Modellelmélet Feladatok, 3.

11. Igazoljuk, hogy az alábbi ekvivalens az implicit definiálhatóság előadáson elhangzott változatával:

,,Legyen L elsőrendű nyelv, R egy L-ben nem szereplő relációszimbólum, legyen $L' = L \cup \{R\}$ és legyen T egy elmélet az L' nyelven. T implicit módon definiálja R-t L felett, ha tetszőleges $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$-re igaz, hogy ha f izomorfizmus $\mathcal{A}_{|L}$ és $\mathcal{B}_{|L}$ között, akkor f $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között is izomorfizmus."

12. Legyen $\mathcal{R}_\omega = \langle V, E \rangle$ a Rado-gráf (azaz a megszámlálhatóan végtelen véletlen gráf). Igazoljuk, hogy akárhogyis bontjuk fel V-t (azaz $\mathcal{R}$-csúcsait) a páronként diszjunkt $U_0, ..., U_{n-1} \subseteq V$ halmazok uniójára, mindig van olyan $i < n$, hogy $\mathcal{R}$-ben az U_i által feszített részgráf izomorf $\mathcal{R}$-el (n tetszőleges, véges szám).

13. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra van olyan véges $\mathcal{G}_n = \langle V_n, E_n \rangle$ véges gráf, mely ,,n-univerzális", azaz rendelkezik a következő tulajdonsággal. Ha $\mathcal{H}$ legfeljebb n-csúcsú gráf, H_0 tetszőleges részhalmaza $\mathcal{H}$ csúcsainak és $f : H_0 \to V_n$ egy beágyazás (azaz olyan injektív függvény, mely a H_0 által $\mathcal{H}$-ban feszített részgráf éleit $\mathcal{G}_n$ éleibe, a nem-éleket pedig $\mathcal{G}_n$ nem-éleibe viszi), akkor van olyan $g : H \to V_n$ beágyazás, mely kiterjeszti f-t.

14. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{A}$ $\aleph_0$-kategorikus struktúra, $\mathcal{B}$ pedig olyan megszámlálhatóan végtelen struktúra, melynek minden véges része beágyazható $\mathcal{A}$-ba, akkor $\mathcal{B}$ is beágyazható $\mathcal{A}$-ba. ($\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közös nyelvében nincsenek konstans- és függvényszimbólumok).

15. Igazoljuk, hogy két $\aleph_0$-kategorikus struktúra direktszorzata is $\aleph_0$-kategorikus.

2010 december.