B3 Villámkérdések megoldásokkal[1], 2008 Dec. 19

1. Írjuk le a Stokes-tétel állítását. *3; (Szept. 16)*

Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ és φ pozitív irányítású zárt térgörbe, akkor $\int_\varphi v = \int_{\varphi\ belseje} rot(v)$, feltéve, hogy mindkét integrál létezik.

2. Adjuk meg az $f_n(x) = \frac{n+x}{3+nx^2}$ függvénysorozat f határfüggvényét. *6; (Szept. 30)*

$f(x) = lim_{n\to\infty} \frac{n+x}{3+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{x}{n}}{\frac{3}{n}+x^2} = \frac{1}{x^2}$.

3. Legyenek f és g azok a 2π szerint periodikus valós függvények, melyekre teljesül, hogy $\forall x \in [-\pi, \pi)$ $f(x) = x$, $g(x) = 1$. Ortogonális-e f g-re? *8; (Okt. 7)*

f és g skaláris szorzata: $\int_{-\pi}^{\pi} x dx = [\frac{x^2}{2}]_{-\pi}^{\pi} = 0$, tehát f ortogonális g-re.

4. Adjuk meg algebrai alakban: $(-1)^i$. *9; (Okt. 14)*

$(-1)^i = e^{i\cdot ln(-1)} = e^{iln(e^{i\cdot\pi})} = e^{i\cdot(i\pi)} = e^{-\pi}$.

5. Adjuk meg $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ origóban vett reziduumát. *13; (Okt. 28)*

f reguláris az origóban, ezért Laurent-sora azonos Taylor-sorával, s így reziduuma 0.

6. Legyen $f(t) = te^t$. Számítsuk ki $\mathcal{L}(f)$-t, ha $\mathcal{L}(e^t; p) = \frac{1}{p-1}$. *14; (Nov. 4)*

$\mathcal{L}(te^t) = -\partial_p \mathcal{L}(e^t) = -\partial_p \frac{1}{p-1} = \frac{1}{(p-1)^2}$.

7. Írjuk le a Lipschitz-feltételt. *15; (Nov. 11)*

Az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény a $D \subseteq \mathbf{R}^n$ halmazon eleget tesz az i. Lipschitz-feltételnek, ha van olyan C szám, hogy ha $p, q \in D$ csak az i. koordinátáikban térnek el, akkor $|f(p) - f(q)| \leq C|p - q|$.

8. Adjunk meg egy másodrendű, homogén lineáris diff.egyenletet, melynek az e^{2x} és xe^{2x} megoldásai. *18; (Nov. 25)*

A $p(\lambda)$ másodfokú karakterisztikus polinomnak $\lambda = 2$ kétszeres gyöke, így $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, amiből az egyenlet: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...