Matematikai logika
3. előadás

Begépelte: Vajna Miklós (AYU9RZ)

2010. november 2.

1. Táblázatból formula

Példa Egy nem túl nagy, nem túl kis táblázat, 3 változóval:

x	y	z	f	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_6
i	i	i	i	i	h	h
i	i	h	i	h	i	h
i	h	i	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	i	i	h	h	h	h
h	i	h	i	h	h	i
h	h	i	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

keressünk formulát, melynek pont ez a táblázata.
$\phi_1 = x \wedge y \wedge z$ - ez csak az első sorban igaz.
$\phi_2 = x \wedge y \wedge \neg z$ - ez csak a második sorban igaz.
$\phi_6 = \neg x \wedge y \wedge \neg z$ - ez csak a hatodik sorban igaz.
$f = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_6$ jó lesz.

Definíció Logikai műveletek egy F halmazát funkcionálisan teljesnek nevezzük, ha minden $f : \{i, h\}^n \to \{i, h\}$ kifejezhető F-beli műveletekkel.

1.1. Tétel. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás Legyen $f : \{i, h\}^n \to \{i, h\}$ tetszőleges. Ha $s \in \{i, h\}^n$, akkor legyen

$$x_j^s = \begin{cases} x_j & \text{ha s j. koordinátája igaz} \\ \neg x_j & \text{ha s j. koordinátája hamis} \end{cases}$$

f a következő formula táblázata:
$\bigvee_{s:f(s)=i}(x_1^s \wedge x_2^s \wedge ... \wedge x_n^s)$ (diszjunktív normálforma, DNF.)
A zárójelen belüli rész csak s-ben lesz igaz. Rögzített s-re $x_1^s \wedge ... \wedge x_n^s$: elemei konjunkció. ∎

Bizonyítás (másik.) Legyen $f : \{i, h\}^n \to \{i, h\}$. Ha $s \in \{i, h\}^n$, akkor

$$!\ (x_j)_s = \begin{cases} x_j & \text{ha } s_j = h \\ \neg x_j & \text{ha } s_j = i \end{cases}$$

f a következő formula táblázata:
$\bigwedge_{s:f(s)=h}((x_1)_s \vee (x_2)_s \vee ... \vee (x_n)_s)$ (konjunktív normálforma, KNF.)
A zárójelen belüli rész csak s-ben lesz hamis. Rögzített s-re $(x_1)_s \vee ... \vee (x_n)_s$: elemi diszjunkció. ∎

Következmény:

1.2. Tétel. *Minden ϕ formulához van ϕ' DNF: $\phi \equiv \phi'$.*

Bizonyítás ϕ táblázatához van őt leíró DNF, ez lesz a ϕ'. ∎

Megjegyzés . Ugyanez igaz KNF-re is.

1.3. Tétel. $\{\wedge, \neg\}$ *is funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás Elég: $x \vee y$ kifejezhető.
$x \vee y \equiv \neg\neg(x \vee y) \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y)$ ∎

Emlékeztető: a fenti a De Morgan azonosságok miatt igaz.
Diszjunkcióra: $\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$.
Konjunkcióra: $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$.

1.4. Tétel. $\{\vee, \neg\}$ *is funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás $x \wedge y \equiv \neg\neg(x \wedge y) \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$. ∎

1.5. Tétel. $\{\Rightarrow, \neg\}$ *is funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás $x \vee y \equiv \neg x \Rightarrow y$. ∎

Mese:

1. $\{\wedge, \vee\}$ nem funkcionálisan teljes: összetettség szerinti indukcióval igazolható, hogy az ezekkel felírt függvények minden változójukban monoton növekvőek, a negáció viszont nem az, emiatt nem fejezhető ki.

2. $\{\neg\}$ nem funkcionálisan teljes. Indoklás: az ezzel felírt függvények egy változósak, és például a $\wedge$ két változós.

3. Legyen $x|y$ a következő művelet (Sheffer-féle sem-sem):

x	y	$x\|y$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	i

   1.6. Tétel. *Ez funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás $\neg x \equiv x|x$,

$x \vee y \equiv \neg(x|y) \equiv (x|y)|(x|y)$. ∎

Megjegyzés .

1. $\{\neg, \vee, \wedge\}$ áramköri elemekkel megvalósítható.
2. Kevés jelet tartalmazó formulát "nehéz" találni (optimum megtalálása NP-teljes).
3. Kevés igaz érték esetén DNF-et célszerű keresni, kevés hamis érték esetén KNF-et.

2. Elsőrendű formulák között normálformák keresése

Definíció Legyen ϕ, ψ elsőrendű formula. $\phi \equiv \psi$, ha tetszőleges $\mathcal{A}$-ra és k-ra $\mathcal{A} \models \phi[k]$ pont akkor, ha $\mathcal{A} \models \psi[k]$.

Ismert: általánosított De Morgan szabályok:

- $\neg\exists x\phi \equiv \forall x\neg\phi$.
- $\neg\forall x\phi \equiv \exists x\neg\phi$.

További példák:

- Univerzális kvantor disztributív az $\wedge$-re:
  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(X)) \wedge (\forall x Q(x))$.
- Egzisztenciális kvantor disztributív a $\vee$-ra:
  $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$.
- De: $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$.
  Indoklás: Legyen $A = N$, $P(x)$: x páros, $Q(x)$: x páratlan.
  ! $\mathcal{N} = \langle A, P, Q\rangle$. Ekkor
  $\mathcal{N} \models \forall x(P(x) \vee Q(x))$ és
  $\mathcal{N} \not\models (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$.

Definíció Legyen ϕ formula, x változó.

- x egy előfordulása ϕ-ben szabad, ha x nincs rá vonatkozó kvantor hatáskörében.

- x előfordulása ϕ-ben kötött, ha nem szabad.
- ϕ formula egy mondat, ha minden változójának minden előfordulása kötött.

2.1. Tétel. *Legyen ϕ formula, $\mathcal{A}$ struktúra, k és l értékelések $\mathcal{A}$ felett úgy, hogy ha x szabad ϕ-ben, akkor $k(x) = l(x)$. Ekkor*

$$(*)\mathcal{A} \models \phi[k] \text{ pontosan akkor, ha } \mathcal{A} \models \phi[l].$$

Azaz ϕ igazsága csak szabad változóitól függ.

Bizonyítás $(*)$-ot ϕ összetettsége szerinti indukcióval igazoljuk.
Atomi formulákra $(*)$ triviális.
Tegyük fel, hogy $(*)$ igaz ϕ, ψ-re (és minden k-ra).

Kell: $\neg\phi$-re öröklődik, mert
$\mathcal{A} \models \neg\phi[k]$ pont akkor, ha
$\mathcal{A} \not\models \phi[k]$ pont akkor (indukció), ha
$\mathcal{A} \not\models \phi[l]$ pont akkor, ha
$\mathcal{A} \models \not\phi[l]$.

$\phi \wedge \psi$-re:
$\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi[k]$ pont akkor, ha
$\mathcal{A} \models \phi[k]$ és $\mathcal{A} \models \psi[k]$ pont akkor (indukció), ha
$\mathcal{A} \models \phi[l]$ és $\mathcal{A} \models \psi[l]$ pont akkor, ha
$\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi[l]$.

$\exists x\phi$-re: $\mathcal{A} \models \exists x\phi[k]$ pont akkor, ha
$(**)$ van k $\equiv^x$ k' (x-közel): $\mathcal{A} \models \phi[k']$.

Legyen $l'(y) = \begin{cases} l(y) & \text{ha } y \neq x \\ k'(x) & \text{különben.} \end{cases}$

Mivel k' és l' megegyezik ϕ szabad változóin, az indukciós feltevés miatt $(**)$ ekvivalens azzal, hogy van $l' \equiv^x l$: $\mathcal{A} \models \phi[l']$. Ez viszont pont akkor teljesül, ha, $\mathcal{A} \models \exists x\phi[l]$.

$\{\neg, \wedge, \exists\}$-al minden formula kifejezhető. ∎

A fentiek következménye: A kötött változók a jelentés megváltoztatása nélkül átnevezhetők.

Általános kvantor-kiemelési szabály:
$(Qx\phi) \vee \wedge \psi \equiv Qx(\phi \vee \wedge \psi)$, ha x nem fordul elő ψ-ben szabadon.
Q lehet $\exists, \forall$; $\vee\wedge$ lehet $\wedge, \vee$. (Nem bizonyítjuk.)

Definíció A ϕ prenex-formájú, ha $\phi \equiv Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\psi$, ahol $Q_1...Q_n$ kvantorok és ψ kvantormentes formula ($n = 0$ is megengedett, ekkor nincs kvantorblokk a formula elején).

2.2. Tétel. *Tetszőleges elsőrendű ϕ-hez van prenex alakú Φ' úgy, hogy $\phi \equiv \phi'$.*

Bizonyítás Hajtsuk végre a következő algoritmust:

1. $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ kiküszöbölése ($\vee, \wedge, \neg$-re cserélése);
2. $\neg$ hatásköreinek redukálása (De Morgan, disztributivitás);
3. Az egyes változókat esetleg átnevezve alkalmazzuk az általános kvantor-kiemelési szabályt.

Példa . Formula prenex-alakra hozása:
$\neg\forall y(\exists x P(x) \Rightarrow \forall y(P(x) \vee R(x, f(y)))) \equiv$
$\neg\forall y(\neg(\exists x P(x)) \vee \forall y(P(x) \vee R(x, f(y)))) \equiv$
$\neg\forall y(\forall x \neg P(x)) \vee \forall y(P(x) \vee R(x, f(y))) \equiv$
$\exists y(\neg\forall x \neg P(x)) \wedge \neg\forall y(P(x) \vee R(x, f(y))) \equiv$
$\exists y(\exists x P(x) \wedge \exists y(\neg(P(x)) \wedge \neg R(x, f(y)))) \equiv$
A baloldali x változót z-re nevezzük át, hogy kiemelhessük:
$\exists y \exists z(P(z) \wedge \exists y(\neg P(x) \wedge \neg R(x, f(y)))) \equiv$
A jobboldali y változót v-re nevezzük át:
$\exists y \exists z \exists v(P(z) \wedge (\neg P(x) \wedge \neg R(x, f(v))))$.
Ez már prenex-alak.