Modellelmélet Feladatok, 2.

6. Legyen λ végtelen számosság. Igazoljuk, hogy λ-n 2^{2^λ} különböző ultraszűrő van. (Útmutatás: függvények egy alkalmasan választott független halmaza segítségével adjunk meg egy $H = \{X_i \subseteq \lambda : i < 2^\lambda\}$ halmazrendszert úgy, hogy minden $S \subseteq H$-ra $S \cup \{\lambda \setminus X : X \in H \setminus S\}$ véges metszet tulajdonságú.)

7. Igazoljuk, hogy minden nem $\aleph_1$-teljes ultraszűrő $\aleph_0$-jó.

8. Legyen $\mathcal{F}$ egy κ-jó ultraszűrő I felett. Igazoljuk, hogy van olyan (végtelen alaphalmazú) $\mathcal{G}$ gráf, mely összefüggő, komplementuma is összefüggő, és $\mathcal{G}$ izomorf ${}^I\mathcal{G}/\mathcal{F}$-el.

9. Legyen $\mathcal{A}$ szaturált struktúra. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

   (a) $S_v^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ egyelemű.
   (b) $\mathcal{A}$ automorfizmus-csoportja tranzitív.

10. Legyen $\mathcal{A} = \langle \omega,\ suc;\ = \rangle$, ahol $suc : \omega \to \omega$ a rákövetkezési függvény: $suc(n) = n + 1$, minden $n \in \omega$-ra. Igazoljuk, hogy a szokásos összeadás $\mathcal{A}$-ban nem definiálható. (Útmutatás: vizsgáljuk $\mathcal{A}$ ultrahatványainak automorfizmusait.)

2010 november.