B1 ZH

Közlek Kar.

2005 November 4.

BME Közlek. Kar, Matematika B1 ZH
2005 November 4, A csoport.

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $\overline{(A \setminus B)} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C)$.
(8 pont)

2. Legyen $O = (0, 0, 0)$ és $A = (2, 2, 1)$. Adjuk meg az összes olyan B pont koordinátáit, mely rajta van az $e : x - 2 = -1 - y, \ z = 1$ egyenesen és az OA, OB szakaszok 45 fokos szöget zárnak be.
(8 pont)

3. Legyenek $A = (2, -1, 3), \quad B = (1, 0, 1), \quad C = (1, 1, 12)$.
(a) Határozzuk meg a D pont koordinátáit, ha a BD szakasz párhuzamos az $(1, 3, 10)$ vektorral és AD merőleges $(1, 2, -1)$-re.
(b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát. (Egy tetraéder térfogata egyenlő egy tetszőleges csúcsából induló oldalvektoraiból képzett vegyesszorzat abszolútértékének hatodával).
(8 + 3 pont)

4. Adjuk meg trigonometrikus alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását.

$$z^3 + 8 = \frac{-16 + 8i}{1 + 2i}.$$

(7 pont)

5. Számítsuk ki a következő mennyiségeket, ha léteznek.

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n} - \sqrt{n^4 + n^2}}{\sqrt{n^6 + 3n^3} - \sqrt{n^6 + 1}}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + 2^n}(\frac{n-2}{n+1})^{2n+1}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2n+1}$

(6 + 6 + 4 pont)

6. Legyen $a_0 = 0$ és legyen $a_{n+1} = 2a_n^2 + 1$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat monoton növő.
(10 pont)

BME Közlek. Kar, Matematika B1 ZH
2005 November 4, B csoport.

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $\overline{(B \setminus C)} \cap A = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
(8 pont)

2. Legyen $O = (0,0,0)$ és $A = (2,2,1)$. Adjuk meg az összes olyan B pont koordinátáit, mely rajta van az $e : x + 1 = 2 - y,\ \ z = 1$ egyenesen és az OA, OB szakaszok 45 fokos szöget zárnak be.
(8 pont)

3. Legyenek $A = (2, -1, 3), \quad B = (1, 0, 1), \quad C = (1, 1, 5)$.
(a) Határozzuk meg a D pont koordinátáit, ha a BD szakasz párhuzamos az $(1, 3, -6)$ vektorral és AD merőleges $(1, 2, 1)$-re.
(b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát. (Egy tetraéder térfogata egyenlő egy tetszőleges csúcsából induló oldalvektoraiból képzett vegyesszorzat abszolútértékének hatodával).
(8 + 3 pont)

4. Adjuk meg trigonometrikus alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását.

$$z^3 + 27 = \frac{27 + 27i}{1 - i}.$$

(7 pont)

5. Számítsuk ki a következő mennyiségeket, ha léteznek.

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^4 + 3n} - \sqrt{2n^4 + 3n^2}}{\sqrt{n^6 - n^3} - \sqrt{n^6 + 1}}$ (b) $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{n^4}{2^n})(\frac{n-1}{n+3})^{3n-2}$ (c) $\sum_{n=3}^{\infty} (\frac{1}{3})^{3n+1}$

(6 + 6 + 4 pont)

6. Legyen $a_0 = 0$ és legyen $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat monoton növő.
(10 pont)