

## Halmazelmélet vizsgakérdések

1. A  $\sim$  reláció. A kiválasztási axióma és egyszerű következményei: megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.
2.  $A \leq B$  definíciója és alaptulajdonságai (kompatibilitás, reflexivitás, tranzitivitás).
3. A Bernstein-féle antiszimetria tétel.
4. Tetszőleges halmaz és hatványhalmaza nem ekvivalensek. A számosságok naív definíciójának ellentmondásossága.
5. A ZFC axiómarendszer. Új operációk és relációk bevezetése.
6. Ha  $A, p_1, \dots, p_n$  halmaz, és  $\varphi$  formula, akkor  $\{x \in A : \varphi(x, p_1, \dots, p_n)\}$  is halmaz. Rendezett pár, reláció, függvény, direkt szorzat fogalma.
7. Rendezett halmaz, jólrendezés. Rendszámok és alaptulajdonságaik (a–f pontok).
8. A rendszámok valódi osztályt alkotnak. Ha  $\varphi$  egy formula, és van  $\varphi$  tulajdonságú rendszám, akkor van legkisebb,  $\varphi$  tulajdonságú rendszám is.
9. Rákövetkező és limesz rendszámok,  $\omega$  definíciója. Transzfinit indukció.
10. Transzfinit rekurzió.
11. A kiválasztási axióma két ekvivalense (Zorn–lemma, és minden halmazhoz van vele ekvivalens rendszám).
12. A számosságoperáció és néhány alaptulajdonsága: minden végtelen számosság limeszrendszám, és a számosságok rendezése a rendszámok rendezésének leszűkítése.
13. Műveletek számosságokon, és ezek néhány tulajdonsága:  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ ,  $\alpha^{\Sigma\beta\gamma} = \Pi\alpha^{\beta\gamma}$ ,  $(\Pi\alpha_\gamma)^\beta = \Pi(\alpha_\gamma^\beta)$ .
14. Általános disztributivitási szabály, a számosságaritmetika alaptétele (az alaptétel bizonyítás nélkül).
15. Kofinalitás operáció, ha  $\kappa$  végtelen számosság, akkor  $\kappa^+$  reguláris rendszám.
16. Ha  $\kappa$  végtelen számosság, akkor  $\kappa < \kappa^{\text{cf}(\kappa)}$  és  $\kappa < \text{cf}(2^\kappa)$ .
17. Néhány nevezetes, ZFC-től független állítás. Rang, kumulatív hierarchia és alaptulajdonságai.
18. A regularitási axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaznak van rangja.

2016 május.