1. A Fixpont Tétel

1.1.

Tétel (Fixpont Tétel). Legyen $\Gamma \subseteq TH(\mathcal{N})$ olyan, hogy $\Gamma \vdash Q$ és legyen $\psi(v)$ olyan formula, melyben v az egyetlen szabad változó. Ekkor van olyan zárt φ formula, melyre

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Megjegyzések. A Γ-ra tett feltételeket így foglalhatjuk össze:

(a) $\Gamma \subseteq TH(\mathcal{N})$ miatt $\mathcal{N} \models \Gamma$, speciálisan Γ ellentmondásmentes.

(b) $\Gamma \vdash Q$ miatt Γ-ban minden rekurzív reláció reprezentálható. Valójában elég lenne ez utóbbit feltenni. Ezekre a feltételekre néha hivatkoznak úgy is, hogy „Γ elegendő mértékben kifejező”, elegendő mértékben ahhoz, hogy a rekurzív függvények „tükrözhetők” legyenek Γ-ban.

(c) A konklúzió az, hogy van olyan (zárt) φ formula, hogy φ és $\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ tárgynyelvi ekvivalenciája bizonyítható Γ-ból. Ezek szerint φ ekvivalens azzal, hogy saját Gödel-száma ψ-tulajdonságú, azaz – intuitív értelemben – φ valami olyasmit állít, hogy „én ψ-tulajdonságú vagyok” vagy legalábbis „a saját Gödel-számom ψ-tulajdonságú”.

Bizonyítás. Legyen R a következő reláció:

$$R = \{ \langle \ulcorner\varrho(v)\urcorner, \ \ \ulcorner\varrho(\ulcorner\varrho(v)\urcorner)\urcorner \rangle \in {}^2\omega : \\ \varrho(v) \text{ olyan formula, melyben } v \text{ az egyetlen szabad változó } \}.$$

R annak a rekurzív függvénynek a gráfja, mely adott $\varrho(v)$ formula Gödel-számához a $\varrho(\ulcorner\varrho(v)\urcorner)$ formula Gödel-számát rendeli. Ez a függvény nyilván Turing-kiszámítható, ezért R rekurzív reláció. Tekinthetjük R-t úgy is, hogy adott $n, m \in \omega$-re $\langle n, m\rangle$ pontosan akkor van R-ben, ha van olyan $\varrho(v)$, melyre $n = \ulcorner\varrho(v)\urcorner$ és m a legkisebb olyan szám, melyre $m = \ulcorner\varrho(\ulcorner\varrho(v)\urcorner)\urcorner$ - R-nek ezt a leírását és R rekurzivitását figyelembe véve, van olyan Σ-formula, mely R-et reprezentálja (az egyszerűség kedvéért e reprezentáló formulát is R-el jelöljük) és

$$(*) \qquad \Gamma \models (\forall x)(\text{legfeljebb 1 } y \text{ van})(R(x, y)),$$

mert tetszőleges $\mathcal{A} \models \Gamma$ struktúrára és tetszőleges $a, b_0, b_1 \in A$-ra, ha $\mathcal{A} \models R(a, b_0)$, $\mathcal{A} \models R(a, b_1)$, akkor b_0 és b_1 is legkisebb olyan elemek lennének, amelyek a-val $||R||^{\mathcal{A}}$ relációban állnának, ezért egyenlők lennének.

Másrészt tetszőleges $\varrho(v)$ formulára $\mathcal{N} \models R(\overline{\ulcorner\varrho(v)\urcorner}, \ \ \overline{\ulcorner\varrho(\ulcorner\varrho(v)\urcorner)\urcorner})$, ezért – mivel R Σ-formulával definiálható – tetszőleges $\mathcal{A} \models \Gamma$-ra

$$\mathcal{A} \models R(\overline{\ulcorner\varrho(v)\urcorner}, \ \ \overline{\ulcorner\varrho(\ulcorner\varrho(v)\urcorner)\urcorner}).$$

Ezt $(*)$-al kombinálva azt kapjuk, hogy tetszőleges $\mathcal{A} \models \Gamma$-ra és tetszőleges $\varrho(v)$-re pontosan 1 darab olyan $a \in A$ van, melyre $\mathcal{A} \models R(\overline{\ulcorner \varrho(v) \urcorner}, a)$ és erre az egyetlen a-ra $a = \overline{\ulcorner \varrho(\ulcorner \varrho(v) \urcorner) \urcorner}^{\mathcal{A}}$.

A tétel állításában szereplő ψ-re Legyen

$$\psi^*(v) = \forall z(R(v, z) \Rightarrow \psi(z))$$

és legyen

$$\varphi = \psi^*(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner).$$

Azt fogjuk belátni, hogy ez a φ eleget tesz a tétel állításának. Mivel

$$\varphi \ = \ \psi^*(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner) \ = \ \forall z(R(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner, z) \Rightarrow \psi(z)),$$

ezért a tétel állításához azt kell belátni, hogy

$$\Gamma \vdash \forall z(R(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner, z) \Rightarrow \psi(z)) \ \Leftrightarrow \ \psi(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Ehhez a teljességi tétel miatt elég belátni, hogy

$$(**) \qquad \Gamma \models \forall z(R(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner, z) \Rightarrow \psi(z)) \ \Leftrightarrow \ \psi(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Legyen $\mathcal{A}$ olyan struktúra, melyre $\mathcal{A} \models \Gamma$. A korábbi bekezdések alapján pontosan 1 darab olyan $a \in A$ van, melyre $\mathcal{A} \models R(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner, a)$ és ez $a = \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}^{\mathcal{A}}$. Ezért

$$\mathcal{A} \models \forall z(R(\ulcorner \psi^*(v) \urcorner, z) \Rightarrow \psi(z)) \quad \text{ACSA} \quad \mathcal{A} \models \psi(\ulcorner \varphi \urcorner),$$

vagyis $(**)$ teljesül, és ezzel készen vagyunk.