

Mat. A1 Villámkérdések megoldásokkal¹, 2009 Jan. 6

1. Számítsuk ki az $\underline{a} = [1, 2, -4]$ és $\underline{b} = [0, 3, 1]$? vektorok vektoriális szorzatát. 2; (Szept. 18.)

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = [14, -1, 3].$$

2. Párhuzamos-e az $\underline{a} = [1, -1, 3]$ vektor az $x + 3y = 7$ egyenletű síkkal? Indokoljunk. 3; (Szept. 18)

A sík normálvektora $\underline{n} = [1, 3, 0]$ és $\underline{a} \cdot \underline{n} = -2 \neq 0$, így \underline{n} nem merőleges \underline{a} -ra, tehát \underline{a} nem párhuzamos a megadott síkkal.

3. Adjuk meg algebrai alakban: $\frac{1+i}{1-i}$. 4; (Szept. 23)/Th: 4. függelék.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

4. Számítsuk ki: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$. 8; (Okt. 7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = (e^{-1})^2 = e^{-2}.$$

5. Konvex-e az egész számegegyenesen az $f(x) = sh(x)$ függvény 2009. deriváltja? Indokoljunk. 16; (Nov. 6)/Th: 4.4 fejezet.

Igen, mert tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ -re $(f^{(2009)})'' = f^{(2011)}(x) = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$.

6. Adjuk meg az $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$ függvény $+\infty$ -beli aszimptotáját, ha van. 9; (Nov. 13)/Th: 2.4 fejezet.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2, \text{ és}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x+\frac{1}{x}} = 0, \text{ tehát az aszimptota: } y = mx + b \text{ azaz } y = 2x.$$

7. Írjuk le a parciális integrálás szabályát. 22; (Nov. 27)/Th: 8.2 fejezet.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

8. Adjuk meg az $f(x) = \sin^2(x)$ függvény összes primitív függvényét. 24; (Dec. 4)/Th: 8.4 fejezet.

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + C.$$

¹A kérdések után X; (Y,Z)/Th: U azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás (illetve a Thomas-könyv U. fejezete) alapján kell(ene) tudni a választ...