

Régebbi Matek B2, B3 és A3 zh-k

Térgörbékkel, felületekkel, Integrálredukcióval,
komplex függvények alaptulajdonságaival, értelmezésével és deriválhatóságával
kapcsolatos feladatai.

Görbék, Felületek

1. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben az $r(t) = [t, t^2, t^4]$ görbe simulósíkjá merőleges a $[0, 1, 6]$ vektorra. Az ilyen pont(ok)ban írjuk fel a görbe érintőegyenésének egyenletét is.

(2007 május 18)

2. Legyen $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^3$, $r(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}t^2}{2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$. Számítsuk ki r ívhosszát a $t_0 = 0$ és $t_1 = 1$ paraméterek között.

(2007 május 11)

3. Legyen $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ a következő térgörbe: $r(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{t^9}}{9}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Térjünk át ívhossz-paraméterre (a $t_0 = 0$ pontból kiindulva).

(2007 május 24)

4. Legyen $r : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ a következő felület: $r(x, y) = [2xy, 3y, x]$. Határozzuk meg az összes olyan pontot, melyben r érintősíkjá merőleges a $v = [6, -8, 12]$ vektorra.

(2007 május 30)

5. Legyen $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Számítsuk ki a $z = 4 + y - x^2$ felület A feletti darabjának felszínét. (A nem-algebrai függvények helyettesítési értékeit nem szükséges kiszámolni.)

(2007 május 18)

6. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben a $z = 3x^2 - xy$ felület érintősíkjá merőleges a $[0, 4, 2]$ vektorra.

(2007 május 11)

7. Legyen $r(t) = [t^2, t^2 + t, t]$. Mely pont(ok)ban lesz az r görbe görbülete $\sqrt{\frac{3}{2}}$?
(2007 április 27)

8. Határozzuk meg a $P \in \mathbf{R}^3$ pont hiányzó koordinátáit, ha tudjuk, hogy a második koordinátája 6, és P -ben az $r(u, v) = [2uv, u, v^2]$ felület érintősíkja párhuzamos az $[1, 0, -2]$ vektorral.
(2007 április 27)

9. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben az

$$r(t) = \frac{2t^3}{3}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$$

görbe érintőegyenese párhuzamos a $2x - z = 0$ síkkal. Az ilyen pont(ok)ban írjuk fel a görbe érintőegyenésének egyenletét is.
(2008 október 20)

10. Adjuk meg az $\frac{1}{xyz} = 1$ egyenletű felület érintősíkját a $p = [2, 3, 1/6]$ pontban.
(2008 november 25)

11. Határozzuk meg az $x^2y + y^2z = 0$ egyenletű felület érintősíkjának egyenletét a $[2, 1, 4]$ pontban.
(2008 december 19)

12. Legyen $r(t) = [1, t^2/2, t^3/3]$. Határozzuk meg a t_0 paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az r görbe $t = 0$ és $t = t_0$ paraméter-értékek közti részének ívhossza 10.
(2008 december 4)

13. Határozzuk meg a P pont első két koordinátáját, ha tudjuk, hogy P harmadik koordinátája 3, P benne van az $x - y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felületben és e felület P -beli érintősíkja párhuzamos a $[0, 1, 1]$ vektorral.

(2008 december 4)

14. Legyen $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $r(t) = [\sin(t), \cos(t), \sqrt{t^3}]$. Térjünk át ívhossz-paraméterre ($t_0 = 0$ -ból kiindulva).

(2009 május 19)

15. Legyen $r(t) = [t^2, 3t, 4t]$.

(a) Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben r érintővektora párhuzamos az $x - 2y + 3z = 7$ egyenletű síkkal.

(b) Adjuk meg t binormális egységvektorát a $(9, 9, 12)$ pontban.

(2009 május 19)

16. Legyen $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $r(t) = [2t^3, 6t^2, 3t^2]$. Adjuk meg r ívhosszát az $a = 0$ és $b = 2$ paraméterű pontok között.

(2009 május 4)

17. Legyen $r(x, y) = [x^2y, xy, x + y]$ és legyen $P = (-9, -3, 2)$.

(a) Mutassuk meg, hogy P benne van az r által paraméterezett felületben.

(b) Adjuk meg r érintősíkjának egyenletét P -ben.

(2009 május 4)

Görbementi, felületmenti integrálok

22. Legyen $f(x, y, z) = [xz^2, e^{xz}, \sin(xy)]$. Számítsuk ki f felületi integrálját a

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

feltételek által meghatározott, kifelé irányított, zárt felületen.

(2007 január 5)

23. Számítsuk ki $f(x, y) = [y, x^3]$ görbementi integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalon, pozitív forgásirány mellett.

(2006 december 13)

24. Legyen $f(x, y, z) = [x \cdot \cos^2(y), y + e^x, z \cdot \sin^2(y)]$. Határozzuk meg f felületi integrálját azon a kifelé irányított, korlátos, zárt felületen, melyet a

$$z = e, \quad z = e^2, \quad x^2 + y^2 = \ln(z)$$

egyenletű felületek határolnak.

(2006 október 25)

25. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $v(x, y, z) = [xze^z, x, y^2]$ és legyen K az a kocka, melynek egyik csúcsa a $(0, 0, 0)$ pont, az ebből induló élek másik végei rendre $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ és $(0, 0, 2)$. Számítsuk ki v felületi integrálját K (kifele irányított) felületén.

(2007 december 11)

26. Legyen \mathcal{F} az a kifelé irányított zárt felület, melyet a $z = 0$, $z = 2$, $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v(x, y, z) = [y^2z, \sin(x), ze^{x^2+y^2}].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját \mathcal{F} -en.

(2007 április 27)

27. Legyen \mathcal{F} az a kifelé irányított zárt felület, melyet a $z = 1$, $z = 4$, $z^2 = x^2 + y^2$ egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v(x, y, z) = [ye^z, ze^x, \frac{z \cdot \sin^2(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját \mathcal{F} -en.

(2008 november 25)

28. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $v(x, y, z) = [-2xz, xz, 3y]$.

(a) Határozzuk meg a $\text{rot}(v)$ függvényt.

(b) Határozzuk meg a p pont első koordinátáját, ha tudjuk, hogy $\text{rot}(v)(p)$ merőleges az $[1, 1, 0]$ vektorra.

(2008 november 25)

29. Legyen $v(x, y, z) = [\sqrt{1-x^2}, y^2, xy]$. Számítsuk ki v görbementi integrálját az $r(t) = [\sin(t), \cos(t), 1]$, $0 \leq t \leq \pi$ görbén.

(2008 december 19)

30. Legyen \mathcal{F} az kifelé irányított zárt felület, melyet a

$$z = 1, \quad z = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

egyenletű felületek határolnak. Legyen $v(x, y, z) = [y^2z, xz^2, z \cdot \ln(\sqrt{x^2 + y^2})]$. Számítsuk ki v felületi integrálját \mathcal{F} -en.

(2008 december 19)

31. Legyen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ismeretlen függvény, és legyen $v(x, y, z) = [ze^{2y}, xz^2, f(y, z)]$.

(a) Határozzuk meg f -t, ha $\text{rot}(v)$ első koordinátája $e^{\sin(y)} \cos(y) - 2xz$.

(b) Határozzuk meg $\text{rot}(v)$ -t.

(2008 december 4)

32. Legyen \mathcal{F} az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, pozitív irányítású görbe és legyen $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $v(x, y) = [yx^2, y^2]$. Számítsuk ki v görbementi integrálját \mathcal{F} -en.

(2008 december 4)

33. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $v(x, y, z) = [x^2z, e^yz, z^2x]$. Számítsuk ki a $\text{div}(\text{rot}(v))$ függvényt.

(2008 december 4)

34. Legyen \mathcal{F} az a kifelé irányított, korlátos zárt felület, melyet a

$$z = 1, \quad z = 4, \quad z^2 = 4x^2 + 4y^2$$

egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad v(x, y, z) = [e^y, \sqrt{x}, xy^2z].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját \mathcal{F} -en.

(2009 május 19)

35. Legyen \mathcal{F} az a kifelé irányított, korlátos zárt felület, melyet a

$$z = 0, \quad z = 4, \quad z^2 = x^2 + y^2$$

egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad v(x, y, z) = [xy^2, y^3, zy^2].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját \mathcal{F} -en.

(2009 május 4)

Komplex Függvények

36. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$e^{2iz} - 6e^{iz} = -18. \quad (2006 október 25)$$

37. Legyen $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

(a) Adjuk meg azt a reguláris komplex f függvényt, melyre

$$f = u + i \cdot v \quad \text{és} \quad f(i) = 1.$$

(b) Adjuk meg f' -t is.

(2006 október 25)

38. (a) Igazoljuk, hogy az $f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$ komplex függvény

értelmezési tartományának minden pontjában deriválható.

(b) Adjuk meg azt az $f = u + iv$ reguláris komplex függvényt, melyre $u(x, y) = 2x$

$$\text{és } f(2) = 4 + i. \quad (2006 december 13)$$

39. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z számot, melyre teljesül, hogy

$$e^{2z} - 2e^z + 2 = 0.$$

(2009 március 24)

40. Legyen $v(x, y) = 2xy - 3y$.

(a) Adjuk meg azt a reguláris komplex f függvényt, melyre

$$f = u + i \cdot v \text{ és } f(2i) = -4 - 6i.$$

(b) Adjuk meg f' -t is.

(2009 március 24)

41. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$\cos(z) + i\sin(z) = -1 + i.$$

(2008 október 20)

42. Legyen $v(x, y) = 3x^2y - y^3$.

(a) Adjuk meg azt a reguláris komplex f függvényt, melyre

$$f = u + i \cdot v \text{ és } f(1) = 2.$$

(b) Adjuk meg f' -t is.

(2008 október 20)

43. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$e^{2z} - 2e^z + 2 = 0.$$

(2008 december 19)

44. Az $f = u + iv$ reguláris függvényről tudjuk, hogy $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x$ és $f(0) = i$.

(a) Határozzuk meg f -t.

(b) Határozzuk meg f' -t.

(2008 december 19)

45. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$z^i = \frac{(1+i)e^\pi}{\sqrt{2}}.$$

(2008 december 4)

46. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$\operatorname{ch}(z) = 0.$$

(2009 május 19)

47. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$(1 + i)e^z = 2.$$

(2009 május 4)

48. Határozzuk meg azt az $f = u + i \cdot v$ reguláris komplex függvényt, melyre $v(x, y) = 2xy - 5y$ és $f(1 + 2i) = 3 - 6i$.

(2009 május 4)