Mat. A1 Villámkérdések megoldásokkal[1], 2008 Dec. 19

1. Lineárisan független-e az $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ vektorrendszer, ahol $\underline{a} = [1, 2, 3]$ és $\underline{b} = [1, 2, 4]$? Indokoljunk. *1; (Szept. 11)*

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontosan akkor lin. függő, ha számszorosai egymásnak, azaz van olyan $\lambda \in \mathbf{R}$, hogy $\underline{a} = \lambda \cdot \underline{b}$. Esetünkben (az első koordináták egyenlősége miatt) csak $\lambda = 1$ jön szóba; ez azonban nem jó, mert a 3. koordináták eltérnek. Így $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ lin. független.

2. Adjuk meg az $x = 3$, $\frac{2y-1}{4} = \frac{1-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes paraméteres egyenletrendszerét. *3; (Szept. 18)*

e irányvektora: $[0, 2, -3]$, tehát az egyenletrendszer: $x = 0,\ y = \frac{1}{2} + 2t,\ z = -1 + 3t$.

3. Legyen $z = 5 - 10i$. Határozzuk meg $\sqrt[3]{z^2}$ abszolútértékét. *4; (Szept. 23-25)/Th: 4. függelék*

$|z^2| = |z|^2 = 5^2 + 10^2 = 125$, tehát $|\sqrt[3]{z^2}| = \sqrt[3]{|z|^2} = \sqrt[3]{125} = 5$.

4. Van-e olyan sorozat, mely monoton növő, felülről korlátos, és van két különböző torlódáspontja? Indokoljunk. *5,7; (Okt. 2, Okt. 7.)*

Nincs, mert monoton növő, felülről korlátos sorozat konvergens, és konvergens sorozatnak pontosan 1 torlódáspontja van.

5. Páros-e az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény? *9; (Nov. 13,18)/Th: 1.4 fejezet (39. oldal)*

Tetsz. valós x-re $f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$, tehát f páros.

6. Adjuk meg az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény deriváltfüggvényének definícióját. *12; (Okt. 30)/Th: 3.1 fejezet*

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ha a jobboldali határérték létezik.

7. Adjuk meg az $f(x) = tg(x)$ függvény összes primitív függvényét. *21; (Nov. 27)/Th: 8.1 fejezet*

$\int tg(x)dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx = -ln(cos(x)) + C$, mert az utolsó törtben a számláló épp a nevező deriváltja.

8. Bontsuk elemi törtekre: $\dfrac{x+2}{x^2+x}$. *23; (Dec. 2)/Th: 8.3 fejezet*

$\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+2)} = \frac{x(A+B)+A}{x(x+1)}$,

innen $A + B = 1,\ A = 2$, azaz $B = 1 - A = -1$, tehát $\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1}$.

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)/Th: U* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás (illetve a Thomas-könyv U. fejezete) alapján kell(ene) tudni a választ...