Többváltozós integrálható függvények összege tagonként integrálható

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbf{R}^n$ n-dimenziós intervallum, és legyen $f, g : I \to \mathbf{R}$ két integrálható függvény. Ekkor

$$\int_I f + g \quad = \quad \int_I f \; + \int_I g.$$

Bizonyítás. Legyen $\langle \tau^{(n)}, n \in \mathbf{N} \rangle$ az I intervallum egy tetszőleges, finomodó felosztás-sorozata, és minden $n \in \mathbf{N}$-re legyen $\varrho^{(n)}$ a $\tau^{(n)}$ egy reprezentáns-rendszere. Egy n-dimenzios J intervallum mértékét $\mu(J)$-vel jelölve:

$$\int_I f + g = \lim_{n\to\infty} \sum_{J \in \tau^{(n)}} (f+g)(\varrho_J) \cdot \mu(J) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{J \in \tau^{(n)}} (f(\varrho_J) + g(\varrho_J)) \cdot \mu(J) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{J \in \tau^{(n)}} f(\varrho_J) \cdot \mu(J) + g(\varrho_J) \cdot \mu(J) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{J \in \tau^{(n)}} f(\varrho_J) \cdot \mu(J) \quad + \quad \sum_{J \in \tau^{(n)}} g(\varrho_J) \cdot \mu(J) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{J \in \tau^{(n)}} f(\varrho_J) \cdot \mu(J) \quad + \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{J \in \tau^{(n)}} g(\varrho_J) \cdot \mu(J) = \int_I f \quad + \quad \int_I g.$$