HALMAZELMÉLET

15. TÉTEL

Kofinalitás operáció, ha κ végtelen számosság, akkor κ^+ reguláris rendszám

Definíció: legyen $(A, \leq)$ előrendezés ($\leq$ reflexív és tranzitív)
$X \subseteq A$ kofinális, ha $(\forall a \in A)(\exists b \in X)$ hogy $a \leq b$,
tehát minden elem fölé lehet menni X-ben.

Definíció: $cf(A, \leq) = \min\{|X| : X \subseteq A \text{ kofinális}\}$
ha α rendszám, akkor $cf(\alpha) = cf(\alpha, \in_\alpha)$

Megjegyzés: $cf(A, \leq)$ = a legkisebb méret, hogy akkora nemkorlátos része van A-nak

Megjegyzés: az Arkhimédeszi axióma azt mondja, hogy $\mathbb{N}$ kofinális $(\mathbb{R}, \leq)$-ben.

Példák: (i) legyen $\mathcal{F} = {}^\omega\omega$ $f, g \in \mathcal{F}$, $f \leq g$ akkor, ha $\exists N \in \omega$ hogy $\forall n > N$ $f(n) \leq g(n)$
(vagyis véges sok kivétellel mindig g veszi fel a nagyobb értéket)

Állítás: $cf(\mathcal{F}, \leq) > \omega$ / $|\mathcal{F}|$ = kontinuum /

Bizonyítás: elég megmutatni, hogy ha $X \subseteq \mathcal{F}$ megszámlálható, akkor X korlát $\mathcal{F}$-ben. Ekkor $X = \{f_n, n \in \omega\}$
Legyen $h(n) = 1 + \max\{f_k(n), k \leq n\}$ /h_1 nagyobb mint f_1, h_2 nagyobb mint f_2/ $h \in \mathcal{F}$ és felső korlátja X-nek, tehát X korlátos, de $\mathcal{F}$ nem! ↯ □

(ii) „Nagy halmaz kis kofinalitással" legyen ξ tetszőleges rendszám
$cf(s(\xi)) = 1$

Nem kell

Definíció: ($\aleph$ operáció) az $\aleph_\alpha$ = a legkisebb olyan végtelen számosság, amely majorálja az $\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ halmazt (transzfinit rekurzióval)

17. Tehát $\aleph_0 = \omega$ /a $\emptyset$ halmazt majoráló legkisebb végtelen számosság

Tételben (**) ~~lsz~~ $\aleph_1$ = legkisebb nem megszámlálható számosság

Példa (3): $cf(\aleph_\omega) \geq \aleph_0$ mert $\aleph_\omega$ végtelen számosság, ezért a múltkori tétel miatt limeszrendszám, nincs benne legnagyobb elem.
$cf(\aleph_\omega) \leq \aleph_0$ mert legyen $X = \{\aleph_n\ n \in \omega\}$ X kofinális $\aleph_\omega$-ban, mert
$\forall \alpha \in \aleph_\omega \Rightarrow |\alpha| < \aleph_\omega \Rightarrow \exists n$ hogy $|\alpha| \leq \aleph_n \Rightarrow |\alpha| \leq \aleph_{n+1}$ és $\aleph_{n+1} \in X$
$\Rightarrow cf(\aleph_\omega) \leq \aleph_0$
Tehát $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$

Nem kell □

nem kell

Példa (4): $\sum_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$

Bizonyítás: legyen $n \in \omega$, akkor $\sum_{n\in\omega} \aleph_n \geq \aleph_n$ $\forall n$-re igaz $\Rightarrow \sum_{n\in\omega} \aleph_n \geq \aleph_\omega$

fordítva: $\sum_{n\in\omega} \aleph_n \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_\omega = \aleph_0 \cdot \aleph_\omega \leq \aleph_\omega \cdot \aleph_\omega = \aleph_\omega$ □

Tehát

$$\left.\begin{array}{l} \aleph_0 + \aleph_1 + \dots = \aleph_\omega \\ \quad\wedge \quad\ \wedge \qquad\qquad \shortparallel \\ \aleph_\omega + \aleph_\omega + \dots = \aleph_\omega \end{array}\right\}$$

az összeadás nem szigorúan monoton! (csak gyengén)

Definíció: legyen κ számosság, legyen κ^+ = a legkisebb κ-nál nagyobb számosság

λ rákövetkező számosság, ha $\exists \kappa$ hogy $\lambda = \kappa^+$

λ limeszszámosság, ha $\lambda \neq 0$ és $\nexists \kappa$ hogy $\lambda = \kappa^+$

α rendszám reguláris, ha $\alpha = cf(\alpha)$. Ekkor α számosság is.

/Pl: $cf(\omega) = \omega \Rightarrow \omega$ reguláris rendszám/

Állítás: ha κ végtelen számosság, akkor κ^+ reguláris rendszám.

Bizonyítás: indirekt

Tfh: $cf(\kappa^+) < \kappa^+$ ekkor van egy X rész, hogy $X \subseteq \kappa^+$ kofinális $|X| < \kappa^+$

Feltehető, hogy $|X| = \kappa$ (felpumpálható addig)

Van $f: \kappa \to X$ bijekció

Állítás: $\cup Ran(f) = \kappa^+$

Bizonyítás: ($\leq$ irány): legyen $\alpha \in \cup Ran(f) \Rightarrow \exists \beta \in \kappa$ hogy $\alpha \in f(\beta)$
de $f(\beta) \in X \subset \kappa^+$, azaz $\alpha \in f(\beta) \in \kappa^+$ és κ^+ tranzitív halmaz, ezért $\alpha \in \kappa^+$

($\geq$ irány) legyen $\beta \in \kappa^+$ κ^+ végtelen számosság, ezért limeszrendszám
tehát $s(\beta) \in \kappa^+$. Az X kofinális κ^+-ban, ezért $\exists \gamma \in X$, hogy $s(\beta) \leq \gamma$
azaz $(\exists \alpha \in \kappa)$ $s(\beta) \leq f(\alpha) = \gamma \Rightarrow$ ~~$s(\beta) \in f(\alpha)$~~

$s(\beta) \leq f(\alpha) \Rightarrow s(\beta) \subseteq f(\alpha)$ } $\beta \in f(\alpha)$

ugyanakkor $f(\alpha) \in Ran(f) \Rightarrow \beta \in \cup Ran\, f$ □

Tehát

$$\left.\begin{array}{l} \kappa^+ = \cup Ran(f) \\ |\cup Ran(f)| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa^2 = \kappa \end{array}\right\} \kappa^+ = \kappa \ \lightning$$

Jó!

Tehát κ^+ reguláris. □

Halmazelmélet vizsga
16. Tétel

Hársfalvi Borbála
JD7CCW

Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$ és $\kappa < cf(2^\kappa)$

Tétel: Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$

Bizonyítás:

$\{\lambda_i : i < cf(\kappa)\}$ kofinális κ-ban

$f: \kappa \to {}^{cf(\kappa)}\kappa$

azt kell megmutatnunk, hogy f nem lehet szürjektív

(ugyanis $\kappa \subseteq \kappa^{cf(\kappa)}$ világos)

Legyen $\forall i < cf(\kappa)$-ra $A_i = \{ f(\alpha)(i) \text{ rendszám} : \alpha < \lambda_i \}$

Ekkor a $\kappa - A_i \neq \emptyset$ mert $i < cf(\kappa)$-ra részük csak

kiválasztási axióma $\{\kappa - A_i : i < cf(\kappa)\}$-ra

s függvény $\mathrm{Dom}(s) = \kappa$

$\forall i$-re $s(i) \in (\kappa - A_i)$

állítás: $s \notin \mathrm{Ran}\, f$

Biz: indirekt: tfh $\exists \alpha$ rendszám, hogy $s = f(\alpha)$

Ekkor viszont

$f(\alpha) \in A_i$ az A_i definíciója miatt

$f(\alpha)(i) \notin A_i$ az $s(i)$ definíciója miatt $\lightning$

Tehát f nem lehet szürjektív $\square$

$cf(\kappa)_\kappa$

Tétel: Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa < cf(2^\kappa)$

Bizonyítás:

indirekt tfh $cf(2^\kappa) \leq \kappa$, ekkor az előző miatt $2^\kappa < (2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} = 2^{\kappa \cdot cf(2^\kappa)} \leq 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^{\kappa^2} = 2^\kappa$

$\lightning$ #