

Halmazelmélet vizsgakérdések

1. $A \sim$ reláció. A kiválasztási axióma és egyszerű következményei: megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.
2. $A \leq B$ definíciója és alaptulajdonságai (kompatibilitás, reflexivitás, tranzitivitás).
3. A Bernstein-féle antiszimetria tétel.
4. Tetszőleges halmaz és hatványhalmaza nem ekvivalensek. A számosságok naív definíciójának ellentmondásossága.
5. A ZFC axiómarendszer. Új operációk és relációk bevezetése.
6. Ha A, p_1, \dots, p_n halmaz, és φ formula, akkor $\{x \in A : \varphi(x, p_1, \dots, p_n)\}$ is halmaz. Rendezett pár, reláció, függvény, direkt szorzat fogalma.
7. Rendezett halmaz, jólrendezés. Rendszámok és alaptulajdonságaik (a–f pontok).
8. A rendszámok valódi osztályt alkotnak. Ha φ egy formula, és van φ tulajdonságú rendszám, akkor van legkisebb, φ tulajdonságú rendszám is.
9. Rendszámok rákövetkezői, rendszámokból álló halmazok szuprémumai, és az ezekre vonatkozó tételek.
10. Limesz rendszámok létezése, ω definíciója. Transzfinit indukció.
11. Transzfinit rekurzió.
12. A kiválasztási axióma két ekvivalense (Zorn–lemma, és minden halmazhoz van vele ekvivalens rendszám).
13. A számosságoperáció és néhány alaptulajdonsága: minden végtelen számosság limeszrendszám, és a számosságok rendezése a rendszámok rendezésének leszűkítése.
14. Műveletek számosságokon, és ezek néhány tulajdonsága: $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$, $\alpha^{\sum\beta\gamma} = \prod\alpha^{\beta\gamma}$, $(\prod\alpha_\gamma)^\beta = \prod(\alpha_\gamma^\beta)$.
15. Általános disztributivitási szabály.
16. Kofinalitás operáció, ha κ végtelen számosság, akkor κ^+ reguláris rendszám.
17. Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa < \kappa^{\text{cf}(\kappa)}$ és $\kappa < \text{cf}(2^\kappa)$.
18. A számosságaritmetika alaptétele. Néhány nevezetes, ZFC-től független állítás.
19. Rang, kumulatív hierarchia és alaptulajdonságai.
20. A regularitási axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaznak van rangja.