ a $\partial\Omega$-n, akkor $u \equiv v$ az Ω-n.*

Szavakban ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy korlátos tartományon harmonikus függvényt egyértelműen meghatároznak a határon felvett értékei.

REMARK 1.3.6. A fenti állításban Ω korlátossága nem hagyható el. Valóban, legyen $\Omega := \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$, $u(x) := 0$, $v(x) := x_n$, $(x \in \overline{\Omega})$. Ekkor $u, v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathcal{H}(\Omega)$ és $u \equiv v$ a $\partial\Omega$-n, de $u \not\equiv v$.

Nem-korlátos Ω esetén vagy ha $u \notin C(\overline{\Omega})$, akkor a maximum elv következő változatát lehet használni:

COROLLARY 1.3.7. *Legyen $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű és tegyük fel, hogy*

$$\limsup_{k\to\infty} u(a_k) \le M$$

minden olyan $(a_k) \subset \Omega$ sorozatra, melyre $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \partial\Omega \bigcup \{\infty\}$. Ekkor $u \le M$ az Ω-n.

REMARK 1.3.8. Az állítás igaz marad, ha $\limsup$ helyett $\liminf$-et írunk és megfordítjuk az egyenlőtlenség irányát.

PROOF. Legyen $M' := \sup\{u(x) : x \in \Omega\}$ és válasszuk a $(b_k) \subset \Omega$ sorozatot úgy hogy $u(b_k) \to M'$.

Ha (b_k)-nak van olyan részsorozata amely konvergál valamely $b \in \Omega$ ponthoz, akkor $u(b) = M'$, és így a maximum elv miatt u konstans, $(u \equiv M')$, az Ω-nak b-t tartalmazó Ω_b komponensén. Ekkor minden olyan $(a_k) \subset \Omega_b$ sorozatra, melyre $\lim_{k\to\infty} a_k \in \partial\Omega_b \bigcup \{\infty\}$, teljesül, hogy $u(a_k) = M'$ $(k = 1, 2, \ldots)$, és így $M' \le M$.

Ha (b_k)-nak nincs olyan részsorozata amely konvergál valamely $b \in \Omega$ ponthoz, akkor (b_k)-nak van olyan (a_k) részsorozata, melyre $\lim_{k\to\infty} a_k \in \partial\Omega \bigcup \{\infty\}$. Ekkor szintén kapjuk, hogy $M' \le M$. ∎

COROLLARY 1.3.9. *(**Unicitás**) Ha Ω nem-korlátos, $u, v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékűek, $u \equiv v$ a $\partial\Omega$-n és $\lim\limits_{\infty} u = \lim\limits_{\infty} v$, akkor $u \equiv v$ az Ω-n.*

PROOF. Alkalmazzuk az 1.3.7 Következményt $u - v$, $M := 0$ választással, majd $v - u$ választással. ∎

COROLLARY 1.3.10. *(**Unicitás**) Ha Ω korlátos, $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$ és $\lim\limits_{x\in\partial\Omega} u = \lim\limits_{x\in\partial\Omega} v$ $(\forall x \in \partial\Omega)$, akkor $u \equiv v$ az Ω-n.*

PROOF. Alkalmazzuk az 1.3.7 Következményt $u - v$, $M := 0$ választással, majd $v - u$ választással. ∎

A következő állítás a maximum elv egy változata komplexértékű függvényekre.

COROLLARY 1.3.11. *Legyen Ω összefüggő és $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ komplexértékű. Ha $|u|$-nak van maximuma Ω-ban, akkor u konstans.*

PROOF. Tegyük fel, hogy $|u|$ maximuma M, melyet az $a \in \Omega$ pontban vesz fel. Válasszuk meg $\lambda \in \mathbf{C}$-t úgy, hogy $|\lambda| = 1$ és $\lambda u(a) = M$. Ekkor a $\operatorname{Re} \lambda u$ valósértékű harmonikus függvénynek M maximuma van a-ban. Ezért a maximum elv (1.3.3 Tétel) miatt $\operatorname{Re} \lambda u \equiv M$ az Ω-n. Mivel $|\lambda u| = |u| \leq M$, ezért $\operatorname{Im} \lambda u \equiv 0$ az Ω-n. Így λu, és ennélfogva u is, konstans az Ω-n. ∎

Az 1.3.11 Következmény az 1.3.3 Tétel megfelelője komplexértékű függvényekre. Hasonlóan, az 1.3.4 és 1.3.7 Következmények is igazak komplexértékű harmonikus függvényekre, de csak *maximum* illetve $\limsup |u|$ esetén. Nincs ugyanis minimum elv $|u|$-ra (legyen $u(x) := x_1$ a B-n).

A maximum elv lokális változatát azután tudjuk majd bizonyítani, miután igazoltuk, hogy minden harmonikus függvény valós analitikus (lásd ????).

1.3.1. Feladatok. 1. Legyen $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz sima határral. Legyen $u \in C^4(\overline{\Omega})$ olyan, hogy $\Delta(\Delta u) \equiv 0$ az Ω-n és $u \equiv D_{\mathbf{n}} u \equiv 0$ a $\partial\Omega$-n. Igazoljuk, hogy $u \equiv 0$.
Megoldás: Alkalmazzuk az 1.2.3 Lemmát $v := \Delta u$ választással. A feltevéseket felhasználva kapjuk

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dV = 0,$$

azaz $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathcal{H}(\Omega)$. Az 1.3.4 Következményt figyelembe véve kapjuk az állítást.

2. Tegyük fel, hogy Ω összefüggő, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű. Ekkor ha u nem konstans Ω-n, akkor $u(\Omega)$ nyílt $\mathbf{R}$-ben. (Azaz, u nyílt leképezés Ω-ból $\mathbf{R}$-be.)
Megoldás: Mivel Ω összefüggő, ezért $u(\Omega)$ is összefüggő, azaz intervallum. Legyen $w \in u(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor $\exists x \in \Omega : u(x) = w$. Legyen $r > 0$ olyan, hogy $B(x,r) \subset \Omega$. Mivel u nem konstans Ω-n, ezért a maximum elv miatt $\exists a, b \in u(\Omega) : u(B(x,r)) \subset (a,b) \subset u(\Omega)$. Ezzel az állítást igazoltuk.

3. Legyen Ω korlátos és $\partial\Omega$ összefüggő. Ha $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű, akkor $u(\Omega) \subseteq u(\partial\Omega)$.
Megoldás: Ha $u(\partial\Omega)$ egypontú halmaz, akkor az 1.3.4 Következmény miatt u konstans $\overline{\Omega}$-n, és ekkor az állítás igaz. A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $u(\partial\Omega)$ intervallum. Ismét az 1.3.4 Következmény miatt $u(\Omega) \subset u(\overline{\Omega}) = u(\partial\Omega)$, mivel $u(\partial\Omega)$ intervallum.

4. Egy függvény ***radiális***, ha az értéke x-ben csak $\|x\|$-tól függ. Bizonyítsuk

be, hogy ha $u \in \mathcal{H}(B)$ radiális, akkor u konstans B-n.
Megoldás: Első lépésben olyan $v : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ függvényt keresünk, mellyel az $u(x) = v(\|x\|)$ függvény megoldása a Laplace egyenletnek. Legyen $r := \|x\|$. Ekkor

$$(D_j u)(x) = v'(r)\frac{x_j}{r} \qquad \text{és} \qquad (D_j^2 u)(x) = v''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Ebből

$$(\Delta u)(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

Így a Laplace egyenlet szerint

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Ennek megoldása $v'(r) = ar^{1-n}$, ahol $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges állandó. Ezért $r > 0$ esetén

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & \text{ha } n = 2, \\ br^{2-n} + c, & \text{ha } n \neq 2. \end{cases}$$

Ezzel tehát előállítottuk a Laplace egyenlet úgynevezett ***alapmegoldás***át.

Mivel $u(0)$ véges, ezért $n > 1$ esetén csak $b = 0$ lehet, azaz, u konstans B-n. $n = 1$ esetén $u(x) = bx + c = b|x| + c$, tehát $b = 0$, azaz, u konstans B-n.

REMARK 1.3.12. Az előző feladatban egyúttal igazoltuk a következő állítást: Legyen $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Ekkor az $u \in \mathcal{H}(B(0, r_2) \setminus \overline{B}(0, r_1))$ feltételnek eleget tevő radiális függvények

$$u(x) = \begin{cases} b \ln \|x\| + c, & \text{ha } n = 2, \\ b \|x\|^{2-n} + c, & \text{ha } n \neq 2. \end{cases}$$

1.4. Poisson magfüggvény a gömbön

A középérték tulajdonság szerint ha $u \in \mathcal{H}(\overline{B})$, akkor

$$u(0) = \int_S u(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Igazolni fogjuk, hogy $\forall x \in B$-re $u(x)$ az u súlyozott integrálátlaga az S-en, vagyis $\exists\, P : B \times S \to \mathbf{C}$ magfüggvény, amelyre

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

$\forall x \in B$ és $\forall u \in \mathcal{H}(\overline{B})$.

Az $n = 2$ esetben már tudjuk, hogy

$$P(x,\zeta) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^2}.$$

Az $n > 2$ esethez szükségünk van az alábbi lemmára.

LEMMA 1.4.1. (**Szimmetrizációs lemma**).

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\|\, x \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|\, y \right\|, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.4.1}$$

PROOF. Közvetlen számolással vagy a vektorok által kifeszített háromszögek egybevágóságából adódik. ■

P meghatározásához kövessük a középérték tételnél használt gondolatmenetet. Tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{H}(\overline{B})$. Amikor igazoltuk, hogy $u(0)$ az u átlaga S-en, akkor a Green azonosságot használtuk $v(y) = \|y\|^{2-n}$ választással; ez a függvény harmonikus $B \setminus \{0\}$-án, szingularitása van 0-ban, és konstans S-en. Rögzítsünk most egy $x \in B \setminus \{0\}$ pontot. Ahhoz hogy $u(x)$ az u súlyozott átlaga legyen S-en, az előzőek alapján érdemes próbálkozni a $v(y) = \|y - x\|^{2-n}$ választással. Ez a függvény harmonikus $B \setminus \{x\}$-en, szingularitása van x-ben, azonban nem konstans S-en. A szimmetrizációs lemma alapján

$$\|y - x\|^{2-n} = \|x\|^{2-n} \left\| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|^{2-n}, \quad y \in S. \tag{1.4.2}$$

Az egyenlet jobboldalán szereplő függvény, mint y függvénye, harmonikus $\overline{B}$-on. Ezért a bal és jobboldal különbségének megvan az összes általunk óhajtott tulajdonsága.

Legyen tehát $v(y) := L(y) - R(y)$, ahol

$$L(y) := \|y - x\|^{2-n}, \qquad R(y) := \|x\|^{2-n} \left\| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|^{2-n}.$$

Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ számot oly módon, hogy $\overline{B}(x, \varepsilon) \subset B$ legyen. Alkalmazzuk Green tételét (1.2.3 Lemma) ugyanúgy, mint a középérték tétel (1.2.6 Tétel) bizonyításánál. Legyen $\Omega := B \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$. Kapjuk, hogy

$$0 = \int_S u D_{\mathbf{n}} v \, ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u D_{\mathbf{n}} v \, ds + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v D_{\mathbf{n}} u \, ds$$

$$= \int_S u D_{\mathbf{n}} v \, ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u D_{\mathbf{n}} L \, ds + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u D_{\mathbf{n}} R \, ds + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} L D_{\mathbf{n}} u \, ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} R D_{\mathbf{n}} u \, ds$$

$$= \int_S u D_{\mathbf{n}} v \, ds - (2-n)\varepsilon^{1-n} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u \, ds + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u D_{\mathbf{n}} R \, ds$$

$$+ \varepsilon^{2-n} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} D_{\mathbf{n}} u \, ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} R D_{\mathbf{n}} u \, ds$$

$$= \int_S u D_{\mathbf{n}} v \, ds - (2-n)\sigma_n u(x) + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u D_{\mathbf{n}} R \, ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} R D_{\mathbf{n}} u \, ds,$$

ahol felhasználtuk a középérték tételt és az 1.2.4 Lemmát. Mivel $u D_{\mathbf{n}} R$ és $R D_{\mathbf{n}} u$ korlátos B-n, ezért az utolsó két tag 0-hoz tart midőn $\varepsilon \to 0+$. Tehát

$$u(x) = \frac{1}{2-n} \int_S u D_{\mathbf{n}} v \, d\sigma.$$

Legyen $P(x, \zeta) := (2-n)^{-1} (D_{\mathbf{n}} v)(\zeta)$ és megkapjuk a keresett formulát,

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x, \zeta) \, d\sigma(\zeta). \tag{1.4.3}$$

Már csak $(D_{\mathbf{n}} v)(\zeta)$ értékét kell kiszámolnunk. Nyilván $(D_{\mathbf{n}} v)(\zeta) = (D_{\mathbf{n}} L)(\zeta) - (D_{\mathbf{n}} R)(\zeta)$. Itt

$$(D_{\mathbf{n}} L)(\zeta) = \langle (\operatorname{grad} L)(\zeta), \mathbf{n} \rangle, \qquad (D_{\mathbf{n}} R)(\zeta) = \langle (\operatorname{grad} R)(\zeta), \mathbf{n} \rangle,$$

ahol

$$\mathbf{n} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in S.$$

Mivel $u : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $u(y) := \|y\|^{2-n}$, $n > 2$ esetén $(D_j u)(y) = (2-n) y_j \|y\|^{-n}$, ezért $(\operatorname{grad} L)(\zeta) = (2-n)\|\zeta - x\|^{-n}(\zeta - x)$. Hasonlóan kapjuk, $(\operatorname{grad} R)(\zeta) = (2-n)\|x\|^{2-n}\left\|\zeta - \frac{x}{\|x\|^2}\right\|^{-n}\left(\zeta - \frac{x}{\|x\|^2}\right)$. Ekkor

$$\langle (\operatorname{grad} L)(\zeta), \mathbf{n}\rangle = (2-n)\|\zeta - x\|^{-n}(1 - \langle x, \zeta\rangle),$$

és

$$\begin{aligned}
\langle (\operatorname{grad} R)(\zeta), \mathbf{n}\rangle &= (2-n)\|x\|^{2-n}\left\|\zeta - \frac{x}{\|x\|^2}\right\|^{-n}\left(1 - \frac{\langle x, \zeta\rangle}{\|x\|^2}\right) \\
&= (2-n)\|x\|^{-n}\left\|\zeta - \frac{x}{\|x\|^2}\right\|^{-n}(\|x\|^2 - \langle x, \zeta\rangle) \\
&= (2-n)\left\|\|x\|\,\zeta - \frac{x}{\|x\|}\right\|^{-n}(\|x\|^2 - \langle x, \zeta\rangle) \\
&\overset{(1.4.1)}{=} (2-n)\|\zeta - x\|^{-n}(\|x\|^2 - \langle x, \zeta\rangle).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
(D_{\mathbf{n}} v)(\zeta) &= (D_{\mathbf{n}} L)(\zeta) - (D_{\mathbf{n}} R)(\zeta) \\
&= (2-n)\|\zeta - x\|^{-n}(1 - \|x\|^2).
\end{aligned}$$

Végül,

$$P(x, \zeta) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \zeta\|^n}. \tag{1.4.4}$$

DEFINITION 1.4.2. A P függvény a ***Poisson magfüggvény***; fontos szerepet fog játszani a következő fejezetben.

A továbbiakban a magfüggvény néhány fontos tulajdonságát igazoljuk, melyeket használni fogunk a későbbiekben.

LEMMA 1.4.3. *Legyen $\zeta \in S$. Ekkor $P(\cdot, \zeta) \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n \setminus \{\zeta\})$.*

PROOF. Mivel $P(x, \zeta) = (1 - \|x\|^2)\|x - \zeta\|^{-n}$, ezért legyen $u(x) := 1 - \|x\|^2$, és $v(x) := \|x - \zeta\|^{-n}$. Mivel $\Delta(uv) = u\Delta v + 2\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + v\Delta u$ és

$$\operatorname{grad} u = -2x, \qquad \operatorname{grad} v = -n(x - \zeta)\|x - \zeta\|^{-n-2},$$

továbbá (1.1.3)-t használva

$$\Delta u = -2n, \qquad \Delta v = 2n \|x-\zeta\|^{-n-2},$$

ezért

$$\Delta(uv) = \|x-\zeta\|^{-n-2} \left(2n(1-\|x\|^2) + 4n\langle x, x-\zeta\rangle - 2n\|x-\zeta\|^2\right) = 0. \qquad \blacksquare$$

LEMMA 1.4.4. *A Poisson magfüggvényre teljesül, hogy*

(a) $P(x,\zeta) > 0 \quad \forall x \in B, \forall \zeta \in S;$

(b) $\int\limits_S P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 1 \quad \forall x \in B;$

(c) $\forall \eta \in S, \forall \delta > 0$

$$\int\limits_{\|\zeta-\eta\|>\delta} P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \to 0, \qquad \text{ha}\, x \to \eta.$$

PROOF. (a) közvetlenül következik (1.4.4)-ból. Mivel $\|x-\zeta\| \to \|\eta-\zeta\| > \delta > 0$, és $(1-\|x\|^2) \to 0$ ha $x \to \eta$, ezért adódik (c). (1.4.3)-ben $u \equiv 1$-t véve kapjuk (b)-t. $\blacksquare$

1.4.1. Feladatok. 1. Határozzuk meg a $B(a,r)$ gömbre vonatkozó Poisson magfüggvényt.

Megoldás: A fejezet elején szereplő második integrálformulát kell általánosítanunk. Jelölje $Q(x,\zeta)$ a keresett magfüggvényt. Ekkor teljesülnie kell, hogy

$$u(x) = \int\limits_{B(a,r)} u(\zeta) Q(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B(a,r).$$

Mivel $u(r\cdot +a) \in \mathcal{H}(B)$, ezért

$$u(ry+a) = \int\limits_S u(r\tau+a) P(y,\tau)\, d\sigma(\tau) \quad \forall y \in S.$$

Ezt így alakíthatjuk át

$$u(x) = \int\limits_{\partial B(a,r)} u(\zeta) P\left(\frac{x-a}{r}, \frac{\zeta-a}{r}\right) \frac{1}{r^{n-1}} d\sigma(\zeta).$$

Tehát

$$Q(x,\zeta) = \frac{1}{r^{n-1}} P\left(\frac{x-a}{r}, \frac{\zeta-a}{r}\right) = \frac{1}{r} \frac{r^2 - \|x-a\|^2}{\|x-\zeta\|^n}.$$

1.5. A Dirichlet probléma a gömbön

A feladat a következő:

Legyen adva az $f \in C(S)$ függvény. Létezik-e olyan $u \in C(\overline{B}) \bigcap \mathcal{H}(B)$ függvény, melyre $u|_S \equiv f$? Ha igen, hogyan lehet meghatározni? Ez az úgynevezett ***Dirichlet probléma*** a gömbre.

A maximum elvből tudjuk, (lásd 1.3.5 Következmény), hogy ha létezik megoldás, akkor az egyértelmű.

A feladat megoldásának ötletét az (1.4.3) formula adja. Ha történetesen $f \equiv u|_S$, ahol $u \in \mathcal{H}(\overline{B})$, akkor

$$u(x) = \int_S f(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B.$$

A Dirchlet probléma megoldásához megfordítjuk a logikai sorrendet: ha adott $f \in C(S)$, akkor a fenti formulával definiáljuk az f kiterjesztését B-re és bízunk benne, hogy u lesz a keresett megoldás.

Definition 1.5.1. Tetszőleges $f \in C(S)$-re definiáljuk f ***Poisson integrálját***, $P[f]$, a következő módon

$$P[f](x) := \int_S f(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B.$$

Az alábbi tételben igazoljuk, hogy a Poisson integrál megoldja a gömbre vonatkozó Dirichlet problémát.

Theorem 1.5.2. *Tegyük fel, hogy $f \in C(S)$. Legyen*

$$u(x) := \begin{cases} P[f](x) & \text{ha} \quad x \in B, \\ f(x) & \text{ha} \quad x \in S. \end{cases}$$

Ekkor $u \in C(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$.

PROOF. $u \in \mathcal{H}(B)$: az integrálás és deriválás sorrendjének felcserélésével

$$\Delta u = \Delta(P[f]) = \int_S f(\zeta)\Delta(P(\cdot,\zeta))\,d\sigma(\zeta) = 0, \tag{1.5.1}$$

az 1.4.3 Lemma alapján.

$u \in C(\overline{B})$: Elég belátni, hogy $u \in C(S)$. Legyen $\eta \in S$ és $\varepsilon > 0$ rögzített. Válasszuk meg a $\delta > 0$ számot úgy, hogy $|f(\zeta) - f(\eta)| < \varepsilon$, ha $\|\zeta - \eta\| < \delta$ és $\zeta \in S$. Mivel $x \in B$, ezért a 1.4.4 Lemmát ((a) és (b)) használva így becsülhetünk

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(\eta)| &= \left| \int_S (f(\zeta) - f(\eta))P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) \right| \\
&\le \left(\int_{\|\zeta-\eta\|\le\delta} + \int_{\|\zeta-\eta\|>\delta} \right) |f(\zeta) - f(\eta)|\, P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) \\
&\le \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \int_{\|\zeta-\eta\|>\delta} P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta),
\end{aligned}$$

ahol $\|f\|_\infty$ jelöli az f supremum normáját S-en. Itt az utolsó integrál kisebb mint ε, ha x elég közel van η-hoz (a Lemma (c) pontja alapján). Ezzel igazoltuk, hogy u folytonos η-ban. ∎

Most bebizonyítjuk az (1.4.3) egy erősebb változatát.

THEOREM 1.5.3. *Ha* $u \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$, *akkor* $u \equiv P[u\,|_S]$ *a* B*-n.*

PROOF. Az 1.5.2 Tétel alapján $u - P[u\,|_S] \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$ és $u - P[u\,|_S] \equiv 0$ az S-en. A maximum elv (1.3.4) miatt $u - P[u\,|_S] \equiv 0$ a B-n. ∎

Mivel az eltolás és a dilatáció megőrzi a harmonikusságot, ezért az eredmények tetszőleges $B(a,r)$ gömbre átvihetőek.

Mielőtt a következő tételt kimondanánk, bevezetünk néhány jelölést a többváltozós függvények differenciálásával kapcsolatban. α egy ***multi-index***, ha $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nem-negatív egészekből álló szám n-es; $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, ahol $D_j^{\alpha_j}$ jelöli a j-edik változó szerinti α_j-rendű parciális deriváltat.

THEOREM 1.5.4. *Ha* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, *akkor* $u \in C^\infty(\Omega)$.

PROOF. Ha $u \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$, akkor az előző tétel alapján

$$u(x) = \int_S f(\zeta) P(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B.$$

Felcserélve a deriválás és integrálás sorrendjét, (emlékeztetünk, hogy $P(\cdot, \zeta) \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n \setminus \{\zeta\})$, 1.4.3 Lemma), kapjuk, hogy

$$(D^\alpha u)(x) = \int_S f(\zeta)(D^\alpha P)(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B, \forall \alpha, \tag{1.5.2}$$

ahol $(D^\alpha P)(x, \zeta)$ a $P(\cdot, \zeta)$ függvény α-adik parciális deriváltja az x helyen, midőn ζ rögzített. Ezt a gondolatmenetet az Ω tetszőleges pontja körüli elegendően kicsiny gömbre elismételve, kapjuk az állítást. ∎

A következő tétel a komplex függvénytanból jól ismert egyenletesen konvergens holomorf függvénysorozatokra vonatkozó állítás megfelelője.

THEOREM 1.5.5. *Tegyük fel, hogy* $u_m \in \mathcal{H}(\Omega)$, $m = 1, 2, \ldots$, $u_m \rightrightarrows u$ $\forall K \Subset \Omega$ *halmazon. Ekkor* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Sőt,* $\forall \alpha$ *multi-indexre* $D^\alpha u_m \rightrightarrows D^\alpha u$ $\forall K \Subset \Omega$ *halmazon.*

PROOF. Legyen $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ tetszőlegesen adott. Megmutatjuk, hogy u harmonikus $B(a, r)$-en és hogy minden α multi-indexre $D^\alpha u_m$ egyenletesen konvergál $D^\alpha u$-hoz a $B(a, r)$ minden kompakt részhalmazán. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $B(a, r) \equiv B$.

Tudjuk, hogy

$$u_m(x) = \int_S u_m(\zeta) P(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B, \forall m.$$

Mindkét oldalon elvégezve a határátmenetet, kapjuk

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B.$$

Tehát u harmonikus B-n.

Legyen α multi-index és $x \in B$. Ekkor

$$\begin{aligned}(D^\alpha u_m)(x) &= \int_S u_m(\zeta)(D^\alpha P)(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\\ &\to \int_S u(\zeta)(D^\alpha P)(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = (D^\alpha u)(x).\end{aligned}$$

Ha $K \Subset B$, akkor $D^\alpha P$ egyenletesen korlátos a $K \times S$ halmazon és így $D^\alpha u_m$ egyenletesen konvergál $D^\alpha u$-hoz a K-n. ■

1.5.1. Feladatok. 1. Legyen $g : B \to \mathbf{R}$, $g(x) := \int_S P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$. Igazoljuk, hogy g radiális és harmonikus B-n, így bizonyítva, hogy $\int_S P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 1$.

Megoldás: Az, hogy g harmonikus, következik az (1.5.1) formulából, ha ott f helyébe 1-t írunk. Mivel $P(x,\zeta) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-\zeta\|^n}$, ezért elég igazolni, hogy $\int_S \frac{1}{\|x-\zeta\|^n}\,d\sigma(\zeta)$ radiális. Legyen $y \in B$ olyan, hogy $\|y\| = \|x\|$. Ekkor van olyan T lineáris transzformáció, forgatás, amelyre $y = Tx$. Mivel $T(S) = S$, és σ invariáns a forgatásokra nézve, ezért az integrál értéke nem változik, ha x helyébe y-t írunk. Az 1.3.1 Feladatban igazoltuk, hogy ekkor g konstans. Tehát $g(x) = g(0) = 1$. Ezzel beláttuk az állítást.

2. Mutassuk meg, hogy $P[f \circ T] = P[f] \circ T$, $\forall f \in C(S)$, $\forall T \in O(n)$.

Megoldás:

$$\begin{aligned}P[f\circ T](x) &= \int_S f(T\zeta)P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\\ &= \int_S f(\zeta)\frac{1-\|x\|^2}{\|x-T^{-1}\zeta\|^n}\,d\sigma(\zeta)\\ &= \int_S f(\zeta)\frac{1-\|Tx\|^2}{\|Tx-\zeta\|^n}\,d\sigma(\zeta)\\ &= P[f]\circ T(x).\end{aligned}$$

1.6. A középérték tételek megfordítása

Láttuk, hogy minden harmonikus függvénynek van középérték tulajdonsága. A Dirichlet probléma megoldhatóságát felhasználva belátjuk, hogy igazak a fordított irányú állítások is.

THEOREM 1.6.1. *Tegyük fel, hogy $u \in C(\Omega)$. Ha $\forall x \in \Omega$ $\exists(r_j)$ pozitív tagú sorozat, $r_j \to 0$, melyre*

$$u(x) = \int_S u(x + r_j\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall j,$$

akkor $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

PROOF. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy u valósértékű. Tegyük fel, hogy $\overline{B}(a,R) \subset \Omega$. Legyen v a Dirichlet probléma megoldása a $\overline{B}(a,R)$ gömbön, melyre $v\big|_{\partial B(a,R)} \equiv u\big|_{\partial B(a,R)}$. Megmutatjuk, hogy $v \equiv u$ a $B(a,R)$ gömbön, igazolva ezzel a tételt.

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $v - u$ pozitív a $\overline{B}(a,R)$ valamely pontjában. Legyen $E := \{x \in \overline{B}(a,R) : (v-u)(x) \text{ maximális}\}$. Ekkor $E \subsetneq B(a,R)$ kompakt halmaz. Legyen $x \in \partial E$ olyan, melyre $\operatorname{dist}(\partial E, S(a,R)) = \operatorname{dist}(x, S(a,R))$, ilyen az E kompaktsága miatt létezik. A tétel feltétele miatt létezik $r > 0$ úgy, hogy $B(x,r) \subset B(a,R)$ és $u(x)$ az u integrál átlaga a $\partial B(x,r)$-en. Mivel v harmonikus $\overline{B}(x,r)$-en, ezért kapjuk, hogy

$$(v-u)(x) = \int_S (v-u)(x + r\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Ez azonban ellentmondás, mert az x körüli r sugarú gömbfelületen van olyan pozitív mértékű halmaz, ahol $v - u < (v-u)(x)$. Tehát $v - u \leq 0$ a $\overline{B}(a,R)$ gömbön. Hasonlóan, $u - v \leq 0$ a $\overline{B}(a,R)$ gömbön. ∎

REMARK 1.6.2. A fenti tételben u folytonossága nem hagyható el. Valóban, legyen $\Omega \equiv \mathbf{R}^n$ és

$$u(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \; x_n > 0, \\ 0, & \text{ha } \; x_n = 0, \\ -1, & \text{ha } \; x_n < 0. \end{cases}$$

Ekkor $u(x)$ az u integrálátlaga minden x középpontú gömbfelületen ha $x_n = 0$, és $u(x)$ az u integrálátlaga minden x középpontú elegendően kicsiny sugarú gömbfelületen ha $x_n \neq 0$. Azonban u nem folytonos, még kevésbé harmonikus $\mathbb{R}^n$-en.

A térfogati integrál középértékre vonatkozó tétel megfordításában nem kell feltenni u folytonosságát, viszont a középérték tulajdonságot minden sugárra meg kell követelnünk.

THEOREM 1.6.3. *Tegyük fel, hogy $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ha $\forall \overline{B}(a,r) \subset \Omega$ esetén*

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a,r)} u \, dV,$$

akkor $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

PROOF. Először bebizonyítjuk, hogy $u \in C(\Omega)$.

Legyen $a \in \Omega$ rögzített és legyen $(a_j) \subset \Omega$ olyan sorozat, hogy $\lim a_j = a$. Legyen $K \Subset \Omega$ olyan, hogy $a \in \operatorname{int} K$. Ekkor $\exists r > 0$ melyre $B(a_j, r) \subset K$ minden elegendően nagy j-re. Mivel $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, ezért a dominált konvergencia tétel miatt

$$\begin{aligned} u(a_j) &= \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a_j,r)} u \, dV = \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{K} u \chi_{B(a_j,r)} \, dV \\ &\to \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{K} u \chi_{B(a,r)} \, dV = u(a). \end{aligned}$$

Tehát $u \in C(\Omega)$.

Most megmutatjuk, hogy $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Az 1.7.2 Tétel bizonyításában látott gondolatmenet értelemszerű módosításával kapjuk az állítást. ■

1.6.1. Feladatok. 1. Tegyük fel, hogy $u \in C(\Omega)$. Ha $\forall x \in \Omega$ $\exists (r_j)$ pozitív tagú sorozat, $r_j \to 0$, melyre

$$u(x) = \frac{1}{V(B(x,r_j))} \int\limits_{B(x,r_j)} u \, dV, \quad \forall j,$$

akkor $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Megoldás: Az 1.7.2 Tétel értelemszerű módosításával adódik az állítás.

2. Tegyük fel, hogy $u \in C(\overline{B})$ és $\forall x \in B \; \exists\, r(x) \in (0, 1 - \|x\|)$, melyre

$$u(x) = \int_S u(x + r(x)\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Bizonyítsuk be, hogy $u \in \mathcal{H}(B)$.

Megoldás: Az 1.7.2 Tétel bizonyításának gondolatmenetét használjuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy u valósértékű. Legyen v a Dirichlet probléma megoldása a $\overline{B}$ gömbön, melyre $v|_S \equiv u|_S$. Megmutatjuk, hogy $v \equiv u$ a B gömbön, igazolva ezzel az állítást.

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $v - u$ pozitív a $\overline{B}$ valamely pontjában. Legyen $E := \{x \in \overline{B} : (v-u)(x) \text{ maximális}\}$. Ekkor $E \subsetneq B$ kompakt halmaz. Legyen $x \in \partial E$ olyan, melyre $\operatorname{dist}(\partial E, S(a,R)) = \operatorname{dist}(x, S(a,R))$, ilyen az E kompaktsága miatt létezik. Az állítás feltétele miatt létezik $r(x) > 0$ úgy, hogy $B(x, r(x)) \subseteq B$ és $u(x)$ az u integrál átlaga a $\partial B(x,r)$-en. Innen a bizonyítás a 1.7.2 tétel bizonyításának értelemszerű módosításával befejezhető.

3. Alkalmas ellenpéldával mutassuk meg, hogy az előző feladatban az $u \in C(\overline{B})$ feltétel nem gyengíthető $u \in C(B)$-re.

Megoldás: HELP!!!!

4. (**Hopf lemma**) Tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{H}(\overline{B})$ valósértékű, nemkonstans. Ha u a maximumát $\overline{B}$-on a $\zeta \in S$ pontban veszi fel, akkor

$$u(\zeta) - u(r\zeta) \asymp 1 - r, \quad \forall r \in (0,1).$$

Vezessük le ebből, hogy $(D_{\mathbf{n}}u)(\zeta) > 0$.

Megoldás: Tudjuk, hogy (l. (1.4.3))

$$u(r\zeta) = \int_S u(\tau) P(r\zeta, \tau)\, d\sigma(\tau).$$

Továbbá az 1.4.4 Lemma (b) alapján

$$u(\zeta) = \int_S u(\zeta) P(r\zeta, \tau)\, d\sigma(\tau).$$

A két egyenletből

$$u(\zeta) - u(r\zeta) = \int_S [u(\zeta) - u(\tau)] P(r\zeta, \tau)\, d\sigma(\tau).$$

Legyen $\delta > 0$ és jelölje $S_\delta^>(\zeta) := \{\tau \in S : \|\tau - \zeta\| > \delta\}$. (Ha δ elegendően kicsiny, akkor $S_\delta^>(\zeta) \neq \emptyset$.) Ekkor

$$u(\zeta) - u(r\zeta) > \int\limits_{S_\delta^>(\zeta)} [u(\zeta) - u(\tau)] \frac{1-r^2}{\|r\zeta - \tau\|^n} \, d\sigma(\tau).$$

Mivel u nemkonstans, ezért $\exists \eta \in S : u(\eta) < u(\zeta)$. Ha δ elegendően kicsiny, akkor $\eta \in S_\delta^>(\zeta)$ és így $\exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon^<(\eta) := \{\tau \in S : \|\tau - \eta\| < \varepsilon\} \subset S_\delta^>(\zeta)$. Írhatjuk tehát

$$u(\zeta) - u(r\zeta) > \int\limits_{S_\varepsilon^<(\eta)} [u(\zeta) - u(\tau)] \frac{1-r^2}{\|r\zeta - \tau\|^n} \, d\sigma(\tau).$$

Ha $\varepsilon > 0$ elegendően kicsiny, akkor $u(\zeta) - u(\tau) > c > 0$, $\forall \tau \in S_\varepsilon^<(\eta)$. Mivel $\|r\zeta - \tau\| \leq 2$, ezért

$$u(\zeta) - u(r\zeta) \geq c(1 - r^2) \geq c(1 - r).$$

Másrészt

$$u(\zeta) - u(r\zeta) = \int_r^1 \langle (\operatorname{grad} u)(t\zeta), \zeta \rangle \, dt$$

és így

$$u(\zeta) - u(r\zeta) \leq \int_r^1 |\langle (\operatorname{grad} u)(t\zeta), \zeta \rangle| \, dt \leq \int_r^1 \|(\operatorname{grad} u)(t\zeta)\| \, dt \leq c(1 - r).$$

Ezzel beláttuk az állítás első felét.

Ami a második felét illeti,

$$(D_{\mathrm{n}} u)(\zeta) = \lim_{r \to 1-0} \frac{u(\zeta) - u(r\zeta)}{1 - r} \geq c > 0.$$

5. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban ha ζ az $u|_S$-nek csak lokális szigorú maximuma, akkor az alsó becslés nem teljesül.

Megoldás: HELP!!!!

6. Tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{H}(\overline{B})$ és $(D_{\mathrm{n}} u)|_S \equiv 0$. Ekkor u konstans.

1. Megoldás: Ha u nem volna konstans, akkor a 4. feladat alapján létezne olyan $\zeta \in S$, hogy $(D_{\mathrm{n}} u)(\zeta) > 0$, ami ellentmondás.

2. Megoldás: Helyettesítsünk $v := u$-t (1.2.1)-be. Ekkor kapjuk, hogy $\int\limits_{\Omega} \|\mathrm{grad}\, u\|^2\, dV = 0$, amiből következik az állítás.

1.7. Gravitációs erőtörvény

Newton a testek között ható tömegvonzás törvényét a csillagászati mérések eredményeire alapozva állította föl. Nézzük most meg, hogy hogyan lehet levezetni szigorúan matematikai úton, néhány egyszerű és természetes feltevésből.
Vegyünk egy m és egy M tömegű pontszerű testet. Legyen a koordinátavektoruk x illetve y, $x, y \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, $x \neq y$. Jelölje $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ azt a függvényt, amelyik megadja az egyik testnek a másik testre gyakorolt vonzását. Mivel az erők párosával lépnek fel, ezért $F(x, y) = -F(y, x)$. Legyen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tetszőleges távolságtartó leképezés. Tegyük fel, hogy

(1) $T(F(x, y)) = F(T(x), T(y))$,

azaz, a testek között ható erő csak a pontok egymáshoz viszonyított helyzetétől függ, független a koordináta rendszer megválasztásától.

Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az egyik test az origóban van rögzítve. Az egyszerűsítés kedvéért vezessük be az

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad f(z) := F(z, 0)$$

jelöléseket. Ekkor (1) így írható át

(1′) $T(f(z)) = f(T(z))$.

A továbbiakban először az $n \geq 3$ esetet vizsgáljuk, majd utána az $n = 1, 2$ eseteket.

Először megmutatjuk, hogy f szűkebb értelemben centrális erő, azaz olyan erő, amelynek tartó egyenese mindig a centrumon (jelen esetben az origó) megy át, és amelynek nagysága csak a centrumtól számított távolságtól függ.
Legyen $e \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, tetszőlegesen választva. Bontsuk fel $f(e)$-t e-vel párhuzamos és e-re merőleges összetevőkre.

$$\tau := f(e) - \left\langle f(e), \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|}.$$

Ekkor $\langle \tau, e\rangle = 0$. Tegyük fel, hogy $\tau \neq \mathbf{0}$. Legyen $e, \tau \in V \subseteq \mathbf{R}^n$, $\dim V := 3$, tetszőleges altér. Definiáljuk a $T : V \to V$ lineáris leképezést úgy, hogy

$$\begin{aligned} T: \quad & e \longmapsto e, \\ & \tau \longmapsto -\tfrac{e}{\|e\|} \times \tau, \\ & \tfrac{e}{\|e\|} \times \tau \longmapsto \tau. \end{aligned}$$

Ekkor $T \in O(3)$ és így távolságtartó leképezés. Terjesszük ki T-t $\mathbf{R}^n$-re úgy, hogy $\mathbf{R}^n \setminus V$-n az identitás legyen. Ekkor $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ és $T \in O(n)$, tehát T távolságtartó leképezés. Ezért

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle f(e), \frac{e}{\|e\|} \times \tau \right\rangle = \left\langle T(f(e)), T\left(\frac{e}{\|e\|} \times \tau\right)\right\rangle \\ &\overset{(1')}{=} \left\langle f(T(e)), T\left(\frac{e}{\|e\|} \times \tau\right)\right\rangle = \langle f(e), \tau\rangle = \|\tau\|^2, \end{aligned}$$

ami ellentmond $\tau \neq \mathbf{0}$ feltevésünknek. Kaptuk tehát, hogy

$$f(e) = \left\langle f(e), \frac{e}{\|e\|}\right\rangle \frac{e}{\|e\|} = \langle f(e), e\rangle \frac{e}{\|e\|^2}.$$

Mivel tetszőleges origó körüli R elforgatás távolságtartó, ezért

$$\langle f(e), e\rangle = \langle R(f(e)), R(e)\rangle \overset{(1')}{=} \langle f(R(e)), R(e)\rangle,$$

azaz, $\langle f(e), e\rangle$ csak e nagyságától függ. Tehát $f(z) = \varphi(\|z\|)z$, $\varphi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\forall z \in \mathbf{R}^n$.

A következő lépésben használjuk fel a ***tömegközéppont tétel***ét:
Pontrendszer tömegközéppontja (súlypontja) úgy mozog, mintha az egész rendszer tömege a tömegközéppontban lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna.
Ez a tétel jogosít fel arra, hogy a kiterjedt testet anyagi pontnak tekinthessük, mert hiszen a test súlypontja úgy mozog, mint egy $M = \sum M_i$ tömegű pont az $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ erő hatására.

Következő feltevésünk az, hogy

(2) A tömegközéppont tétel végtelen sok anyagi pontból álló rendszer esetén is fennáll.

Legyen most a m tömegű anyagi pont az origóban, a M tömegű kiterjedt test az origón kívül. Tegyük fel, hogy a kiterjedt test alakja egy R sugarú, a középpontú gömb ($R < \|a\|$), melynek a sűrűségét a ϱ függvény írja le. Ekkor, feltéve hogy az alábbi integrál létezik, a gömbre ható összes gravitációs erő

$$\int\limits_{B(a,R)} mf\varrho\, dV.$$

Következő feltevésünk azt a fizikai tapasztalatot írja le, hogy

(3) Kiterjedt testre ható gravitációs erő megegyezik a test tömegközéppontjában ható vele azonos tömegű pontszerű testre ható gravitációs erővel.

Ezért a gömbre ható gravitációs erő

$$f(a) \int\limits_{B(a,R)} m\varrho\, dV.$$

Szorítkozzunk egyelőre a homogén esetre, azaz, $\varrho \equiv 1$.

Így kapjuk, hogy

$$f(a) = \frac{1}{V(B(a,R))} \int\limits_{B(a,R)} f\, dV,$$

amely érvényes $\forall R > 0$, $\forall a \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $R < \|a\|$ esetén. Az 1.6.3 Tétel alapján ez azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$, feltéve, hogy

(4) $F(\cdot, 0) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$.

Feladatunk már most meghatározni mindazokat a φ függvényeket, melyekre $f \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. Mivel

$$f(z) = \varphi(\|z\|)(z_1, \ldots, z_n),$$

ezért $\varphi \in C^2(R^+)$. Vezessük be az alábbi jelölést:

NOTATION 1.7.1. Legyen $\mathrm{pr_j} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\mathrm{pr_j}(z) := z_j$, a j-edik koordináta-függvény.

Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\equiv \Delta f \\ &\equiv -(\Delta((\varphi \circ u_1)\mathrm{pr}_1), \ldots, \Delta((\varphi \circ u_1)\mathrm{pr_n})), \end{aligned}$$

ahol $u_\alpha(z) = \|z\|^\alpha$. Ezért

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta((\varphi \circ u_1)\mathrm{pr_j}) \\
&= (\varphi \circ u_1)\Delta\mathrm{pr_j} + 2\,\langle \operatorname{grad} \varphi \circ u_1, \operatorname{grad} \mathrm{pr_j}\rangle + \mathrm{pr_j}\Delta(\varphi \circ u_1) \\
&= 2\mathrm{pr_j} \circ (\operatorname{grad} \varphi \circ u_1) + \mathrm{pr_j}\Delta(\varphi \circ u_1) \\
&= 2D_j(\varphi \circ u_1) + \mathrm{pr_j}\Delta(\varphi \circ u_1) \\
&\overset{(1.1.2)}{=} 2(\varphi' \circ u_1)u_{-1}\mathrm{pr_j} + \mathrm{pr_j}\Delta(\varphi \circ u_1).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
0 &= 2(\varphi' \circ u_1)u_{-1} + \Delta(\varphi \circ u_1) \\
&\overset{(1.1.4)}{=} 2(\varphi' \circ u_1)u_{-1} + (\varphi'' \circ u_1)\,\|\operatorname{grad} u_1\|^2 + \varphi' \circ u_1 \Delta u_1 \\
&\overset{(1.1.3)}{=} (n+1)(\varphi' \circ u_1)u_{-1} + \varphi'' \circ u_1.
\end{aligned}$$

Legyen $r := \|x\|$. Így az alábbi differenciálegyenletet kapjuk

$$\varphi''(r) + \frac{n+1}{r}\varphi'(r) = 0 \quad (r > 0).$$

Ennek megoldása

$$\varphi(r) \equiv c_1 r^{-n} + c_2,$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok. Ebből kapjuk, hogy

$$f(z) = -c_1\frac{z}{\|z\|^n} - c_2 z.$$

Következő feltevésünk azt a fizikai tapasztalatot írja le, hogy két testet egyre jobban eltávolítva egymástól, a közöttük ható erő egyre kisebb lesz.

(5) $\lim\limits_{\infty} f = 0.$

Ebből adódik, hogy $c_2 = 0$.

Összefoglalva eddigi eredményeinket, a következőt mondhatjuk:

THEOREM 1.7.2. *Legyen $n \geq 3$. Ekkor az $\mathbf{R}^n$-ben levő m és M tömegű, x és y $(x \neq y)$ tömegközéppontú testek esetén a M tömegű test a m tömegű testre*

$$\mathbf{F}(x,y) := \mathbf{F} = -\gamma\frac{Mm}{\|x-y\|^{n-1}}\frac{x-y}{\|x-y\|}$$

erővel hat, ahol $\gamma > 0$ a gravitációs állandó.

Vizsgáljuk most az $n = 1$ esetet.

Ebben az esetben közvetlenül kapjuk, hogy

$$f(z) = \varphi(|z|)z, \quad \forall z \in \mathbf{R},$$

ahol $\varphi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$.

1.8. Valós analitikus függvények

Korábban láttuk, hogy egy harmonikus függvény akárhányszor differenciálható. Ebben a fejezetben igazoljuk, hogy a harmonikus függvényekre ennél több is igaz, nevezetesen, minden harmonikus függvény valós analitikus. Mielőtt ezt megtennénk, bevezetünk néhány jelölést és bebizonyítjuk a valós analitikus függvények legfontosabb tulajdonságait.

NOTATION 1.8.1. Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ és $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multi-index. Jelölje

$$\begin{aligned} x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \end{aligned}$$

$$R(y) := \{x \in \mathbf{R}^n : |x_j| < |y_j|, j = 1, \ldots, n\}, \quad y \in \mathbf{R}^n;$$

$R(y)$ az $\mathbf{0}$ középpontú, y sarokpontú nyílt tégla.

DEFINITION 1.8.2. Egy $f : \Omega \to \mathbf{C}$ függvény ***valós analitikus***, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, ha $\forall a \in \Omega\ \exists c_\alpha \in \mathbf{C}$:

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha$$

$\forall x$-re az a egy alkalmas környezetéből, és a sor abszolút konvergens. (Tudjuk, hogy ha egy sor abszolút konvergens, akkor a sor tetszőleges átrendezése is ugyanahhoz az értékhez konvergál, ezért a fenti összegben az α szerinti összegzést tetszőleges sorrendben elvégezhetjük, ez ad értelmet a jelölésnek.)

A továbbiakban (a triviális esetek elkerülése érdekében) tegyük fel, hogy $y_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

THEOREM 1.8.3. *Tegyük fel, hogy* $\{c_\alpha y^\alpha\}$ *korlátos halmaz. Ekkor*
(a) $\forall\beta$ *multi-indexre*

$$\sum_\alpha D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$$

abszolút konvergens és lokálisan egyenletesen konvergens $R(y)$*-on.*
(b) *Az* f *függvény,* $f(x) := \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$, $x \in R(y)$, *akárhányszor differenciálható* $R(y)$*-on, sőt,*

$$(D^\beta f)(x) = \sum_\alpha D^\beta(c_\alpha x^\alpha), \quad \forall x \in R(y), \forall \beta \, \mathrm{multi-indexre},$$

továbbá $c_\alpha = (D^\alpha f)(0)/\alpha!$ $\forall\alpha$ multi – indexre.

PROOF. Felhasználva, hogy $R((1, \ldots, 1))$-en

$$\sum_\alpha D^\beta(x^\alpha) = D^\beta\left[(1-x_1)^{-1} \ldots (1-x_n)^{-1}\right], \forall\beta \, \mathrm{multi-indexre},$$

a bizonyítás az egyváltozós esethez hasonlóan történhet. ■

A következő tétel nem érvényes minden C^∞-beli függvényre.

THEOREM 1.8.4. *Tegyük fel, hogy* Ω *összefüggő,* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, *és* $f \equiv 0$ *az* Ω *egy nem-üres nyílt részhalmazán. Akkor* $f \equiv 0$ *az* Ω*-án.*

PROOF. Legyen $F := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, $G := \mathrm{int}_\Omega F$. Ekkor $G \neq \emptyset$ nyílt halmaz Ω-ban. Másrészt, ha $\omega \in \Omega$ a G torlódási pontja, akkor az f összes deriváltja -mivel folytonosak,- eltűnik az ω-ban. Ezért $f \equiv 0$ az ω egy Ω-nyílt környezetében, azaz $\omega \in G$. Tehát G nyílt-zárt halmaz Ω-ban, s mivel Ω összefüggő, ezért $F \equiv \Omega$. ■

THEOREM 1.8.5. $\mathcal{H}(\Omega) \subsetneq \mathcal{A}(\Omega)$.

PROOF. Legyen $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Igazolnunk kell, hogy $\forall a \in \Omega \; \exists (r > 0, c_\alpha \in \mathbf{C})$: $u(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha$ $\forall x \in B(a, r)$ és a sor abszolút konvergens. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = 0$. A bizonyítás alapötlete az az, hogy az u Poisson integrál előállításában a Poisson magfüggvényt fejtjük sorba, majd tagonként integrálunk. Legyen R olyan, hogy $B(0, R) \subseteq \Omega$. Ekkor az 1.4.1 feladat felhasználásával

$$u(x) = \int\limits_{B(0,R)} u(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta), \quad \forall x \in B(0,r),$$

ahol $0 < r < R$, később alkalmasan megválasztjuk,

$$P(x,\zeta) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|\zeta - x\|^n} = \left(R^2 - \|x\|^2\right)\left(\|\zeta - x\|^2\right)^{-n/2}.$$

Itt

$$\|\zeta - x\|^2 = \|\zeta\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle \zeta, x\rangle = R^2\left(1 + \frac{\|x\|^2}{R^2} - 2\frac{\langle \zeta, x\rangle}{R^2}\right) = R^2(1+z),$$

ahol

$$z = \frac{\|x\|^2}{R^2} - 2\frac{\langle \zeta, x\rangle}{R^2}.$$

Legyen $r := R/3$. Ekkor

$$|z| \le \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9} < 1.$$

Így

$$(1+z)^{-n/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n/2}{j} z^j,$$

a végtelen sor abszolút konvergens. Itt

$$z^j = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \left(\frac{\|x\|^2}{R^2}\right)^m \left(-2\frac{\langle \zeta, x\rangle}{R^2}\right)^{j-m}.$$

Mivel $\langle \zeta, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k x_k$, ezért rendezés után kapjuk

$$P(x,\zeta) = \sum_{\alpha} x^\alpha q_\alpha(\zeta),$$

ahol q_α polinom. Tehát

$$\begin{aligned} u(x) &= \int\limits_{B(0,R)} u(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\int\limits_{B(0,R)} u(\zeta) q_\alpha(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right) x^\alpha \end{aligned}$$

a kívánt előállítás. ■

THEOREM 1.8.6. (**Lokális maximum elv**). *Legyen Ω összefüggő, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ valósértékű. Tegyük fel, hogy u-nak lokális maximuma van Ω-ban. Akkor u konstans.*

PROOF. Ha u-nak lokális maximuma van $a \in \Omega$-ban, akkor $\exists B(a, r) \subset \Omega : u(x) \leq u(a)\ \forall x \in B(a, r)$. A maximum elvből következik, hogy u konstans $B(a, r)$-en. Mivel $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, ezért a 1.8.4 Tételből következik az állítás. ∎

A fejezet hátralevő részében ***homogén polinom***ok tulajdonságaival foglalkozunk.

DEFINITION 1.8.7. Egy p polinom ***homogén m-ed*** ($m \in \mathbf{N}$) ***fokú***, $p \in \mathcal{P}_m^h$ ha

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha.$$

THEOREM 1.8.8. $p \in \mathcal{P}_m^h \iff p(tx) = t^m p(x) \quad \forall (t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^n)$.

REMARK 1.8.9. A fenti tétel szerint egy homogén polinom egyértelműen meghatározott, ha ismerjük az értékeit S-en: ha p, $q \in \mathcal{P}_m^h$ és $p \equiv q$ az S-en, akkor $p \equiv q$ az $\mathbf{R}^n$-en. Az is igaz, hogy ha $p \in \mathcal{P}_m^h$ és $T \in L(\mathbf{R}^n)$, akkor $p \circ T \in \mathcal{P}_m^h$.

Gyakran hasznosabbnak bizonyul egy harmonikus függvényt hatványsor helyett homogén polinomok összegeként előállítani. Az alábbi tételben az ilyen előállítás egyértelműségét bizonyítjuk.

THEOREM 1.8.10. (**Egyértelműség**) *Legyen $r > 0$. Ha $p_m, q_m \in \mathcal{P}_m^h$, $m = 0, 1, \ldots,$ és*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x) \quad \forall x \in rB$$

(mindkét sor pontonként konvergál rB-ben), akkor $p_m \equiv q_m$, $m = 0, 1, \ldots$.

PROOF. Legyen $\zeta \in S$ rögzített. Ekkor

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\zeta) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\zeta) t^m, \quad \forall t \in (-r, r).$$

Az egyváltozós hatványsorok egyértelműségéből következik, hogy $p_m(\zeta) = q_m(\zeta)$, $\forall \zeta \in S, m = 0, 1, \ldots$. Ezért az előző megjegyzésünk alapján $p_m \equiv q_m$ az $\mathbf{R}^n$-en $m = 0, 1, \ldots$. ∎

THEOREM 1.8.11. *Legyen* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ *és* $a \in \Omega$. *Ekkor* $\exists p_m \in \mathcal{P}_m^h$, $m = 0, 1, \dots$:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x - a),$$

$\forall x$*-re az* a *egy alkalmas környezetéből, és a sor abszolút és egyenletesen konvergens az* a *egy környezetében.*

PROOF. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = 0$. Legyen

$$p_m(x) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha u)(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Az 1.8.5 Tétel alapján

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)$$

a 0 egy környezetében. ∎

DEFINITION 1.8.12. Az u fenti előállításában $p_m \in \mathcal{P}_m^h$, $m = 0, 1, \dots$, ezért ezt a sort az u ***homogén sorfejtés***ének nevezzük a 0 körül.

REMARK 1.8.13. Az u harmonikusságából következik, hogy minden egyes p_m is harmonikus. Valóban, $0 \equiv \Delta u \equiv \sum \Delta p_m$ a 0 környezetében, valamint minden egyes Δp_m homogén $m - 2$-ed fokú $m \geq 2$ esetén (és 0 ha $m < 2$). Az 1.8.10 Tételből következik, hogy $\Delta p_m \equiv 0$, $m = 0, 1, \dots$.

1.8.1. Feladatok. **1**. Igazoljuk, hogy a p polinomra $p \in \mathcal{P}_m^h \iff \langle x, (\operatorname{grad} p)(x) \rangle = mp(x)\, \forall x \in \mathbf{R}^n$.

Megoldás: Tudjuk, hogy $p \in \mathcal{P}_m^h \iff p(tx) = t^m p(x) \quad \forall (t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n)$.

$\Longrightarrow$: Egyrészt $D_t(p(tx))|_{t=1} = \langle x, (\operatorname{grad} p)(x) \rangle$, másrészt $D_t(t^m p(x))|_{t=1} = mp(x)$.

$\Longleftarrow$: A feltételben x helyére tx-et írva, $t \in \mathbf{R}$ rögzített, kapjuk, hogy

$$t\,\langle x, (\operatorname{grad} p)(tx) \rangle = mp(tx)\, \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Azaz, most t-t változóként kezelve és x-et rögzítve

$$tD_t(p(tx)) = mp(tx).$$

Legyen $q(t) := p(tx)$. Ekkor a fenti differenciálegyenlet így írható

$$tq'(t) = mq(t),\ t \in \mathbf{R},$$

amelynek a nem-triviális megoldása

$$q(t) = ct^m,\ t \in \mathbf{R},$$

ahol $c \equiv c(x)$. Kaptuk tehát, hogy

$$p(tx) = c(x)t^m.$$

$t := 1$-et helyettesítve adódik $c(x) \equiv p(x)$, azaz

$$p(tx) = t^m p(x),$$

ami bizonyítandó volt.

2. Ha $p \in \mathcal{P}_m^h \bigcap \mathcal{H}(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow p/u_{2m+n-2} \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$.
Megoldás: Legyen $\alpha := -2m - n + 2$. Mivel $\Delta(uv) = u\Delta v + 2\,\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + v\Delta u$, ezért a 1.1.3 és a 1.8.1 Feladatot használva

$$\begin{aligned} \Delta(pu_\alpha) &= \alpha(n+\alpha-2)u_{\alpha-2}p + 2\alpha u_{\alpha-2}\,\langle \operatorname{grad} p, \operatorname{id}\rangle \\ &= \alpha u_{\alpha-2}(n+\alpha-2+2m)p \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Legyen m pozitív egész. Jellemezzük azokat az $\mathbf{R}^n$-en értelmezett u valós analitikus függvényeket, melyekre $u(tx) = t^m u(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall t \in \mathbf{R}$.
Megoldás: Tegyük fel, hogy u nem az azonosan 0 függvény. Mivel u analitikus $\mathbf{R}^n$-en, ezért a 0 körül hatványsorba fejthetjük,

$$u(x) = \sum c_\alpha x^\alpha.$$

Az $u(tx) = t^m u(x)$ feltételből következik, hogy

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha.$$

4. Igazoljuk, hogy ha $u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$, akkor u hatványsora mindenütt konvergens $\mathbf{R}^n$-ben.
Megoldás: Az 1.8.5 Tétel bizonyításában láttuk, hogy ha $B(0,R) \subseteq \Omega$, akkor $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ 0 körüli Taylor sora abszolút és egyenletesen konvergens $B(0,R/3)$-on. Mivel esetünkben R tetszőleges nagy lehet, ezért adódik az állítás.

1.9. Korlátos harmonikus függvények

THEOREM 1.9.1. (**Liouville tétele**). *Ha $u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$ korlátos, akkor konstans.*

PROOF. Tegyük fel, hogy $|u| \leq M$. Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ és $r > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\overset{1.2.8.\mathrm{T.}}{=} \frac{1}{V(B(0,r))} \left| \int\limits_{B(x,r)} u\, dV - \int\limits_{B(0,r)} u\, dV \right| \\ &\leq M \frac{V(B(x,r) \Delta B(0,r))}{V(B(0,r))} \leq 2M \frac{V(B(0,r) \setminus B(0,r-x))}{V(B(0,r))}. \end{aligned}$$

Mivel az utolsó tag $O\left(\frac{1}{r}\right)$, ezért $r \to \infty$-t véve kapjuk $u(x) = u(0)$, azaz u konstans. ∎

DEFINITION 1.9.2. Legyen $a \in \Omega$. Ekkor *a* ***izolált szingularitása*** egy u függvénynek, ha u értelmezve van $\Omega \setminus \{a\}$-n. Ha $u \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, akkor *a* ***megszüntethető szingularitás***, ha u-nak van harmonikus kiterjesztése Ω-ra.

THEOREM 1.9.3. *Korlátos harmonikus függvény izolált szingularitása megszüntethető.*

PROOF. Elég igazolni, hogy ha $u \in \overline{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ és u korlátos ezen a halmazon, akkor van harmonikus kiterjesztése B-re. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy u valósértékű. A 1.5.2 Tétel alapján az egyetlen lehetőségünk a kiterjesztésre a Poisson integrál, $P[u\,|_S]$.

Legyen először $n \geq 3$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra definiáljuk

$$\nu_\varepsilon(x) := u(x) - P[u\,|_S](x) + \varepsilon(\|x\|^{2-n} - 1), \quad x \in B \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Ekkor $\nu_\varepsilon \in \mathcal{H}(B \setminus \{\mathbf{0}\})$. Továbbá

$$\lim_{|x| \to 1} \nu_\varepsilon(x) \overset{1.5.2.\mathrm{T.}}{=} 0,$$

és

$$\lim_{x \to \mathbf{0}} \nu_\varepsilon(x) = \infty$$

az u korlátossága miatt. A 1.3.7 Következmény miatt (lim sup helyett lim inf-et véve) $\nu_\varepsilon \geq 0$ a $B \setminus \{\mathbf{0}\}$-n. Ebből kapjuk, hogy

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \nu_\varepsilon = u - P[u\,|_S] \quad \mathrm{a}\, B \setminus \{\mathbf{0}\} - \mathrm{n}.$$

u helyett $-u$-ra alkalmazva a kapott egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$0 \geq u - P[u\,|_S \quad \mathrm{a}\, B \setminus \{\mathbf{0}\} - \mathrm{n}.$$

Tehát
$$u \equiv P[u\,|_S] \quad \text{a}\, B \setminus \{\mathbf{0}\} - \text{n}.$$

Így $P[u\,|_S]$ a keresett kiterjesztése u-nak B-re.

Az $n = 2$ esetben az $(\|x\|^{2-n} - 1)$ helyett $\log 1/\|x\|$-t kell venni.

Az $n = 1$ esetben u-nak megszüntethető szakadása van a-ban. ■

A következő tételben a komplex függvénytanból jól ismert, Taylor-sor együtthatóira vonatkozó becslés megfelelőjét bizonyítjuk.

THEOREM 1.9.4. (**Cauchy becslés**). *Legyen $u \in \mathcal{H}(B(a,r))$, $|u| \leq M$ a $B(a,r)$-en. Ekkor $\forall \alpha$ multi-indexre $\exists\, C_\alpha$ konstans úgy, hogy*
$$|(D^\alpha u)(a)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}.$$

PROOF. Feltehetjük, hogy $a = 0$. Ha $u \in \mathcal{H}(\overline{B})$ és $|u| \leq M$ a $\overline{B}$-on, akkor
$$\begin{aligned} |(D^\alpha u)(0)| &\overset{(1.5.2)}{=} \left| \int_S u(\zeta)(D^\alpha P)(0,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right| \\ &\leq M \int_S |(D^\alpha P)(0,\zeta)|\, d\sigma(\zeta) \\ &= C_\alpha M, \end{aligned}$$
ahol $C_\alpha := \int_S |(D^\alpha P)(0,\zeta)|\, d\sigma(\zeta)$.

Ha $u \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,r))$ és $|u| \leq M$ a $\overline{B}(0,r)$-en, akkor alkalmazva a fenti eredményt az u r-dilatációjára, $u(r\cdot)$-ra, kapjuk, hogy
$$|(D^\alpha u)(0)| \leq \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}.$$
r helyett $r - \varepsilon$-t írva és $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}$-t véve, adódik a becslés $B(0,r)$-re. ■

COROLLARY 1.9.5. *Legyen $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, $|u| \leq M$ az Ω-n és legyen α multi-index. Ekkor*
$$|(D^\alpha u)(a)| \leq \frac{C}{d(a,\partial\Omega)^{|\alpha|}}, \quad \forall a \in \Omega,$$
valamely C konstanssal.

PROOF. Legyen $a \in \Omega$ és alkalmazzuk a Cauchy becslést $r := d(a, \partial\Omega)$-val. ■

1.9.1. Feladatok. 1. Adjunk példát olyan $u \in \mathcal{H}(B)$ korlátos függvényre, amely nem egyenletesen folytonos B-n.
Megoldás: ???

CHAPTER 2

XXX

Csebisev feladata

Csebisev approximációelméleti vizsgálatai során vetette fel és oldotta meg a következő problémát:

Jelölje $\mathcal{P}_n$ az n-edfokú polinomok halmazát. Legyen $I := [-1, 1]$. $p_n \in \mathcal{P}_n$ gyökeit jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Legyen továbbá $\|f\|_I$ az f függvény maximum-normája I-n. Határozzuk meg

$$\begin{aligned} M_n &:= \inf\{\|p_n\|_I : p_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j),\ x_j \in I\ (j = 1, \ldots, n)\}, \\ M_n^* &:= \inf\{\|p_n\|_I : p_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j),\ x_j \in \mathbf{C}\ (j = 1, \ldots, n)\} \end{aligned}$$

értékét.

REMARK 2.0.6. M_n, M_n^* definíciójában inf helyett min írható.

REMARK 2.0.7. Nyilván $0 < M_n^* \leq M_n \leq 1$, az utolsó egyenlőtlenséghez vegyük a $p_n(x) := x^n$ polinomot.

THEOREM 2.0.8. *(Csebisev) $M_n = M_n^* = 2^{1-n}$, az extremális polinom*

$$t_n(x) := 2^{1-n}\cos(n \arccos x) = \prod_{j=1}^{n}\left(x - \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right), \quad |x| \leq 1.$$

REMARK 2.0.9. A t_n polinomot 1-re normálva kapjuk az elsőfajú Csebisev polinomot, azaz, $T_n = 2^{n-1}t_n$.

A bizonyításhoz szükségünk van az alábbi, önmagában is érdekes lemmára.

LEMMA 2.0.10. *Ha $q \in \mathcal{P}_m$ valós együtthatós és léteznek $z_0 < z_1 < \ldots < z_{m+1}$ pontok úgy hogy $(-1)^j q(z_j) \geq 0$, $j = 0, \ldots, m+1$, akkor $q \equiv 0$.*

PROOF. 1. eset: Ha $q(z_j) = 0$, $j = 0, \ldots, m+1$, akkor q-nak $m+2$ gyöke van és igy $q \equiv 0$.
2. eset: Hasonlóan, ha $q(z_j) = 0$ egyetlen j kivételével, akkor is $q \equiv 0$, ami ellentmond a feltételezésünknek.
3. eset: Ha $q(z_j) = 0$ legfeljebb m különböző j-re, akkor legyen r az a Lagrange interpolációs polinom, melyre $r(z_j) := (-1)^j$ minden olyan j-re, melyre $q(z_j) = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $s_\varepsilon := q + \varepsilon r$. Ekkor $s_\varepsilon \in \mathcal{P}_m$ és s_ε már szigorú előjelváltással bír, $(-1)^j s_\varepsilon(z_j) > 0$, $j = 0, \ldots m+1$, ha ε elegendően kicsi: $\varepsilon < \min\{|q(z_j)| / |r(z_j)| : q(z_j), r(z_j) \neq 0\}$. Valóban, ha $q(z_j) = 0$ akkor $s_\varepsilon(z_j) = \varepsilon r(z_j) = \varepsilon(-1)^j$, és ha $q(z_j) \neq 0$ akkor $(-1)^j s_\varepsilon(z_j) = (-1)^j q(z_j) + \varepsilon r(z_j)(-1)^j$, és itt az első tag pozitiv, valamint nagyobb abszolútértékű mint a második tag. Tehát $s_\varepsilon \equiv 0$, ami csak úgy lehet ε-tól függetlenül, ha $q, r \equiv 0$, de ez ellentmond a feltételezésünknek. Ezzel a lemmát igazoltuk. ■

A 2.0.8 Tétel bizonyítása: Tekintsük a $t_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$ polinomot. Legyen $y_j := \cos\frac{j\pi}{n}$, $j = 0, \ldots, n$. Ekkor $t_n(y_j) = (-1)^j 2^{1-n}$, $j = 0, \ldots, n$. Legyen P_n tetszőleges 1 főegyütthatós valós n-ed fokú polinom. Legyen $Q := t_n - P_n$. Ekkor $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$. Alkalmazzuk a lemmát $m := n-1$, $q := Q$ választással. Ha $\|P_n\|_I \leq 2^{1-n}$ volna, akkor $(-1)^j Q(y_j) = 2^{1-n} - (-1)^j P_n(y_j) \geq 0$ lenne. Ekkor a lemma szerint $Q \equiv 0$, azaz $P_n \equiv t_n$. Tehát a minimális normát t_n adja, $\|t_n\| = 2^{1-n}$. □

REMARK 2.0.11. Azt hogy $M_n = M_n^*$, az 2.0.13 Megjegyzésben bizonyítjuk.

DEFINITION 2.0.12. Legyen $E \Subset \mathbf{C}$, azaz $E \subset \mathbf{C}$ kompakt halmaz. Ekkor E Csebisev konstansai

$$\begin{aligned} M_n(E) : &= \min\{\|p_n\|_E : p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j),\ x_j \in E\,(j = 1, \ldots, n)\}, \\ M_n^*(E) : &= \min\{\|p_n\|_E : p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j),\ x_j \in \mathbf{C}\,(j = 1, \ldots, n)\}. \end{aligned}$$

REMARK 2.0.13. Ha E nem korlátos, akkor $M_n^*(E) = \infty$, mert minden $p_n \in \mathcal{P}_n$ esetén $p_n(x) \to \infty$ ha $x \to \infty$.

Ha E nem zárt, akkor $M_n(\overline{E}) = M_n(E)$.

Ha E konvex kompakt halmaz, akkor $M_n(E) = M_n^*(E)$. Biz ??????

EXAMPLE 2.0.14. 1. $M_n([a,b]) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$.

Valóban, legyen $l : I \to [a,b]$, $l(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$. Legyen $p_n \in \mathcal{P}_n$ 1-főegyütthatós polinom. Ekkor $q_n := \left(\frac{2}{b-a}\right)^n p_n \circ l : I \to \mathbf{R}$ 1-főegyütthatós polinom és $\|q_n\|_I = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n \|p_n\|_{[a,b]}$. Ebből $q_n := t_n$ választással kapjuk $M_n([a,b]) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n M_n = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$, és az extremális polinom $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n t_n \circ l^{-1}$, ahol $l^{-1} : [a,b] \to I$, $l^{-1}(x) = \frac{2x-a-b}{b-a}$.

2. $M_n(\overline{B}) = 1$.

Ezt az állítást kétféleképpen is bizonyíthatjuk.

1. Bizonyítás: Legyen $p_n(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Ekkor $a_n := 1$,

$$w_k := \begin{cases} e^{2\pi i k/n}, & \text{ha } a_0 = 0, \\ e^{2\pi i k/n}\left(\frac{a_0}{|a_0|}\right)^{1/n}, & \text{ha } a_0 \neq 0, \end{cases} \quad \text{választással}$$

$$\|p_n\|_{\overline{B}} \geq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_n(w_k)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} w_k^j\right| = |1 + |a_0|| \geq 1.$$

Egyenlőség csak akkor lehet, ha $a_0 = 0$. Ekkor $p_n(z) = z p_{n-1}(z)$. Mivel $\|p_n\|_{\overline{B}} = \|p_n\|_S$, ezért $\|p_n\|_{\overline{B}} = \|p_{n-1}\|_{\overline{B}}$. Ezt folytatva kapjuk, hogy az extremális polinom $p_n(z) = z^n$.

2. Bizonyítás: ?????

3. $M_n(\overline{B}(z_0, r)) = r^n$.

Valóban, legyen $\varphi : \overline{B} \to \overline{B}(z_0, r)$, $\varphi(z) := rz + z_0$. Legyen $p_n \in \mathcal{P}_n$ 1-főegyütthatós polinom. Ekkor $q_n := \frac{1}{r^n} p_n \circ \varphi : \overline{B} \to \mathbf{C}$ 1-főegyütthatós polinom és $\|q_n\|_{\overline{B}} = \frac{1}{r^n}\|p_n\|_{\overline{B}(z_0,r)}$. Ebből $q_n(z) := z^n$ választással kapjuk $M_n(\overline{B}(z_0, r)) = r^n M_n(\overline{B}) = r^n$, és az extremális polinom $r^n z^n \circ \varphi^{-1}$, ahol $\varphi^{-1} : \overline{B}(z_0, r) \to \overline{B}$, $\varphi^{-1}(z) = \frac{z - z_0}{r}$.

DEFINITION 2.0.15. Ha $T_n := T_n(E, z)$ illetve $T_n^* := T_n^*(E, z)$ extremális a Csebisev feladatban (lásd 2.0.12 Definíció), akkor T_n illetve T_n^* az E halmaz Csebisev polinomjai.

DEFINITION 2.0.16. A $z_1, \ldots, z_n \in E$ az E n-edrendű Csebisev pontjai, ha $T_n(E, z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$. Hasonlóan, $z_1^*, \ldots, z_n^* \in \mathbf{C}$ az E n-edrendű $*$-Csebisev pontjai, ha $T_n^*(E, z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j^*)$.

EXAMPLE 2.0.17. $M_n(S) = 2$ és $T_n(S, z) = z^n - 1$.

Ekkor $|a_0| = \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| = 1$ miatt az 2.0.14 példa egyenlőtlensége azt adja, hogy $\|p_n\| \geq |1 + |a_0|| = 2$.

Irodalomjegyzék

[1] Adams, D. & Hedberg, L., Function Spaces and Potential Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, **314**, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1996.

[2] V. Anagnostopoulos, Sz. Révész, Polarization constants for products of linear functionals over $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{C}^2$ and Chebyshev constants of the unit sphere, *Publ. Math. Debrecen.*, **68/1-2** (2006),

[3] Andrievskii, V. V., On the inverse logarithmic potential problem, *East J. on Approximation* **7** (2001), 195–204.

[4] Armitage, D. & Gardiner, S., *Classical Potential Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2002.

[5] M. Baran, Siciak's extremal function of convex sets in $\mathbb{C}^n$, *Annales Polonici Mathematici*, **48** (1988), 275–280.

[6] M. Baran, Plurisubharmonic extremal functions and complex foliations for the complement of convex sets in $\mathbb{R}^n$, *Michigan Math. J.* **39** (1992), 395-404.

[7] M. Baran, Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbb{R}^n$,*J. Approx. Theory*, **69** (1992), 156-166.

[8] M. Baran, Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbb{R}^n$ revisited, *J. Approx. Th.* **79** (1994) 190–198.

[9] M. Baran, Complex equilibrium measure and Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbb{R}^n$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995) 485–494.

[10] M. Baran, Polynomial inequalities and geometry in Banach spaces, *manuscript*, 2004, 11 pages.

[11] M. Baronti, E. Casini, P. L. Papini, On average distances and the geometry of Banach spaces, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* **42A** (2000), no. 3, 533–541.

[12] E. Bedford, B. A. Taylor, The complex equilibrium measure of a symmetric convex set in $\mathbb{R}^n$, *Trans. AMS* **294** (1986), 705-717.

[13] G. Björck, Distributions of positive mass, which maximize a certain generalized energy integral, *Ark. Mat.* **3** (1958), 255–269.

[14] T. Bloom and J-P. Calvi, On the multivariate transfinite diameter, *Ann. Polon. Math.* **73** (3) (1999), 285-305.

[15] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1995.

[16] L. Bos, N. Levenberg and S. Waldron, Pseudometrics, distances, and multivariate polynomial inequalities, *Journal of Approximation Theory* **153** (2008), no. 1, 80-96.

[17] Brelot, M., Contributions to Potential Theory, Technical Note No. 2, Department of the Air Force, 1955.

[18] D. Burns, N. Levenberg, S. Ma'u, Pluripotential theory for convex bodies in $\mathbb{R}^N$, *Math. Zeitschrift* **250** (2005), no. 1, 91-111.

[19] D. Burns, N. Levenberg, S. Ma'u, Exterior Monge-Ampère Solutions, *Adv. Math.* **222** (2009), no. 2, 331–358.

[20] D. Burns, N. Levenberg, S. Ma'u Sz. Révész, Monge–Ampère measures for convex bodies and Bernstein-Markov type inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *to appear.*

[21] Carleson, L., *Selected Problems on Exceptional Sets*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.

[22] G. Choquet, *Diamètre transfini et comparaison de diverses capacités*, Séminaire de Théorie du Potentiel, Faculté des Sciences de Paris, 1958/59, 7 pages.

[23] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable II*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **159**, Springer, 1995.

[24] Demailly, J-P., Potential Theory in Several Complex Variables, *manuscript*, 1995, 37 pages.

[25] Dineen, S., *The Schwarz Lemma*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[26] Doob, J. L., *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 262, Springer Verlag, 1984.

[27] T. Duong, W. Robinson, Semigroup kernels, Poisson bounds, and holomorphic functional calculus. *J. Funct. Anal.* **142**, 89-128, 1996.

[28] Edwards, R. E., *Fourier Series I-II*, Holt–Rinehart–Winston, 1967.

[29] Edwards, R. E., *Functional Analysis*, Holt–Rinehart–Winston, 1965.

[30] B. Farkas, B. Nagy, Transfinite diameter, Chebyshev constant and energy on locally compact spaces. *Potential Anal.*, **28** (2008), no. 3, 241–260.

[31] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Rendezvous numbers in normed spaces, *Bull. Austr. Math. Soc.*, **72** (2005), 423–440.

[32] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Rendezvous numbers of metric spaces – a potential theoretic approach, *Archiv der Mathematik*, **86** (2006), 268–281.

[33] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Potential theoretic approach to rendezvous numbers, *Monatshefte für Mathematik*, **148** (2006), 309–331.

[34] Fekete, M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit Ganzzahliger Koeffizienten, Math. Zeitschrift, **17** (1923), 228-249.

[35] B. Fuglede, On the theory of potentials in locally compact spaces,*Acta Math.* **103** (1960), 139-215.

[36] T. W. Gamelin, Analytic functions in Banach spaces, *in: Complex Potential Theory (Ed. P. M. Gauthier, G. Sabidussi)*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994, 187–223.

[37] Gardner, R. J. & Hawkes, J., Majorizing sequences and approximation, Ark. Math. **14** (1976), 197-211.

[38] O. Gross, The rendezvous value of a metric space, in: Advances in Game Theory, *Ann. of Math. Studies* **52**, Princeton, 1964, 49–53.

[39] Halász Gábor, Komplex függvénytani füzetek II., Fejezetek a komplex függvénytanból, ELTE TTK jegyzet, 1997.

[40] L. A. Harris, A. Bernstein-Markov Theorem for Normed Spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **208** (1997), 476–486.

[41] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer, New York, 2001.

[42] Helms, L. L., *Introduction to potential theory*, Pure and Applied Mathematics, Volume **XXII**, Wiley–Interscience, 1969.

[43] Hörmander, L., *An Introduction to Complex Analysis of Several Variables,*The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., 1966.

[44] Howroyd, J. D., *On the theory of Hausdorff measures in metric spaces*, PhD Thesis, University College, London, 1994, 69 p.

[45] Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. **31**, Springer, 1929.

[46] J. Kinnunen, O. Martio, The Sobolev capacity on metric spaces, *Annales Acad. Sci. Fenn.* **21** (1996), 367-382.

[47] M. Klimek, *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[48] Korevaar, J., Fekete extrémé points and related problems, in: *Approximation Theory and Function Series*, Budapest, 1995, Bolyai Society Mathematical Studies, 5, 1996, pp. 35–62.

[49] J. Korevaar, M. A. Monterie, Fekete potentials and polynomials for continua, *J. Approx. Theory* **109** (2001), 110-125.

[50] J. Korevaar, M. A. Monterie, Approximation of the quilibrium distribution by distributions of equal point charges with minimal energy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998)(6), 2329-2348.

[51] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, Sixth Edition, John Wiley & Sons, 1988.

[52] P. Kunstmann, Heat kernel estimates and spectral independence of elliptic operators. *Bull. London Math. Soc.***31**, 345-353, 1999.

[53] N. S. Landkoff, *Foundations of Modern Potential Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, (Band **180**), Springer Verlag, Berlin, 1972.

[54] E. Levin, D. Lubinsky, D., *Orthogonal polynomials for exponential weights*, CMS Books in Mathematics **4**, Springer Verlag, 2001.

[55] M. Lundin, The extremal plurisubharmonic function for the complement of the disk in $\mathbb{R}^2$, unpublished preprint, 1984.

[56] M. Lundin, The extremal plurisubharmonic function for the complement of convex, symmetric subsets of $\mathbb{R}^n$, *Michigan Math. J.* **32** (1985), 197-201.

[57] S. Mau, Plurisubharmonic functions of logarithmic growth, *Ph.D. thesis*, University of Auckland, 2003.

[58] H. Mhaskar Introduction to the theory of weighted polynomial approximation, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, 1996.

[59] H. Mhaskar, E. Saff Where does the sup norm of a polynomial live? *Constr. Appr.* **1**(1985), 71-91.

[60] L. B. Milev, Sz. Gy. Révész, Bernstein's inequality for multivariate polynomials on the standard simplex, *J. Inequalities and Appl.*, (2005), no. 2, 145-163.

[61] P. Nickolas and R. Wolf, Distance geometry in quasihypermetric spaces. I. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **80** (2009), no. 1, 1–25.

[62] P. Nickolas and R. Wolf Distance Geometry in Quasihypermetric Spaces. II. *Math. Nachr.*, 15 pages;
`arXiv:0809.0744`.

[63] P. Nickolas and R. Wolf Finite quasihypermetric spaces. *Acta Math. Hung.*, **124** (2009), no. 3, 243–262.

[64] M. Ohtsuka, On potentials in locally compact spaces, *J. Sci. Hiroshima Univ. ser A* **1**, 135–352, 1961.

[65] A. Pappas, Sz. Gy. Révész, Linear polarization constants of Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **300** (2004), 129–146.

[66] W. Pawlucki, W. Plesniak, Markov's inequality and C^∞ functions on sets with polynomial cusps, *Math. Ann.* **275** (1986), 467–480.

[67] Petruska György, *Komplex függvénytan*, ELTE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, 1983.

[68] W. Pleśniak Recent progress in multivariate Markov inequality, *in: Approximation Theory, In Memory of A. K. Varma, ed. J. Szabados*, Marcel Dekker, 1998, 449-464.

[69] Gy. Pólya, G. Szegő, Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, *J. Reine Angew. Math.* **165** (1931), 4-49.

[70] Pólya György – Szegő Gábor, *Feladatok és tételek az analízis köréből*, I–II, Tankönyvkiadó, 1980, 1981.

[71] T. Ransford, Potential theory in the complex plane, London Mathematical Society Student Texts vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[72] Sz. Révész, A comparative analysis of Bernstein type estimates for the derivative of multivariate polynomials, *Ann. Polon. Math.* **88** (2006), no. 3, 229-245.

[73] Sz. Gy. Révész, Y. Sarantopoulos, On Markov constants of homogeneous polynomials over real normed spaces, *East J. Approx.*, **9** (2003), no. 3, 277–304.

[74] Sz. Gy. Révész, Y. Sarantopoulos, Plank problems, polarization, and Chebyshev constants, *J. Korean Math. Soc.*, **41** (2004) no. 1, 157–174.

[75] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw Hill Book Company, 1964.

[76] Saff, E. & Totik, V., *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren der Mathematischen, Wissenschaften, vol. 316, Springer, 1997.

[77] Simon L. & Baderko, A. E., *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, 1983.

[78] Totik Vilmos, Középérték tulajdonságú függvények, *Polygon* II. kötet 1. szám, 1992.

[79] V. Totik, *Weighted Approximation with Varying Weight*, Lecture Notes in Mathematics **1569**, Springer-Verlag, 1994.

[80] Tsuji, M., *Potential Theory in Modern Function Theory*, Marusan Co., Tokyo, 1958.

[81] Wolf, Reinhard, Averaging distances in real quasihypermetric Banach spaces of finite dimension. Israel J. Math. 110 (1999), 125–151.

[82] Wolf, Reinhard, On the average distance property in finite-dimensional real Banach spaces. Bull. Austral. Math. Soc. 51 (1995), no. 1, 87–101.

[83] Wolf, Reinhard, Die Rendezvous-Zahl eines endlichen, zusammenhängenden Graphen. (German) [The rendezvous number of a finite, connected graph] Séminaire Lotharingien

de Combinatoire (Salzburg, 1990), 161–166, Publ. Inst. Rech. Math. Av., 462, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1991

[84] Zaharjuta, V. P., Transfinite diameter, Chebishev constants, and capacity for compacta in $\mathbb{C}^n$, *Math. USSR Sbornik* **25** (1975), No. 3, 350–364 (English translation).

[85] N. Zorii, Exremal problems in the theory of capacities of condensers in locally compact spaces I,II,III, *Ukrainian Math. Journal*, **53** (2001), No. 3, 190–213, No. 4, 528–554, & No. 6, 886–915.

[86] N. Zorii, Exremal problems in the theory of potentials in locally compact spaces I,II,III, *Bull. Soc. Lett. Lódź*, **L, XXXI** (2000), 25–54, 55–80, & 81–106.