

1. a) Legyen A egy halmaz, f pedig egy A -n értelmezett függvény. Igazoljuk, hogy az

$$R = \{\langle a, b \rangle \in A^2 : f(a) = f(b)\}$$

reláció egy ekvivalenciareláció A -n.

- b) Igazoljuk, hogy ha R egy ekvivalenciareláció az A halmazon, akkor van olyan A -n értelmezett f függvény, melyre $R = \{\langle a, b \rangle \in A^2 : f(a) = f(b)\}$.
2. a) Igazoljuk, hogy ha $R, S \subseteq A^2$ ekvivalenciarelációk, akkor $R \cap S$ is ekvivalenciareláció.
- b) Adjunk példát olyan A halmazra és $R, S \subseteq A^2$ ekvivalenciarelációkra, melyekre $R \cup S$ nem ekvivalenciareláció.
3. Hol a hiba a következő érvelésben? Ha R egy szimmetrikus és tranzitív reláció A -n, akkor R reflexív is, hiszen ha valamilyen $a, b \in A$ elemekre $R(a, b)$, akkor a szimmetria miatt $R(b, a)$ is teljesül, ezekből a tranzitivitás miatt $R(a, a)$ következik, tehát R reflexív.

-
4. Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz minden részhalmaza jólrendezett!
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz véges sok jólrendezett részhalmazának az uniója, akkor maga is jólrendezett!
6. Lássuk be, hogy $\mathbb{Z}$ nem jólrendezett a szokásos rendezésével, és adjunk meg rajta egy másik rendezést, ami jólrendezés!

-
7. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!

8. Mutassuk meg, hogy $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

A jelölések: $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ és $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$.

9. Hány olyan n -hosszú sorozat képezhető az 1, 2, 3, 4 számokból, melyek 1-gyel kezdődnek, és minden szám pontosan 1-gyel különbözik az előzőtől?
10. Mennyi az alábbi sokemeletes kifejezés értéke, ha a képletben n darab törtvonal van?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1 + 1}}}}$$

11. Hány olyan n -hosszú sorozat van, aminek minden tagja 0 vagy 1 és nincs benne két szomszédos 0?

-
12. Igazoljuk, hogy a) $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$ és b) $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$. Itt $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli, azaz $[x]$ a legnagyobb olyan n egész, melyre $x \geq n$.