

Régebbi Matek B1 és A1 zh-k

Teljes Indukcióval, Halmazokkal Vektoralgebrával, Térgeometriával, Komplex számokkal, és sorozatokkal kapcsolatos feladatai.

1. Legyen $a_0 = 0$ és legyen $a_{n+1} = 2a_n^2 + 1$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat monoton növvő.

(2005 November 4)

2. Legyen $a_0 = 0$ és legyen $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat monoton növvő.

(2005 November 4)

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $\overline{(A \setminus B)} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C)$.

(2005 November 4)

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $\overline{(B \setminus C)} \cap A = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

(2005 November 4)

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq ((A \setminus C) \cup B) \setminus C.$$

(2006 Január 4)

6. Igaz-e bármely A, B, C halmazokra: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$? Ha nem, milyen kapcsolatnak kell fennállnia ezek között a halmazok között, hogy az egyenlőség teljesüljön?

(2008 Október 17)

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazra $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$.

(2008 December 19)

8. Bizonyítsuk be, hogy $A \setminus B = \overline{(B \setminus A)}$ akkor és csak akkor, ha $A = \overline{B}$ tel-

jesül.

(2008 December 4)

9. Legyen $O = (0, 0, 0)$ és $A = (2, 2, 1)$. Adjuk meg az összes olyan B pont koordinátáit, mely rajta van az $e : x - 2 = -1 - y, z = 1$ egyenesen és az OA, OB szakaszok 45 fokos szöget zárnak be.

(2005 November 4)

10. Legyenek $A = (2, -1, 3), B = (1, 0, 1), C = (1, 1, 12)$.

(a) Határozzuk meg a D pont koordinátáit, ha a BD szakasz párhuzamos az $(1, 3, 10)$ vektorral és AD merőleges $(1, 2, -1)$ -re.

(b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát. (Egy tetraéder térfogata egyenlő egy tetszőleges csúcsából induló oldalvektoraiból képzett vegyesszorzat abszolútértékének hatodával).

(2005 November 4)

11. Legyen $O = (0, 0, 0)$ és $A = (2, 2, 1)$. Adjuk meg az összes olyan B pont koordinátáit, mely rajta van az $e : x + 1 = 2 - y, z = 1$ egyenesen és az OA, OB szakaszok 45 fokos szöget zárnak be.

(2005 November 4)

12. Legyenek $A = (2, -1, 3), B = (1, 0, 1), C = (1, 1, 5)$.

(a) Határozzuk meg a D pont koordinátáit, ha a BD szakasz párhuzamos az $(1, 3, -6)$ vektorral és AD merőleges $(1, 2, 1)$ -re.

(b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát. (Egy tetraéder térfogata egyenlő egy tetszőleges csúcsából induló oldalvektoraiból képzett vegyesszorzat abszolútértékének hatodával).

(2005 November 4)

13. Legyen $A = [1, -1, 2], B = [1, 1, 1] v = [2, 2, 1]$.

(a) Adjuk meg annak az f egyenesnek az egyenletét, mely átmegy A -n, merőleges v -re és metszi az $x - 1 = y - 5 = \frac{z - 2}{2}$ egyenletű e egyenest.

(b) Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza A -t, B -t és az e és f egyenesek metszéspontját.

(2006 Január 4)

14. Jelölje P' a $P = (-1, 2, -1)$ pontnak az $A = (1, -2, 3)$ és $B = (1, 1, 0)$ pontokon átmenő egyenesre vonatkozó tükörképét. Adjuk meg P' koordinátáit, és határozzuk meg a $P'PB$ háromszög területét.

(2008 Október 17)

15. Legyen $\underline{a} = (2, -3, 6)$, $\underline{b} = (0, 2, 1)$ és $\underline{c} = (-30, -4, 8)$. Állapítsuk meg, hogy az $\{\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő-e. Indokoljunk.

(2008 Október 17)

16. Legyen $A = (1, 3, 0)$ és legyen az e egyenes egyenletrendszere $\frac{x-4}{2} = z+1$, $y = 3$.

(a) Adjuk meg az A ponton átmenő, e -re merőleges sík egyenletét.

(b) Adjuk meg az e egyenes és az S sík B metszéspontját.

(c) Határozzuk meg annak a paralellogrammának a területét, melynek két szomszédos oldala az OA és OB szakasz (O az origó).

(2008 December 19)

17. Legyen $\underline{a} = (4, 1, -3)$.

(a) Határozzuk meg a \underline{b} vektort, ha tudjuk, hogy $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ lineárisan függő, és $|\underline{b}| = 13\sqrt{2}$.

(b) Határozzuk meg az u paraméter értékét, ha tudjuk, hogy \underline{a} és $\underline{c} = [0, u, -1]$ merőlegesek egymásra.

(2008 December 19)

18. Legyen $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 0, 3)$, $C = (4, 2, 2)$.

(a) Adjuk meg az A, B, C pontokon átmenő S sík egyenletét.

(b) Határozzuk meg azt a pontot az S síkon, mely a legközelebb van az origóhoz.

(2008 December 4)

19. Legyen $\underline{a} = (3, 1, 3)$, $\underline{b} = (0, 2, 1)$ és $\underline{c} = (3, u, 2)$.

(a) Állapítsuk meg az u paraméter értékét, ha tudjuk, hogy \underline{c} merőleges \underline{b} -re.

(b) Állapítsuk meg, hogy az $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő-e az (a) részben meghatározott u értékre.

(2008 December 4)

20. Adjuk meg trigonometrikus alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását.

$$z^3 + 8 = \frac{-16 + 8i}{1 + 2i}.$$

(2005 November 4)

21. Adjuk meg trigonometrikus alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását.

$$z^3 + 27 = \frac{27 + 27i}{1 - i}.$$

(2005 November 4)

22. (a) Adjuk meg algebrai alakban: $\left(\frac{4 + 2i}{3 - i}\right)^9$.

(b) adjuk meg a következő p polinom összes komplex gyökét. (Útmutatás: először a racionális gyököket keressük meg.) $p(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x + 12$.

(2006 Január 4)

23. Adjuk meg az összes komplex megoldást trigonometrikus alakban:

$$(a) \quad z^3 + 3i = \frac{4 + 2i}{1 - i}.$$

$$(b) \quad z^3 = 4\bar{z}.$$

(2008 Október 17)

24. Adjuk meg a következő kifejezések értékeit algebrai alakban:

$$(a) \quad (1 - i) + \frac{1+i}{3-4i}$$

$$(b) \quad \frac{(1-\sqrt{3}i)^4}{i^{19}}$$

$$(c) \quad \sqrt[4]{-16}$$

(2008 December 19)

25. Adjuk meg az összes komplex megoldást algebrai alakban:

$$z^3(i - 1) = 27 + 27i.$$

(2008 December 4)

26. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+3} + \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 7} - \sqrt{n^2 + n - 9}) \sin n$$

(2008 December 19)

27. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{2n+5}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n^4+3} - \sqrt{2n^4+n^3}}$$

(2008 December 4)

28. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{3n} \right)^{2n-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3} \right)^{3n-1} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n})$$

(2008 október 17)

29. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{4n} \right)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-2} \right)^{2n-1} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n})$$

(2008 október 17)

30. Számítsuk ki a következő mennyiségeket, ha léteznek.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 2n} - \sqrt{n^4 + n^2}}{\sqrt{n^6 + 3n^3} - \sqrt{n^6 + 1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n + 2^n} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^{2n+1}$$

(2005 November 4)

31. Számítsuk ki a következő mennyiségeket, ha léteznek.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4 + 3n} - \sqrt{2n^4 + 3n^2}}{\sqrt{n^6 - n^3} - \sqrt{n^6 + 1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^4}{2^n} \right) \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{3n-2}$$

(2005 November 4)