

Villámkérdések,
BME, Mat. A2, 2012 ősz, 2. Minta megoldásokkal¹.

Név: _____
Neptun-kód: _____

1. Legyen V a legfeljebb 3. fokú, valós polinomok vektortere (a szokásos műveletekkel) és legyen $V_0 = \{p \in V : p(2) = 0\}$. Igazoljuk, hogy V_0 altere V -nek. *1, Szept. 19.*

Ha $p, q \in V_0$ és $c \in \mathbf{R}$, akkor $(p + q)(2) = p(2) + q(2) = 0$ és $(c \cdot p)(2) = c \cdot p(2) = 0$ miatt V_0 -beli polinomok összegei és számszorosai is V_0 -beliek, ezért V_0 altere V -nek.

2. Lehet-e egy invertálható 3×3 -as mátrix rangja 2? *3-4, Okt. 10.*

Nem, mert ha a rang 2, akkor a determináns nulla, ezért a mátrix nem invertálható.

3. Legyen $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ a zx síkra vonatkozó merőleges vetítés. Írjuk le φ mátrixát a szokásos bázisban. *2, Okt. 1.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Legyen $f(x, y) = x + y^2$ és legyen $\underline{v} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Adjuk meg f iránymenti deriváltját \underline{v} irányban a $[2, 3]$ pontban. *7, Okt. 24.*

$$\partial_{\underline{v}} f(2, 3) = \text{grad}(f)(2, 3) \cdot \underline{v} = [1, 2y]_{|(2,3)} \cdot \underline{v} = [1, 6] \cdot \underline{v} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

5. Írjuk le a többváltozós valós függvények lokális szélsőértékeire vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt. *8, Nov. 7.*

Ha a deriválható $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ függvénynek $P \in \mathbf{R}^n$ -ben lokális szélsőértéke van, akkor $\text{grad}(f)(P) = 0$.

6. Írjuk fel a derékszögű koordinátákat gömbi koordinátákkal. *12, Nov. 21.*

$$x = R \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = R \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = R \cos(\theta).$$

7. Konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sor? Indokoljunk. *14, Nov. 28.*

Igen, mivel a sor Leibniz-típusú, és $\frac{1}{\ln(n)}$ monoton csökkenve 0-hoz tart.

8. Van-e olyan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor, melynek összegfüggvénye konvergens 2-ben, de divergens -1 -ben? Indokoljunk. *15, Dec. 5.*

Nincs, mivel a hatványsor konvergencia-középpontja $x_0 = 0$, és az első feltétel miatt a konvergenciasugár legalább 2.

¹A kérdések után X (Y , Z .) azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X . pontja ismeretében (az Y . hónap Z . napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...