ELTE TTK Matematikai Logika Vizsgakérdések, 2024 ősz (2 oldal)

(A) Alapok

1. Elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, termek, formulák), szabad, kötött változók. Struktúrák, kiértékelések. Egy formula igazsága csak szabad változóitól függ.
2. Formulák ekvivalenciája. Vázlatosan: minden formula ekvivalens egy Prenex-alakúval. A szemantikus következmény fogalma.
3. Izomorfizmus. Alapvető modellkonstrukciók (homomorf kép, részstruktúra, direktszorzat). Alapvető megőrzési tételek: legyen f adott függvény az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák között, és legyen φ formula.
   - Ha f izomorfizmus, akkor $\mathcal{A} \models \varphi$ ACSA $\mathcal{B} \models \varphi$;
   - Ha f szürjektív homomorfizmus, φ egyenlőségmentes és $\mathcal{A} \models \varphi$ akkor $\mathcal{B} \models \varphi$,
   - Ha f injektív homomorfizmus, φ egzisztenciális és $\mathcal{A} \models \varphi$ akkor $\mathcal{B} \models \varphi$,
   - Ha $\mathcal{B}$ részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak, φ univerzális és $\mathcal{A} \models \varphi$, akkor $\mathcal{B} \models \varphi$.
4. Az elsőrendű logika axiómái, következtetési szabálya, a *Ded* operátor lezárási operátor.
5. Dedukciós tétel.
6. Ellentmondásos formulahalmaz fogalma, $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos; $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Ellentmondásos formulahalmazból minden levezethető.
7. Helyességi tétel (azaz, ha $\Sigma \vdash \varphi$, akkor $\Sigma \models \varphi$).
8. Minden ellentmondástalan formulahalmaz kiterjeszthető egy teljes, ellentmondástalan formulahalmazzá és egy teljes, ellentmondástalan Skolemizált formulahalmazzá.
9. Minden teljes, ellentmondástalan Skolemizált formulahalmaznak van modellje. A teljességi tétel (azaz, ha $\Sigma \models \varphi$, akkor $\Sigma \vdash \varphi$) .

(B) Halmazelmélet

1. Számosságoperáció. A számosság naív definíciójának ellentmondásossága. ZFC axiómák. A nyelv bővítése. Az osztály fogalma.
2. Rendszámok. Rendszám elemei is rendszámok.
3. A rendszámok rendezése és alaptulajdonságai (irreflexivitás, tranzitivitás, trichotómia, ha egy halmazban (illetve osztályban) van rendszám, akkor van benne legkisebb is).
4. A rendszámok valódi osztályt alkotnak. Limesz, és rákövetkező rendszámok. Limeszrendszám létezése.
5. Transzfinit indukció és helyessége.
6. Transzfinit rekurzió és helyessége.
7. A kiválasztási axióma néhány ekvivalense: minden halmazzal van ekvivalens rendszám, Zorn-lemma.
8. A számosságoperáció definíciója. Minden végtelen számosság limeszrendszám.
9. Műveletek számosságokkal, és ezek alaptulajdonságai.
10. Disztributivitás (bizonyítás nélkül: a számosságaritmetika alaptétele).
11. A kofinalitás operáció. Végtelen számosság rákövetkezője reguláris rendszám.
12. Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$ és $cf(2^\kappa) > \kappa$. A Kontinuum-probléma és a kontinuum-hipotézis.
13. Rang és alaptulajdonságai.
14. A tranzitív lezárt. A regularitási axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaznak van rangja.

(C) Ultraszűrők, ultraszorzatok

1. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
2. Az ultraszorzat definíciója. Łoś-lemma.
3. Reguláris ultraszűrők és létezésük (bizonyítás nélkül: minden centrált halmazrendszer kiterjeszthető szűrővé, minden szűrő kiterjeszthető ultraszűrővé).
4. A kompaktsági tétel.
5. κ-reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatvány számossága.
6. Az elemi ekvivalencia fogalma. A felszálló Löwenheim-Skolem tétel. Minden végtelen struktúrához van vele nem izomorf, de elemien ekvivalens másik struktúra.
7. Elsőrendben axiomatizálható és végesen axiomatizálható modellosztályok jellemzése.
8. Skolemizálás. Elemi részstruktúrák. A leszálló Löwenheim-Skolem tétel.

(D) Nemteljességi Tételkör

1. Primitív rekurzív és rekurzív függvények, relációk. Σ_0-formulák, az általuk definiált relációk rekurzívak.
2. A Gödel-féle β függvényből származtatott sorozatkódolás, és a rá vonatkozó tétel.
3. Rekurzívan felsorolható relációk, Σ-formulák és kapcsolatuk. Van rekurzívan felsorolható, nem rekurzív reláció.
4. Ha a Σ formulahalmaz teljes és rekurzívan felsorolható, akkor $Ded(\Sigma)$ rekurzív. $TH(\mathcal{N})$ nem axiomatizálható rekurzívan felsorolhatóan.
5. A Robinson-féle Q axiómarendszer modelljei, ezek sztenderd részei, kapcslatuk a Σ_0-formulákkal.
6. Q-ban minden rekurzívan felsorolható reláció reprezentálható.
7. A Fixpont tétel. Tarski tétele az igaz formulák halmazának definiálhatatlanságáról.
8. Gödel első nemteljességi tétele és a Gödel-Rosser tétel.

2024 ősz.