Matematikai logika

13. előadás

2010. december 7.

13.1. Definíció:

Legyen T elmélet (formulahalmaz), legyen κ számosság. T κ-kategorikus, ha teljesül a következő: ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash \mathrm{T}$ és $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = \mathrm{K}$, akkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. (Azaz izomorfia erejéig T-nek 1 db κ számosságú modellje van.)

13.1. Tétel:

$\mathrm{T_R}$ $\aleph_0$-kategorikus.

Bizonyítás:

Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash \mathrm{T_R}$ és $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = \aleph_0$.

Ekkor $\mathcal{A} = \{\mathrm{a_n} \colon \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ és $\mathcal{B} = \{\mathrm{b_n} \colon \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$, mert $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ megszámlálható.

Minden n-re: megadunk egy $\mathrm{f_n}$ függvényt úgy, hogy:

(1) $\mathrm{n} < \mathrm{m} \Rightarrow \mathrm{f_n} \leq \mathrm{f_m}$
(2) $\mathrm{D(f_n)}$ véges
(3) $\{\mathrm{a_1} \dots \mathrm{a_{n-1}}\} \subseteq \mathrm{D(f_n)}$ és $\{\mathrm{b_1} \dots \mathrm{b_{n-1}}\} \subseteq \mathrm{R(f_n)}$
(4) $\mathrm{f_n}$ izomorfizmus $\mathrm{D(f_n)}$ és $\mathrm{R(f_n)}$ között.

(Jelölés: D: értelmezési tartomány, R: értékkészlet)

Legyen $\mathrm{f_0} = \emptyset$ és feltesszük, hogy $\mathrm{f_n}$ adott.

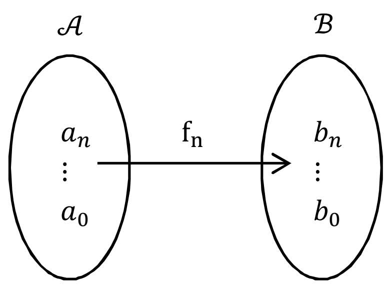
- Ha $\mathrm{a_n} \in \mathrm{D(f_n)}$, akkor:

  legyen $\mathrm{g} = \mathrm{f_n}$.

- Ha $\mathrm{a_n} \notin \mathrm{D(f_n)}$, akkor:

  legyen $\mathrm{X} = \{\mathrm{f_n(a)} \colon (\mathrm{a}, \mathrm{a_n}) \in \mathrm{E}(\mathcal{A}), \mathrm{a} \in \mathrm{D(f_n)}\}$ és $\mathrm{Y} = \{\mathrm{f_n(a)} \colon (\mathrm{a}, \mathrm{a_n}) \notin \mathrm{E}(\mathcal{A}), \mathrm{a} \in \mathrm{D(f_n)}\}$.

  (Jelölés: E: él)



$\mathcal{B} \vDash \mathrm{T_R}$ miatt van $\mathrm{b} \in \mathcal{B}$, hogy b össze van kötve X elemeivel, és nincs összekötve Y elemeivel.

Legyen $\mathrm{g} = \mathrm{f_n} \cup \{\langle a, b \rangle\}$.

Mindkét esetben g olyan véges függvény, ami izomorfizmus értelmezési tartománya és értékkészlete között, egyúttal f-nek egy olyan kiterjesztése, ami $\mathrm{a_n}$-t b-re képezi le.

Az így kapott g inverze kiterjeszthető úgy, hogy g^{-1} értelmezve legyen $\mathrm{b_n}$-re. Ez a kiterjesztés legyen $\mathrm{f_{n+1}}$. Végül legyen $\mathrm{f} = \bigcup_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \mathrm{f_n}$.

Ekkor $\mathrm{f_0}$-ra alkalmazva az előbbi kiterjesztést egy izomorfizmust kapunk $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. ■

13.2. Tétel: *(Łoś (ejtsd: [ˈwɔɕ])–Vaught-teszt)*

Ha T $\aleph_0$-kategorikus elmélet egy megszámlálható nyelven, akkor T teljes.

Bizonyítás:

Indirekt: tegyük fel, hogy φ olyan formula, hogy T $\not\vDash$ φ és T $\not\vDash$ ¬φ. Ekkor:

- Létezik $\mathcal{A}$, hogy $\mathcal{A} \vDash$ T és $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$.

  $\mathrm{TH}(\mathcal{A})$ megszámlálható és ellentmondástalan.

  A nov. 11-i előadás c) pontjához tartozó megjegyzés miatt létezik megszámlálható $\mathcal{A}'$, hogy $\mathcal{A}' \vDash$ T és $\mathcal{A}' \vDash \neg\varphi$.

- Létezik $\mathcal{B}$, hogy $\mathcal{B} \vDash$ T és $\mathcal{B} \vDash \varphi$.

  Az előzőhöz hasonlóan: létezik megszámlálható $\mathcal{B}'$, hogy $\mathcal{B}' \vDash$ T és $\mathcal{B}' \vDash \varphi$.

Mivel $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ megszámlálható modellek, ezért a kategoricitás miatt $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$ (lásd: nov. 16-i előadás 1. pontja). Ez ellentmondásra vezetett, tehát T teljes. ■

Következmény:

$\mathrm{T_R}$ teljes.

13.3. Tétel: *(0–1 törvény)*

Legyen φ a gráfelmélet tetszőleges formulája. Ekkor $\lim_{k\to\infty} P(G_k \vDash \varphi) \in \{0,1\}$. (Azaz annak a valószínűsége, hogy a k csúcsú G gráfon φ igaz, $k \to \infty$ esetén vagy 0, vagy 1.)

Bizonyítás:

Legyen $\mathcal{A} \vDash \mathrm{T_R}$ megszámlálható modell.

Elég megmutatni, hogy ha $\mathcal{A} \vDash$ φ, akkor $\lim_{k\to\infty} P(G_k \vDash \varphi) = 1$.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash$ φ. A tétel előtti következmény miatt $\mathrm{T_R}$ teljes, tehát $\mathrm{T_R} \vDash$ φ**.** A kompaktsági tétel miatt van véges $\Gamma = \{\varphi_{\mathrm{n_1 n_1}} \dots \varphi_{\mathrm{n_l n_l}}\} \subseteq \mathrm{T_R}$, hogy $\Gamma \vDash$ φ. Ekkor:

$$P(G_k \vDash \varphi) \geq P(G_k \vDash \Gamma) = 1 - P(G_k \not\vDash \Gamma) \geq 1 - \left(P\left(G_k \not\vDash \varphi_{\mathrm{n_1 n_1}}\right) + \dots + P\left(G_k \not\vDash \varphi_{\mathrm{n_l n_l}}\right)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,$$

mert a zárójelben lévő tagok külön-külön 0-hoz tartanak. ■

Megjegyzés:

A 0–1 törvény nem igaz, ha a nyelv tartalmaz függvényszimbólumot. Például:

Legyen $\varphi = \forall \mathrm{x}\left(x \neq f(x)\right)$, legyen $\mathcal{A}_k$ a k elemű véletlen struktúra. Ekkor:

$$P(G_k \vDash \varphi) = \frac{(k-1)^k}{k^k} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-1}.$$

Kitekintés

- További vizsgálati irányok:
  - rezolúciós stratégiák,
  - más automatikus tételbizonyító módszerek,
  - adatbázisok elmélete.

- Klasszikus logika:
  - bizonyításelmélet

13.4. Tétel: *(Gödel nemteljességi tétele)*

Legyen $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, \leq, = \rangle$ (a természetes számok struktúrája).

Ha $\Gamma \subseteq \mathrm{TH}(\mathcal{N})$ rekurzív halmaz, akkor Γ nem teljes (és ezért még kevésbé kategorikus).

Következmény:

$\mathrm{TH}(\mathcal{N})$ részhalmazaira a következő 3 tulajdonság nem teljesülhet egyszerre, csak legfeljebb bármelyik 2 ezek közül: ellentmondástalan, teljes, rekurzív.

  - modellelmélet
    - axiomatizálhatóság,
    - definiálhatóság,
    - véges modellelmélet (klasszikus kérdések véges modellekre).

13.5. Tétel: *(Morley tétele)*

A következő állítások ekvivalensek:

(1) T elmélet $\aleph_1$-kategorikus.
(2) T elmélet κ-kategorikus minden $\kappa \geq \aleph_1$-re.

- Végül:
  - más logikák (2-rendű logika, időlogikák, programlogikák,…)

„Végtelen sok logika van, de ez egy véges kurzus, úgyhogy vége.”