

## Régebbi Matek B1 és A1 zh-k

Sorozatok és függvények határértékével, folytonossággal és a deriválás alapjaival kapcsolatos feladatai.

1. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+3} + \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 7} - \sqrt{n^2 + n - 9}) \sin n$$

(2008 December 19)

2. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^{2n+5}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n^4+3} - \sqrt{2n^4+n^3}}$$

(2008 December 4)

3. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{3n} \right)^{2n-1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n-3} \right)^{3n-1} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n})$$

(2008 október 17)

4. Számítsuk ki:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{4n} \right)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-2} \right)^{2n-1} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n})$$

(2008 október 17)

5. Számítsuk ki a következő mennyiségeket, ha léteznek.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 2n} - \sqrt{n^4 + n^2}}{\sqrt{n^6 + 3n^3} - \sqrt{n^6 + 1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n + 2^n} \left( \frac{n-2}{n+1} \right)^{2n+1}$$

(2005 November 4)

6. Számítsuk ki a következő mennyiségeket, ha léteznek.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4 + 3n} - \sqrt{2n^4 + 3n^2}}{\sqrt{n^6 - n^3} - \sqrt{n^6 + 1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{n^4}{2^n} \right) \left( \frac{n-1}{n+3} \right)^{3n-2}$$

(2005 November 4)

7. Számítsuk ki:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}(x))}{\sin(x)}$ .

(2008 november 18)

8. Számítsuk ki:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ .

(2008 november 18)

9. Számítsuk ki a következő határértékeket.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg}^{1/\ln(x)}(x) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^4 - 2n^2} - \sqrt{n^4 + 3} \right) \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^{2n-1}$$

(2006 Január 4)

10. Számítsuk ki:

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - 1}}{x^2}$

(2008 December 19)

11. Számítsuk ki:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{4}{1-x}}$

(2008 December 19)

12. Igazoljuk, hogy monoton növekvő függvények összege monoton növekvő.  
(2008 December 19)

13. Legyen  $f(x) = 1 + \arcsin\sqrt{2-x}$ . Adjuk meg  $f$  értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzfüggvényének képletét!  
(2008 December 19)

14. Legyen  $f(x) = e^{\ln(\pi)} + \arccos\left(\frac{2-x}{3}\right)$ . Állapítsuk meg  $f$  értelmezési tartományát és értékkészletét.  
Mennyi  $f\left(\frac{7}{2}\right)$ ?  
(2008 December 4)

15. Számítsuk ki:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2(3x)} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .  
(2008 December 4)

16. Számítsuk ki:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ .  
(2008 December 4)

17. Igazoljuk, hogy páratlan függvények szorzata páros.  
(2008 December 4)

18. Számítsuk ki:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$ .  
(2008 november 18)

19. Számítsuk ki:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}$ .  
(2008 november 18)

20. Számítsuk ki a következő határértékeket.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos^2(x)}{4x^2} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0+0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$$

(2005 December 9)

21. Adjuk meg az  $f(x) = \sin(\sqrt{1+x^2})$  függvény második deriváltfüggvényét.

(2008 December 19)

22. Adjuk meg az  $f(x) = \frac{\sin(2x) + x^3 e^{x-\pi}}{\cos(3\pi - x)}$  függvény érintőjének egyenletét a  $\langle \pi, \pi^3 \rangle$  pontban.

(2008 December 4)

23. Adjuk meg az  $f$  függvény deriváltját:  $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x)\ln(2x) + \arctg(x^2 + 3)}$ .

(2008 November 18)

24. Adjuk meg az  $f$  függvény deriváltját:  $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x^2 + 1}) + x \ln(\ln(x))$ .

(2008 November 18)

25. Határozzuk meg  $f$  deriváltfüggvényét:  $f(x) = \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{\sqrt{4 + \sin^3(x)}}$ .

(2006 Január 4)

26. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg  $f'$ -t.

(b)  $\alpha$  mely értékeire lesz  $f'$  folytonos?

(2005 December 9)

27. Legyen  $f(x) = e^{-x}$ .

(a) adjuk meg  $f$ -nek azt az érintőjét, mely átmegy a  $[3, f(3)]$  ponton.

(b)  $x$  mely értékére lesz az  $xf(x)$  szorzat maximális?

(2005 December 9)

28. Határozzuk meg az alábbi  $y$  függvény deriváltját.

$$y = \frac{x^2 \sin(x) - \operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\ln(1+x^2)}.$$

(2005 December 9)

29. Igazoljuk, hogy minden valós  $x, y$  számra  $ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$ .

(2008 október 14)

30. Igazoljuk, hogy páratlan függvények szorzata páros.

(2008 december 4)

31. Igazoljuk, hogy monoton növekvő függvények összege monoton növekvő.

(2008 december 19)

32. Legyen  $f(x) = \ln(1+x^2)$ . Határozzuk meg  $f$  értelmezési tartományát, vizsgáljuk meg, hogy  $f$  páros/páratlan-e, határozzuk meg  $f$  határértékeit és aszimptotáit a megfelelő helyeken, határozzuk meg  $f$  szélsőérték-helyeit, inflexiós pontjait, és azokat a tartományokat ahol  $f$  monoton növekvő/csökkenő, illetve ahol  $f$  konvex/konkáv. Ezek alapján vázoljuk fel  $f$  grafikonját.

(2005 November 18)

33. Legyen  $f(x) = e^{-x^2}$ . Határozzuk meg  $f$  értelmezési tartományát, vizsgáljuk meg, hogy  $f$  páros/páratlan-e, határozzuk meg  $f$  határértékeit és aszimptotáit a megfelelő helyeken, határozzuk meg  $f$  szélsőérték-helyeit, inflexiós pontjait, és azokat a tartományokat ahol  $f$  monoton növekvő/csökkenő, illetve ahol  $f$  konvex/konkáv. Ezek alapján vázoljuk fel  $f$  grafikonját.

(2006 Január 4)

34. Legyen  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ . Határozzuk meg  $f$  értelmezési tartományát, vizsgáljuk meg, hogy  $f$  páros/páratlan-e, határozzuk meg  $f$  határértékeit és aszimptotáit a megfelelő helyeken, határozzuk meg  $f$  szélsőérték-helyeit, inflexiós pontjait, és azokat a tartományokat ahol  $f$  monoton növekvő/csökkenő, illetve ahol  $f$  konvex/konkáv. Ezek alapján vázoljuk fel  $f$  grafikonját.

(2008 október 14)

35. Legyen  $f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$ . Határozzuk meg  $f$  értelmezési tartományát, határozzuk meg  $f$  határértékeit és aszimptotáit a megfelelő helyeken, határozzuk meg  $f$  szélsőérték-helyeit, inflexiós pontjait, és azokat a tartományokat ahol  $f$  monoton növekvő/csökkenő, illetve ahol  $f$  konvex/konkáv. Ezek alapján vázoljuk fel  $f$  grafikonját.

(2008 december 4)

36. Legyen  $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ . Határozzuk meg  $f$  értelmezési tartományát, vizsgáljuk meg, hogy  $f$  páros/páratlan-e, határozzuk meg  $f$  határértékeit és aszimptotáit a megfelelő helyeken, határozzuk meg  $f$  szélsőérték-helyeit, inflexiós pontjait, és azokat a tartományokat ahol  $f$  monoton növekvő/csökkenő, illetve ahol  $f$  konvex/konkáv. Ezek alapján vázoljuk fel  $f$  grafikonját.

(2008 december 19)