Régebbi Matek B1 és A1 zh-k

Teljes Indukcióval, Halmazokkal Vektoralgebrával, Térgeometriával, Komplex számokkal, és sorozatokkal kapcsolatos feladatai.

1. Legyen $a_0 = 0$ és legyen $a_{n+1} = 2a_n^2 + 1$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat monoton növő.

(2005 November 4)

2. Legyen $a_0 = 0$ és legyen $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat monoton növő.

(2005 November 4)

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $\overline{(A \setminus B)} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C)$.

(2005 November 4)

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $\overline{(B \setminus C)} \cap A = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

(2005 November 4)

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq ((A \setminus C) \cup B) \setminus C.$$

(2006 Január 4)

6. Igaz-e bármely A,B,C halmazokra: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$? Ha nem, milyen kapcsolatnak kell fennállnia ezek között a halmazok között, hogy az egyenlőség teljesüljön ?

(2008 Október 17)

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges A,B halmazra $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$.

(2008 December 19)

8. Bizonyítsuk be, hogy $A \setminus B = \overline{(B \setminus A)}$ akkor és csak akkor, ha $A = \overline{B}$ tel-

jesül.

(2008 December 4)

9. Legyen $O = (0, 0, 0)$ és $A = (2, 2, 1)$. Adjuk meg az összes olyan B pont koordinátáit, mely rajta van az $e : x - 2 = -1 - y,\ z = 1$ egyenesen és az OA, OB szakaszok 45 fokos szöget zárnak be.

(2005 November 4)

10. Legyenek $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 12)$.
(a) Határozzuk meg a D pont koordinátáit, ha a BD szakasz párhuzamos az $(1, 3, 10)$ vektorral és AD merőleges $(1, 2, -1)$-re.
(b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát. (Egy tetraéder térfogata egyenlő egy tetszőleges csúcsából induló oldalvektoraiból képzett vegyesszorzat abszolútértékének hatodával).

(2005 November 4)

11. Legyen $O = (0, 0, 0)$ és $A = (2, 2, 1)$. Adjuk meg az összes olyan B pont koordinátáit, mely rajta van az $e : x + 1 = 2 - y,\ z = 1$ egyenesen és az OA, OB szakaszok 45 fokos szöget zárnak be.

(2005 November 4)

12. Legyenek $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 5)$.
(a) Határozzuk meg a D pont koordinátáit, ha a BD szakasz párhuzamos az $(1, 3, -6)$ vektorral és AD merőleges $(1, 2, 1)$-re.
(b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát. (Egy tetraéder térfogata egyenlő egy tetszőleges csúcsából induló oldalvektoraiból képzett vegyesszorzat abszolútértékének hatodával).

(2005 November 4)

13. Legyen $A = [1, -1, 2]$, $B = [1, 1, 1]$ $v = [2, 2, 1]$.

(a) Adjuk meg annak az f egyenesnek az egyenletét, mely átmegy A-n, merőleges v-re és metszi az $x - 1 = y - 5 = \dfrac{z - 2}{2}$ egyenletű e egyenest.

(b) Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza A-t, B-t és az e és f egyenesek metszéspontját.

(2006 Január 4)

14. Jelölje P' a $P = (-1, 2, -1)$ pontnak az $A = (1, -2, 3)$ és $B = (1, 1, 0)$ pontokon átmenő egyenesre vonatkozó tükörképét. Adjuk meg P' koordinátáit, és határozzuk meg a $P'PB$ háromszög területét.

(2008 Október 17)

15. Legyen $\underline{a} = (2, -3, 6)$, $\underline{b} = (0, 2, 1)$ és $\underline{c} = (-30, -4, 8)$. Állapítsuk meg, hogy az $\{\underline{a} \times \underline{b},\ \underline{c}\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő-e. Indokoljunk.

(2008 Október 17)

16. Legyen $A = (1, 3, 0)$ és legyen az e egyenes egyenletrendszere $\frac{x-4}{2} = z+1,\ y = 3$.

(a) Adjuk meg az A ponton átmenő, e-re merőleges sík egyenletét.

(b) Adjuk meg az e egyenes és az S sík B metszéspontját.

(c) Határozzuk meg annak a paralellogrammának a területét, melynek két szomszédos oldala az OA és OB szakasz (O az origó).

(2008 December 19)

17. Legyen $\underline{a} = (4, 1, -3)$.

(a) Határozzuk meg a $\underline{b}$ vektort, ha tudjuk, hogy $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ lineárisan függő, és $|\underline{b}| = 13\sqrt{2}$.

(b) Határozzuk meg az u paraméter értékét, ha tudjuk, hogy $\underline{a}$ és $\underline{c} = [0, u, -1]$ merőlegesek egymásra.

(2008 December 19)

18. Legyen $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 0, 3)$, $C = (4, 2, 2)$.

(a) Adjuk meg az A, B, C pontokon átmenő S sík egyenletét.

(b) Határozzuk meg azt a pontot az S síkon, mely a legközelebb van az origóhoz.

(2008 December 4)

19. Legyen $\underline{a} = (3, 1, 3)$, $\underline{b} = (0, 2, 1)$ és $\underline{c} = (3, u, 2)$.

(a) Állapítsuk meg az u paraméter értékét, ha tudjuk, hogy $\underline{c}$ merőleges $\underline{b}$-re.

(b) Állapítsuk meg, hogy az $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő-e az (a) részben meghatározott u értékre.

(2008 December 4)

20. Adjuk meg trigonometrikus alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását.

$$z^3 + 8 = \frac{-16 + 8i}{1 + 2i}.$$

(2005 November 4)

21. Adjuk meg trigonometrikus alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását.

$$z^3 + 27 = \frac{27 + 27i}{1 - i}.$$

(2005 November 4)

22. (a) Adjuk meg algebrai alakban: $\left(\frac{4 + 2i}{3 - i}\right)^9$.

(b) adjuk meg a következő p polinom összes komplex gyökét. (Útmutatás: először a racionális gyököket keressük meg.) $p(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x + 12$.

(2006 Január 4)

23. Adjuk meg az összes komplex megoldást trigonometrikus alakban:

(a) $z^3 + 3i = \dfrac{4 + 2i}{1 - i}$.

(b) $z^3 = 4\overline{z}$.

(2008 Október 17)

24. Adjuk meg a következő kifejezések értékeit algebrai alakban:

(a) $(1 - i) + \frac{1+i}{3-4i}$

(b) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^4}{i^{19}}$

(c) $\sqrt[4]{-16}$

(2008 December 19)

25. Adjuk meg az összes komplex megoldást algebrai alakban:

$$z^3(i - 1) = 27 + 27i.$$

(2008 December 4)