1. Segédlet – rekurzív halmazok, függvnyek

1.1.

1.1.1. Példák rekurzív függvényekre

Alább megmutatjuk, hogy néhány konkrét függvény rekurzív. Ez azt a benyomást is alá fogja támasztani, hogy a rekurzív függvények halmaza „nagy” abban az értelemben, hogy a szokásos matematikai vizsgálatok során használt számelméleti függvények szinte mindig rekurzívak. Másrészt a későbbi fejezetekben használni is fogjuk, hogy az itt megvizsgált függvények tényleg rekurzívak.

1.1. Példa. Az $f : \omega^2 \to \omega$,

$$f(x, y) = x + y$$

kétváltozós összeadás-függvény primitív rekurziv, mert primitív rekurzióval keletkezik a π_2^1 és az $S \circ \pi_3^2$ függvényekből. Valóban, tetszőleges $x, y \in \omega$-ra

$$f(x, 0) = x = \pi_2^1(x, 0) \quad \text{és} \quad f(x, S(y)) = S(f(x, y)) = S(\pi_3^2(x, y, f(x, y))).$$

1.2. Példa. A $g : \omega^2 \to \omega$,

$$g(x, y) = x \cdot y$$

kétváltozós szorzás-függvény primitív rekurziv, mert tetszőleges $x, y \in \omega$-ra

$$g(x, 0) = 0 \quad \text{és} \quad g(x, S(y)) = g(x, y) + x.$$

Ez mutatja, hogy g lényegében az összeadásból keletkezik primitív rekurzióval. Pontosabban, g primitív rekurzióval keletkezik N_1-ből, és egy olyan függvényből, melyet a 1.1 példában bemutatott összeadas-függvényből a megfelelő projekciók kompozíciójával kapunk.

1.3. Példa. A $h : \omega^2 \to \omega$,

$$h(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{ha } x \geq y, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

csonkolt kivonás függvény primitív rekurzív. Ennek igazolásához definiáljuk az M megelőzési függvényt az

$$M(0) = 0 \quad \text{és} \quad M(S(x)) = x$$

primitív rekurzióval, majd h-t a

$$h(x, 0) = x \quad \text{és} \quad h(x, S(y)) = M(h(x, y))$$

primitív rekurzióval. A továbbiakban a csonkolt kivonást $\dot{-}$-al jelöljük, azaz $h(x, y)$ helyett $x \dot{-} y$-nt írunk.

1.4. Példa. Az egyenlőség-reláció $\chi_=$ karakterisztikus függvénye primitív rekurzív, mert minden $x, y \in \omega$-ra

$$\chi_=(x,y) = 1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)).$$

1.5. Példa. Minden $n \in \omega$-ra a $c_n : \omega \to \omega, c_n(x) = n$ konstans-függvény primitív rekurzív, mert $c_n = \underbrace{S \circ ... \circ S}_{n \text{ darab } S}(N_1)$.

1.6. Példa. Minden $n \in \omega$-ra legyen $t_n : \omega \to \omega$ az a függvény, melyre $t_n(n) = 1$, és ha $x \neq n$ akkor $t_n(x) = 0$. Mindegyik t_n primitív rekurzív, mert a 1.4 és 1.5 példák jelöléseit használva minden $x \in \omega$-ra

$$t_n(x) = \chi_=(c_n(x), x).$$

1.7. Példa. *Minden ω-n értelmezett, ω-beli együtthatókat tartalmazó sokváltozós polinomfüggvény primitív rekurzív, mert a 1.5 Példa miatt a konstansfüggvények primitív rekurzívak, és a 1.1, 1.2 példák miatt a primitív rekurzív függvények összeadásra és szorzásra zártak.*

1.8. Példa. Legyen $f : \omega \to \omega$ tetszőleges olyan függvény, mely majdnem mindenütt (azaz véges sok kivétellel) a 0 értéket veszi fel. A következők miatt f primitív rekurzív: van olyan $N \in \omega$, hogy ha $x > N$, akkor $f(x) = 0$. Ezért tetszőleges $x \in \omega$-ra

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} f(m) \cdot t_m,$$

és a jobboldali véges lineáris kombináció primitív rekurzív a 1.6, 1.1, 1.2 példák miatt.

1.1.2. Korlátos kvantorok

1.9. Definíció. *Az aritmetika nyelvének azokat a formuláit, melyek az atomi formulákból nulladrendű logikai összekötőjelekkel és korlátos kvantorokkal megkonstruálhatók, Σ_0-formuláknak nevezzük. A Σ_0-formulák halmazát Σ_0-al jelöljük.*

1.10. Tétel. *Ha $\varphi \in \Sigma_0$ (azaz φ az aritmetika nyelvén korlátos kvantorokkal felírható), akkor a φ által $\mathcal{N}$-ben definiált reláció rekurzív. (Bizonyítás volt a május 8.-i előadáson.)*

A 1.10 tétel állítása nem fordítható meg: a van olyan rekurzív reláció, mely nem definiálható korlátos kvantoros formulával.

1.11. Definíció. *Ha A adott halmaz, $n \in \omega$ és $f : A^n \to A$ adott függvény, akkor f grafikonjának nevezzük és $gr(f)$-el jelöljük a*

$$gr(f) = \{\langle a_0, ..., a_{n-1}, b\rangle \in A^{n+1} : f(a_0, ..., a_{n-1}) = b\}$$

$n + 1$-változós relációt.

1.1.3. Példák korlátos kvantorral definiálható relációkra

Röviden azt mondjuk, hogy egy f függvény Σ_0-definiálható, ha a $gr(f)$ reláció Σ_0-formulával definiálható.

1.12. Példa. A $<$ reláció Σ_0-formulával definiálható:

$$\{\langle a,b\rangle \in \omega^2 : a<b\} \quad = \quad ||(\exists x < v_b)(v_a + x + 1 = v_b)||^{\mathcal{N}}.$$

Hasonlóan definiálható Σ_0-formulával a $\leq$ reláció, sőt, az oszthatóság relációja is:

$$\{\langle a,b\rangle \in \omega^2 : a \text{ osztója } b\text{-nek } \} \quad = \quad ||(\exists x < v_b + 1)(v_a \cdot x = v_b)||^{\mathcal{N}}.$$

Azt, hogy a osztója b-nek, a továbbiakban $a|b$-vel jelöljük.

1.13. Példa. Legyen R a "maradékos osztás" művelete, azaz az a 2-változós függvény, mely $\langle a,b\rangle \in \omega^2$-hez a-nak b-vel való osztási maradékát rendeli:

$$gr(R) = \{\langle a,b,c\rangle \in \omega^3 : a\text{-t } b\text{-vel osztva } c \text{ lesz a maradék } \}.$$

Világos, hogy $R(a,b)$ az (az egyértelmű) b-nél kisebb szám, melyre teljesül, hogy $a - R(a,b)$ osztható b-vel. Ezért $gr(R)$ definiálható az alábbi Σ_0-formulával:

$$(\exists x < v_b)(v_b|(v_a + x) \;\wedge\; \underbrace{x + v_c = v_b}_{v_c = v_b - x}),$$

ahol | azt az oszthatósági relációt definiáló Σ_0-formulát jelöli, amit a 1.12 Példában adtunk meg.

1.14. Példa. A csonkolt kivonás grafikonja, vagyis a

$$gr(\dot{-}) = \{\langle a,b,c\rangle \in \omega^3 : c = a \dot{-} b\}$$

reláció definiálható az alábbi Σ_0-formulával:

$$(v_a \geq v_b \wedge \underbrace{v_a = v_b + v_c}_{v_c = v_a - v_b}) \quad \vee \quad (v_b \geq v_a \wedge v_c = 0).$$

1.15. Példa. A $\pi(a,b) = (a+b+1)^2 + a$ függvény grafikonját definiálja az alábbi Σ_0-formula:

$$v_c = (v_a + v_b + 1)^2 + v_a.$$

1.16. Példa. Az $f : \omega \to \omega, f(a) = [\sqrt{a}]$ függvény grafikonját az alábbi Σ_0-formula definiálja:

$$(v_b \cdot v_b \leq v_a) \quad \wedge \quad (v_a < (v_b + 1) \cdot (v_b + 1)).$$

1.17. Példa. Ha t az aritmetika nyelvének egy termje, akkor

$$gr(t^{\mathcal{N}}) = \{\langle a_0, ..., a_{n-1}, b\rangle \in \omega^{n+1} : b = t^{\mathcal{N}}(a_0, ..., a_{n-1})\} =$$

$$||t(v_{a_0}, ..., v_{a_{n-1}}) = v_b||^{\mathcal{N}},$$

tehát $t^{\mathcal{N}}$ grafikonját definiálja az előbbi Σ_0 (sőt kvantormentes) formula.

A következő lemmában azt mutatjuk meg, hogy lassan növő, Σ_0-definiálható függvények kompozíciója is Σ_0-definiálható.

1.18. Definíció. *Legyen $n \in \omega$ és $f : \omega^n \to \omega$ egy függvény. Az f függvény lassan nő, ha az aritmetika nyelvénak van olyan t termje, hogy minden $a_0, ..., a_{n-1} \in \omega$-ra*

$$f(a_0, ..., a_{n-1}) \leq t^{\mathcal{N}}(a_0, ..., a_{n-1}).$$

Minden termfüggvény lassan nő, mert sajátmagát majorálja.

1.19. Lemma. *Ha $k, n \in \omega$, $g : \omega^n \to \omega$ és $h_0, ..., h_{n-1} : \omega^k \to \omega$ Σ_0-definiálható, lassan növő függvények, akkor az $f = g(h_0, ..., h_{n-1})$ függvény is Σ_0-definiálható.*

Bizonyítás. Legyenek $t_0, ..., t_{n-1}$ és t_g olyan termek, melyek mutatják, hogy $h_0, ..., h_{n-1}$ illetve g lassan nő. Legyenek továbbá $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ és φ_g olyan Σ_0-formulák, melyek rendre a $gr(h_0), ..., gr(h_{n-1})$ és a $gr(g)$ relációt defiiniálják. Ekkor a

$$gr(f) = \{\langle a_0, ...a_{k-1}, b\rangle \in \omega^{k+1} : f(a_0, ..., a_{k-1}) = b\}$$

relációt definiálja a következő Σ_0-formula:

$$(\exists x_0 < t_0)...(\exists x_{n-1} < t_{n-1})\Big(\Big(\bigwedge_{i=0}^{n-1} \varphi_i(v_{a_0}, ..., v_{a_{k-1}}, x_i)\Big) \wedge \varphi_g(x_0, ..., x_{n-1}, v_b)\Big).$$

∎

1.20. Lemma. *A következő, ω-n, illetve ω^2-n értelmezett függvények Σ_0-definiálhatók.*
(1) $K(a) = a \dot{-} [\sqrt{a}]^2$,
azaz $K(a) = a \dot{-} b$, ahol b a legnagyobb, a-nál kisebb vagy egyenlő négyzetszám;
(2) $L(a) = [\sqrt{a}] \dot{-} K(a) \dot{-} 1$;
(3) $\beta(a, i) = R(K(a), 1 + (i + 1) \cdot L(a))$.

Bizonyítás. Mindhárom esetben azt mutatjuk meg, hogy a kérdéses függvény lassan növő, Σ_0-definiálható függvények kompozíciója. Részletesebben, a 1.14 és 1.16 Példák miatt $\dot{-}$ és $a \mapsto [\sqrt{a}]$ egyaránt Σ_0-definiálható függvények, és világos, hogy lassan nőnek. A négyzetreemelés-függvény termfüggvény, ezért lassan növő és Σ_0-definiálható. Ezért a 1.19 Lemma miatt az $a \mapsto [\sqrt{a}]^2$ függvény Σ_0-definiálható, és $[\sqrt{a}]^2 \leq a$ mutatja, hogy lassan nő. Ezért a 1.19 Lemmát újra alkalmazhatjuk, ezért K valóban Σ_0-definiálható.

(2) igazolásához figyeljük meg, hogy minden $a \in \omega$-ra $K(a) \leq a$, ezért K is lassan nő. Emiatt a 1.19 Lemma sorozatos alkalmazásával adódik, hogy L is Σ_0-definiálható (és L definíciójából az is nyilvánvaló, hogy lassan nő).

(3) teljesen hasonlóan, a 1.19 Lemma sorozatos alkalmazásával igazolható. ∎

1.2. Rekurzív Relációk Definiálhatósága

1.21. Definíció. *Az aritmetika nyelvének egy φ formuláját Σ-formulának nevezzük, ha egzisztenciális kvantorok (egy esetleg 0 hosszú) sorozata után egy Σ_0-formula következik:*

$$\varphi = \exists v_1 ... \exists v_{n-1} \psi,$$

ahol ψ egy Σ_0-formula.

Mivel a Σ-formulák elején álló egzisztenciális kvantorok száma lehet 0 is, ezért minden Σ_0-formula egyúttal Σ-formula is.

1.22. Definíció. *$A \subseteq \omega$ rekurzívan felsorolható halmaz, ha van olyan rekurzív függvény, melynek értékkészlete A. „Magasabb dimenzióban”, ha $n \in \omega, n > 1, A \subseteq \omega^n$, akkor A rekurzıvan felsorolható halmaz, ha az*

$$\{\ulcorner a_0, ..., a_{n-1} \urcorner \in \omega : \langle a_0, ..., a_{n-1} \rangle \in A\}$$

halmaz rekurzívan felsorolható az előző mondat értelmében.

Könnyű meggondolni, hogy a fenti terminológia konzekvens: $A \subseteq \omega$ akkor és csak akkor rekurzívan felsorolható, ha $B = \{\ulcorner a \urcorner \in \omega : a \in A\}$ rekurzívan felsorolható. Jelölje ugyanis $h_{\ulcorner\urcorner}$ az $\omega \ni a \mapsto \ulcorner a \urcorner$ és β_1 az $\omega \ni a \mapsto \beta(1, a)$ függvényeket. Ha valamilyen rekurzív g függvényre $ran(f) = A$, akkor $ran(h_{\ulcorner\urcorner} \circ f) = B$, illetve ha valamilyen g rekurzív figgvényre $ran(g) = B$, akkor $ran(\beta_1 \circ g) = A$.

Ebben az alfejezetben az a célunk, hogy megmutassuk: pontosan a rekurzívan felsorolható halmazok definiálhatók Σ-formulákkal.

1.23. Lemma. *Ha f rekurzív függvény, akkor $gr(f)$ definiálható Σ-formulákkal.*

Bizonyítás. A rekurzív függvények definíciójának összetettsége szerinti indukcióval bizonytunk.

Az S, π^k_n és N_n alapfüggvények mindegyike termfüggvénye $\mathcal{N}$-nek, ezért a 1.17 Példa miatt mindegyikük grafikonja definiálható kvantormentes formulával, ezért Σ-formulával is.

Tegyük most fel, hogy a $g : \omega^n \to \omega$ és $0 \leq i < n$-re a $h_i : \omega^k \to \omega$ függvények grafikonjait rendre definiálják a következő Σ-fomulák: φ_g,$\psi_0, ..., \psi_{n-1}$. Ekkor a helyettesítéssel előálló $g(h_0, ..., h_{n-1})$ függvény grafiknoját - a 1.19 Lemma bizonyításához hasonlóan - a

$$\exists x_0 ... \exists x_{n-1} \Big(\Big(\bigwedge_{i=0}^{n-1} \psi_i(v_{a_0}, ..., v_{a_{k-1}}, x_i) \Big) \wedge \varphi_g(x_0, ..., x_{n-1}, v_b) \Big)$$

formula definiálja, és világos, hogy ez a formula ekvivalens egy Σ-formulával.

Tegyük fel, hogy $k < n \in \omega$, $g : \omega^n \to \omega$ és φ_g olyan Σ-formula, mely definiálja $gr(g)$-t. Célunk $gr(\mu_{v_k=0}(g))$-t definiálni. Emlékeztetünk rá, hogy

$$\mu_{v_k=0}(g)(a_0, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_{n-1}) = b$$

akkor és csak akkor teljesül, ha minden $c \leq b$-re g értelmezve van az

$$\langle a_0, ..., a_{k-1}, c, a_{k+1}, ..., a_{n-1} \rangle$$

pontokban, továbbá, ha $c < b$, akkor $g(a_0, ..., a_{k-1}, c, a_{k+1}, ..., a_{n-1}) = g_i \neq 0$ és $g(a_0, ..., a_{k-1}, b, a_{k+1}, ..., a_{n-1}) = 0$. Az ötlet az, hogy a $\langle g_0, ..., g_b \rangle$ sorozatot egyetlen számmal kódoljuk, és az előző feltételeket a β-függvény segítségével formalizáljuk. Valóban, a

$$\varphi(v_{a_0}, ..., v_{a_{k-1}}, v_b, v_{a_{k+1}}, ..., v_{a_{n-1}}, 0) \wedge$$
$$\exists x(\beta(x, 0) = v_b \wedge (\forall v_c < v_b)(\beta(x, v_c{+}1) \neq 0 \wedge \varphi_g(v_{a_0}, ..., v_{a_{k-1}}, v_c, v_{a_{k+1}}, ..., a_{v_{n-1}}, \beta(x, v_{c+1}))$$

formula definiálja $gr(\mu_{v_k=0}(g))$-t és ekvivalens egy Σ-formulával, mert a 1.20 Lemma miatt a β függvény Σ_0-definiálható.

Ha f primitív rekurzioval áll elő a g és h függvényekből, akkor $gr(f)$ az előbbi ötlet mintájra lesz Σ-definiálható. Az indukciós feltevés miatt $gr(g)$ s $gr(h)$ is Σ-definiálható. Ha $a_0, ..., a_{n-1}, b \in \omega$, akkor legyen $a \in \omega$ a

$$\langle f(a_0, ..., a_{n-1}, 0), f(a_0, ..., a_{n-1}, 1), ..., f(a_0, ..., a_{n-1}, b-1) \rangle$$

sorozat Gödel-kódja. Ekkor a-val és a Σ_0-definilható β-függvénnyel leírhatjuk az összes feltételt, amivel a primitív rekurzió meghatározza $f(a_0, ..., a_{n-1}, b)$ értékét. ∎

1.24. Lemma. *Ha az $A \subseteq {}^n\omega$ reláció Σ-definiálható, akkor A rekuzívan felsorolható.*

Bizonyítás. Definiálja A-t a

$$(\exists v_1)(\exists v_2)...(\exists v_{m-1})\psi(v_0, ..., v_{m-1}, w_0, ..., w_{n-1})$$

formula, ahol $\psi \in \Sigma_0$. A 1.10 tétel miatt a ψ által definiált ($m+n$-változós) reláció rekurzív. Ezért van olyan algoritmus, amely helyes válaszd ad arra a kérdésre, hogy adott $\underline{a} \in {}^n\omega$ és $\underline{b} \in {}^m\omega$-ra $\psi(\underline{a}, \underline{b})$ fennáll-e.

Soroljuk fel ${}^m\omega \times {}^n\omega$ elemeit, és e felsorolás adott $(\underline{a}, \underline{b})$ elemére az előző bekezdés szerint állapítsuk meg, hogy $\psi(\underline{a}, \underline{b})$ fennáll-e. Ha igen, írjuk ki $\underline{b}$-t (és vegyük a felsorolás következő elemét), ha nem, akkor vegyük a felsorolás következő elemét. Ezzel pontosan A elemit soroltuk fel, ezért az előbbi algoritmusnak (rekurzív függvénynek) A lesz az értékkészlete.

$\blacksquare$